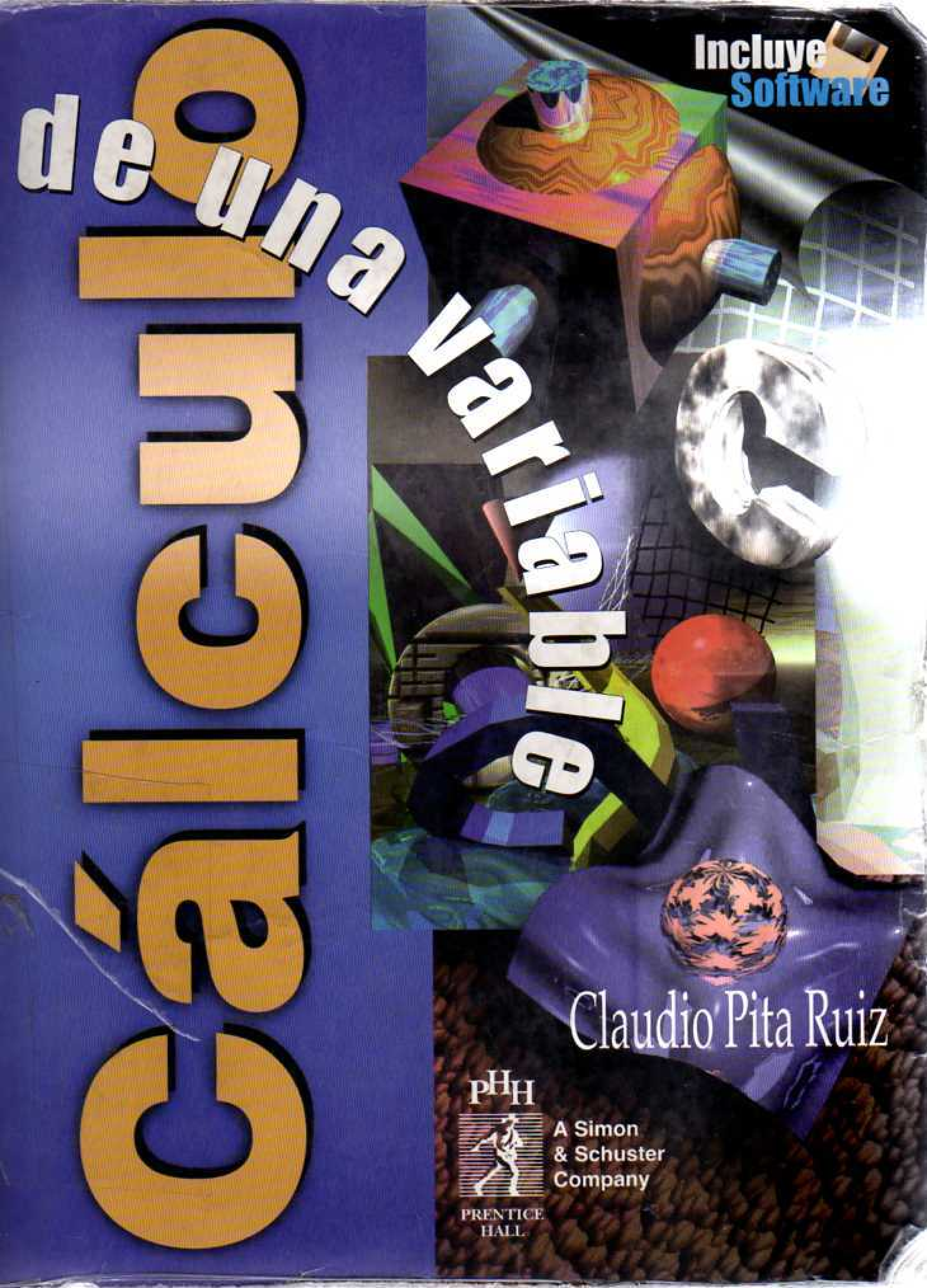

Cálculo de una variable
Incluye Software
Claudio Pita Ruiz
PHH
A Simon & Schuster Company
PRENTICE HALL

CÁLCULO
DE UNA VARIABLE

CÁLCULO
DE UNA VARIABLE

CLAUDIO PITA RUIZ
Universidad Panamericana
Escuela de Ingeniería

PRENTICE HALL HISPANOAMERICANA, S.A.

MÉXICO - NUEVA YORK - BOGOTÁ - LONDRES - SYDNEY
PARÍS - MUNICH - TORONTO - NUEVA DELHI - TOKIO - SINGAPUR
RÍO DE JANEIRO - ZURICH

EDICIÓN EN ESPAÑOL

DIRECTOR GENERAL:	MOISÉS PÉREZ ZAVALA
…TE DIVISIÓN BACHILLERATO:	MIGUEL MORFÍN HERAS
…R:	ENRIQUE QUINTANAR DUARTE
…NT… …ICIONES:	JUAN ANTONIO RODRÍGUEZ MORENO
…ERENTE … …E:	JORGE BONILLA TALAVERA
…ERE… …UCCIÓN:	JULIÁN ESCAMILLA LIQUIDANO
…ER… …IONES:	ALBERTO SIERRA OCHOA
SU…	JOSÉ D. …ERNÁNDEZ GARDUÑO

PITA: CÁLCULO DE UNA VARIABLE, 1/E

PRENTICE HALL HISPANOAMERICANA, S.A.
Calle 4 No. 25 2° Piso, Fracc. Industrial Alce Blanco
53370 Naucalpan de Juárez, Edo. de México

ISBN 970-17-0108-9

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial, Reg. Núm 1524

Impreso en México /Printed in Mexico



— . . . that' s because I have two worlds that I love in my life: literature and mathematics— he said.

—So what . . . is there any other?

May mathematics always remain for you an exact and beatiful language, a means of expressing ideas, a way of thought. May mathematics be more than merely another subject that has to be "passed" at an examination and then left behind without a trace. Love mathematics and mathematics will love you back.

Ya. B. Zeldovich



PRÓLOGO

We live in a complicated world, where nothing is as simple as it was once, nothing is as simple as it seems to be. Mathematics knits that world together. Don't you forget it.

Ian Stewart

En este libro se tratan los temas que normalmente constituyen un primer curso de Cálculo (Diferencial e Integral de Funciones Reales de una Variable Real, o bien, simplemente, Cálculo de una Variable), como el que se imparte en el último año de la preparatoria o en los primeros semestres de una licenciatura. A diferencia de muchos de los libros de Cálculo que existen en el mercado, éste no ofrece un estudio de los temas clásicos de Geometría Analítica que también se estudian en alguno de los cursos de preparatoria. Más bien, la familiaridad entre algunas ecuaciones algebraicas (como las de las rectas y las de las cónicas) y sus representaciones geométricas en el plano cartesiano, así como una plataforma básica en el manejo adecuado de expresiones algebraicas, son consideradas como ingredientes básicos para poder sacar el provecho que este libro ofrece.

El hecho de que el Cálculo de una Variable se encuentre dentro de las materias de la preparatoria y luego aparezca (con un curso similar) en los primeros semestres de la formación profesional de un estudiante de ciencias básicas o de ingeniería, no es más que una muestra de la reconocida importancia que tiene el estudio de las ideas manejadas en esta disciplina, para luego continuar construyendo sobre ellas otras de las importantes y necesarias partes del conocimiento matemático que un profesionista debe tener. Una de las motivaciones originales que me llevó a escribir este libro es esta "duplicación" del curso de Cálculo de una Variable por la que comúnmente pasa un estudiante de ciencias o de ingeniería, ya que el presente texto está pensado para usarse en el *primer* contacto que tiene un estudiante con el mundo de la Matemática Superior. Esta importante diferencia entre la manera como conviene plantear los temas en un primer contacto con el Cálculo, y la manera como se hace en estudios posteriores de esta materia, la he podido experimentar durante los últimos ocho años en que he impartido el curso de Cálculo Diferencial e Integral tanto en la preparatoria de la Universidad Panamericana (en el Área I), como en la Escuela de Ingeniería (en la misma Universidad).

En el capítulo 1 se establecen los antecedentes básicos que requiere un primer curso de Cálculo: se presentan los números reales, se recuerdan algunos hechos sencillos sobre el álgebra de estos números, se define el concepto de función, y se estudian las propiedades más importantes que tienen este tipo de objetos matemáticos con los que trabaja el Cálculo, con lo que se aprovecha, al presentar las funciones trigonométricas, para recordar algunos resultados relevantes de la trigonometría que serán usados en capítulos posteriores (los que, por otro lado, constituyen parte de lo que bien se puede considerar como "buena educación matemática" y que, por tanto, nunca está por demás recordarlos).

En el capítulo 2 se estudian los límites de funciones. Por ser este concepto la primera (y más importante) "no trivialidad" en este curso, se procuró, de una manera muy especial, ser

lo más claro posible, para lo cual se presentaron primeramente las intuiciones que hay alrededor del concepto de límite de una función y se ejemplificó de manera numérica situaciones concretas en donde se deje ver la esencia de este concepto. Se hace énfasis tanto en el significado como en los cálculos involucrados en el manejo de formas indeterminadas del tipo $\frac{0}{0}$, pues, finalmente, ésta es una de las situaciones en donde mejor se transparenta el verdadero contenido que se envuelve en el concepto de derivada de una función (o en el de pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función), el cual es, sin lugar a dudas, uno de los manjares más suculentos del menú que se debe saborear, deglutir y digerir en cualquier curso de Cálculo.

En el capítulo 3 se estudia la propiedad de continuidad de una función, así como algunos de los resultados más importantes sobre funciones continuas en intervalos compactos (como el teorema del valor intermedio, que nos da las bases para estudiar el método de la bisección para determinar las raíces de una ecuación). Es en el capítulo 4 en donde aparece el concepto de derivada. Se trata de motivar el estudio de este concepto, presentándolo primeramente como una expresión (la definición de derivada) a la que nos conduce de manera natural el problema de trazar la tangente a una curva en un punto de ella y el problema del cálculo de la velocidad instantánea de un cuerpo en movimiento rectilíneo, problemas que son tratados, respectivamente, en las secciones 1 y 2 del capítulo.

El objetivo de los capítulos 5 y 6 es desarrollar habilidades operativas en el estudiante para que pueda calcular derivadas de funciones. En el capítulo 5 solamente se trabaja con funciones "simples" y dejamos para el capítulo 6 el estudio de las derivadas de funciones "más complejas", como aquellas que son composiciones de otras, aquellas que no están dadas explícitamente y aquellas que son funciones inversas de otras. El objetivo de un curso de Cálculo Diferencial no es que el alumno sea un experto calculando derivadas. Ésta es, ciertamente, una condición necesaria para que el estudiante pueda aprovechar adecuadamente su curso, pero está muy lejos de ser suficiente para lograr tal objetivo. De cualquier manera, el capítulo 6 cierra con una sección de repaso que contiene una buena cantidad de ejercicios en los que, además de poner en juego las decenas de fórmulas de derivación, previamente estudiadas, se exige del estudiante que enfrente las simplificaciones algebraicas de expresiones (resultantes de derivar una función dada) que en primera instancia parecen complicadas. Este tipo de retos algebraicos suelen dejar resultados colaterales muy positivos, sobre todo en estudiantes preparatorianos.

En los capítulos 7, 8 y 9 se explota el contenido geométrico del concepto de derivada. En el capítulo 7 se trabaja con las rectas tangentes y normales a las curvas y se exponen los teoremas del valor medio clásicos en el Cálculo Diferencial. Se estudia también el método de Newton-Raphson para calcular raíces de funciones, y se hace hincapié tanto en las ideas en las que se basa el método, como en el aspecto computacional de éste (se ofrece el diagrama de flujo y los programas en Turbo-Pascal y en Borland C correspondientes). En el capítulo 8 se estudia lo relacionado con los extremos de una función, y en el capítulo 9 se estudian las propiedades geométricas relacionadas con la segunda derivada, para rematar, al final de tal capítulo, con los análisis exhaustivos de funciones y sus gráficas, los cuales de alguna manera coronan el estudio de la parte gométrica del Cálculo Diferencial. Concentramos, en el capítulo 10, el estudio de los problemas en donde la derivada se explota en el contexto físico (velocidad y aceleración de un cuerpo en movimiento rectilíneo, razón de cambio, etcétera).

En el capítulo 11 se estudia el concepto de diferencial de una función y la fórmula de Taylor, con algunas de sus aplicaciones clásicas en cálculos aproximados, y (para la fórmula de Taylor), en el cálculo de algunos límites que producen indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$. Es en este capítulo en donde aparece el único ejercicio de todo el libro que está muy alejado del nivel de los otros (el ejercicio 35 de la sección 4), y que puede servir como un verdadero reto para el estudiante que se está iniciando en el mundo del Cálculo.

En el capítulo 12 se abre la parte Integral de este libro. En él se expone el concepto de área y se presenta el concepto de integral definida de una función, así como las propiedades más importantes de ésta. Siendo estos temas mucho más delicados, desde el punto de vista del rigor con el que se establecen las definiciones y se justifican las propiedades, que sus similares en el Cálculo Diferencial (el contenido del capítulo 4), se procuró siempre explotar el carácter geométrico que tiene el concepto de integral definida de una función, haciendo el énfasis en que tal carácter geométrico aparece solamente en el caso de que la función sea continua y no negativa (en cuyo caso podemos ver a la integral definida como un "área bajo una curva").

El capítulo 13 es, sin duda alguna, el más importante de todo el libro. El objetivo del capítulo es estudiar el Teorema Fundamental del Cálculo. Con él se cierra de manera magistral el desarrollo de las ideas expuestas en la parte diferencial del curso, conectándolas con las aparentemente ajenas ideas del Cálculo Integral estudiadas en el capítulo 12. Con el Teorema Fundamental del Cálculo queda listo el terreno para comenzar el estudio del cálculo de integrales indefinidas, que se empieza a abordar en el capítulo 14. En este capítulo se dan las herramientas básicas para calcular las integrales indefinidas de algunas funciones simples, usando las técnicas más elementales de sustituciones en el integrando. Después del capítulo 14 se pueden estudiar las aplicaciones del Cálculo Integral analizadas en los capítulos 15 (relacionadas con el planteamiento y solución de ecuaciones diferenciales simples) y 16 (relacionadas con el cálculo de áreas y volúmenes), o bien, se puede continuar con el estudio de algunas de las técnicas más especializadas para obtener integrales indefinidas de funciones, que se exponen en los capítulos 17 y 18. Estos dos últimos capítulos tienen, al igual que los capítulos 5 y 6 en la parte Diferencial del libro, la intención de desarrollar habilidades operativas en el estudiante para que sea capaz de calcular las antiderivadas de un espectro amplio de funciones. También, como sucedió en el capítulo 6, en el capítulo 18 se cierra con una serie grande de ejercicios de repaso (más de 200) que pueden ser considerados como una recapitulación global de las técnicas operativas que se presentaron en todo el libro (tanto de la parte Diferencial como de la parte Integral). Resolver los ejercicios de esta serie ofrece una garantía de que, al menos en el aspecto de capacidades operativas, el estudiante ha concluido de una manera satisfactoria su curso de Cálculo.

El libro contiene alrededor de 500 ejemplos resueltos y más de 3000 ejercicios propuestos para que el estudiante resuelva. La respuesta de la mayor parte de éstos se da en la sección correspondiente al final del libro. Se ofrecen también exámenes al final de cada capítulo. El examen llamado "tipo A" consiste en 10 reactivos que evalúan los puntos esenciales por adquirir (en un primer curso de Cálculo) del contenido del capítulo correspondiente. El examen "tipo B" ofrece una alternativa para que el estudiante tenga la seguridad de que ha alcanzado un buen grado de dominio de los temas del capítulo (algunos de los reactivos en este tipo de exámenes son más difíciles que los correspondientes del tipo A). Cada capítulo cierra con una nota histórica. En estas secciones "se cuenta una historia", con un estilo más

bien informal, sobre algunos de los protagonistas relacionados con la concepción y desarrollo de las ideas del Cálculo, o de otras ramas de la Matemática relacionadas con el Cálculo. La última de estas notas históricas relata uno de los más grandes acontecimientos que ha visto la Matemática de este siglo, y con ella se pretende simplemente hacer partícipes a todos los lectores de este libro del regocijo que inunda a la comunidad matemática de finales del siglo XX, por la tan anhelada y cientos de años esperada demostración del Último Teorema de Fermat, dada en el año de 1993. (Los dibujos de las notas históricas y otras caricaturas que aparecen en el libro son de Germán Nájera.)

No está demás insistir en la fundamental importancia que tiene la tarea de resolución de ejercicios en el proceso de aprendizaje de la Matemática. El placer estético proporcionado por un libro de matemáticas (que suele acompañar, en mayor o en menor grado, al proceso de aprendizaje de esta ciencia), no se descubre como en (la monumental obra) *Cien años de soledad*, en donde la sola lectura del libro nos permite navegar por los bellos universos plasmados en el quehacer literario. Para poder descubrir, y, más aún, para poder hacer propio lo que ofrece un libro de matemáticas como éste, uno debe hacerse acompañar de papel y lápiz para reescribir las ideas más importantes que se exponen en el libro (por ejemplo, las expuestas por el profesor en clase), volver a resolver los ejemplos que ya están resueltos en él, resolviendo los ejercicios propuestos, etcétera. Solamente de esta manera se pueden crear las condiciones necesarias para que ese deseado proceso de aprendizaje se logre.

La obra cuenta además con un programa para verse en computadora, en el que se exhiben y resaltan los detalles gráficos más importantes de tres de las ideas centrales del curso: el límite, la derivada y la integral. La intención de este programa es reforzar (y no reemplazar) el conocimiento que el estudiante logre después de estudiar debidamente las partes de este libro correspondientes a tales temas. El programa fue desarrollado por Carlos Leopoldo Reyes Servín y Hugo Manuel Bretón Cervera, alumnos de la Escuela de Ingeniería de la Universidad Panamericana, sede México. La existencia de este programa, que sin duda será un atractivo pedagógico para quienes usen como texto este libro, se debe en gran parte a la insistencia del L.F.M. Francisco Ortiz Arango, a quien le agradezco su tenaz labor de convencimiento ante el poco interés que mostré en un principio por embarcarme en este proyecto adicional, cuando ya sentía la tranquilidad de haber terminado de escribir el libro. En la página xii se encuentran las instrucciones para instalar el programa en su computadora personal.

Hago patente mi agradecimiento a las autoridades de la Universidad Panamericana que me proporcionaron las facilidades para sacar adelante este proyecto. En particular, agradezco al Ing. Pedro Creuheras Vallcorba, director de la Escuela de Ingeniería, por mostrar su paciente confianza ante la serie de efectos secundarios que suelen producirse a causa de algunas de las frecuentes locuras que se conciben y se gestan dentro de mi cubículo. Esta confianza, que se ha demostrado siempre dando las facilidades para salir adelante en los no pocos momentos críticos que suelen aparecer en este tipo de proyectos, se ha llegado a convertir en un ingrediente fundamental para que los procesos de gestación mencionados anteriormente puedan llegar a término con un feliz alumbramiento. Este libro es una muestra de ello. Agradezco también a las maestras Elena de Oteyza y Emma Lam, de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México, por haber compartido conmigo parte de su trabajo con el procesador en que fue capturado este libro, así como al Ing. Carlos Fernando Diez de Sollano Navarro, quien se encargó de que la presentación preliminar de todos los archivos

Instalación de "CÁLCULO de una variable"

La computadora donde instale este programa deberá tener al menos las siguientes características:

- Procesador 486 SX a 66 MHz.
- Monitor en color VGA, con una resolución mínima de 640 × 480 pixeles (lo más recomendable es que la resolución sea de al menos 800 x 600 pixeles).
- Windows 3.1 o posterior.
- Un mínimo de 4 megabytes de espacio en disco duro.
- Al menos 4 megabytes de RAM.

Para instalar el programa incluido en el disquete que acompaña a este libro, realice los siguientes pasos:

1. Desde el menú Inicio de Windows 95', elija el comando Ejecutar.
2. En el cuadro de texto Abrir, escriba A:\Setup.exe y oprima el botón Aceptar.

Puede ser que la letra usada en el programa no sea lo suficientemente clara como para que la lea en su monitor. Puede resolver este problema instalando el tipo de letra llamado Geometric 231 Light Bt. El archivo que contiene esta letra es "tt1126m_.ttf", y podrá encontrarlo en el mismo directorio donde está instalada esta aplicación. Para instalarlo, siga los pasos que mencionamos a continuación. Las instrucciones son para Windows 95, pero el procedimiento es igual en Windows 3.1 (lo único que cambia es que el 'Panel de Control' se encuentra dentro de la carpeta 'Principal').

1. En el menú 'Inicio' de Windows 95 seleccione el submenú 'Configuración'.
2. Dentro del submenú 'Configuración' escoja la carpeta 'Panel de Control'
3. Abra la carpeta 'Fuentes' que deberá estar en 'Panel de Control'
4. En el menú 'Archivo' de la carpeta 'Fuentes' seleccione la opción 'Instalar nueva fuente...'
5. Hecho esto aparecerá un cuadro de diálogo en donde se le pregunta qué desea instalar. Seleccione el directorio en donde esté instalado este programa, y escoja la fuente 'Geometric 231 Light BT (TrueType)'.
6. Asegúrese que esté marcada la opción 'Copiar fuentes a la carpeta Fuentes'
7. Oprima el botón 'Aceptar'

Si tiene algún problema adicional, puede contactarnos vía correo electrónico. Busque nuestro e-mail en la página electrónica de la Universidad Panamericana en la ciudad de México, http://www.mixcoac.upmx.mx. Actualmente nuestras direcciones son:

Carlos Leopoldo Reyes Servín:
i94018@mixcoac.upmx.mx

Hugo Manuel Bretón Cervera:
m95013@mixcoac.upmx.mx

CONTENIDO

CAPÍTULO 7. APLICACIONES GEOMÉTRICAS Y TEOREMAS DEL VALOR MEDIO 289

CAPÍTULO 8. EXTREMOS DE LAS FUNCIONES 346

CAPÍTULO 9. OTRAS APLICACIONES GEOMÉTRICAS 391

CAPÍTULO 10. LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO 444

CAPÍTULO 11. LA DIFERENCIAL. FÓRMULA DE TAYLOR 472

CAPÍTULO 1
NÚMEROS REALES Y FUNCIONES

"Todos quienes conozcan el tema, estarán de acuerdo en que las bases sobre las cuales reposa la explicación científica de la naturaleza, son inteligibles sólo a aquellos que han aprendido, por lo menos, los elementos del Cálculo Diferencial e Integral . . ."

Félix Klein

En este primer capítulo vamos a recordar algunos conceptos básicos que ya han sido estudiados en cursos anteriores. Estos conceptos se refieren al estudio de los números reales y de las funciones, los cuales son de fundamental importancia en el manejo de las ideas del Cálculo.

Cada parte de la Matemática trabaja con cierto tipo de "objetos matemáticos". Podríamos pensar que cada parte de la Matemática es como una sección especial de una gran fábrica (en donde se producen ideas, teorías, modelos, etcétera), y en cada una de estas secciones se tienen herramientas de trabajo específicas: por ejemplo, en una sección de alguna fábrica se usa concreto para construir bloques (que posiblemente sean usados en otras partes de la fábrica), en alguna otra sección particular se usan mosaicos para recubrir paredes, etcétera. Así, la Aritmética es una parte de la Matemática cuya herramienta de trabajo son los números. El Cálculo es una de la partes más importantes de la Matemática, cuya herramienta de trabajo son justamente las funciones que estudiaremos en este capítulo. De hecho, el nombre completo de un curso de Cálculo como el que ahora emprendemos, es el de **Cálculo Diferencial e Integral de Funciones Reales de una Variable Real.** En este título descriptivo del curso, encontramos la palabra "funciones" como el nombre de los objetos matemáticos sobre los que recaen las dos ideas más importantes del Cálculo (la derivada, del Cálculo Diferencial, y la integral, del Cálculo Integral). Aparece también la palabra "real", como un calificativo del tipo de variables que conforman las funciones con las que trabajaremos. En este primer capítulo del curso estudiaremos los elementos fundamentales relacionados con estas dos ideas que aparecen en el título del curso.

1.1 EL CONJUNTO DE NÚMEROS REALES

El sistema numérico más simple que conocemos es el de los números naturales. Éste fue usado por el hombre para contar los objetos que tenía a su alrededor. El conjunto constituido por estos números se denota con **N** y se define como $\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$. Aunque ciertamente en este conjunto se encuentran las soluciones de problemas de contar y de sumar objetos contados, no se encuentran, sin embargo, las soluciones de problemas como: "Qué número sumado a 4 da como resultado 2." Es decir, si llamamos x al número en cuestión, tal x no es un elemento del conjunto **N**.

Los números enteros constituyen un conjunto numérico más amplio que **N**, el cual es denotado con **Z** y definido como $\mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$. Observe que efectivamente este conjunto es "más amplio" que el de los números naturales, pues **Z** contiene a **N** (o bien, **N** está contenido en **Z**). El problema anteriormente planteado encuentra su solución en **Z**, a saber, $x = -2 \in \mathbf{Z}$ es el número que sumado a 4 da como resultado 2. Sin embargo, en **Z** no se encuentran soluciones a problemas como: "Qué número multiplicado por 5 da como resultado 8." Si llamamos y a tal número es claro que $y \notin \mathbf{Z}$.

Un sistema numérico más amplio que **Z** es el de los números racionales, que son aquellos números que se pueden escribir como el cociente de dos números enteros (cuyo denominador es distinto de cero, ¡la división entre cero está prohibida en matemáticas!). Es decir,

$$\mathbf{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbf{Z}, b \neq 0\}.$$

Observe que el conjunto **Q** contiene al conjunto **Z**, pues todo número entero x, se puede escribir como el cociente de x entre 1 (ambos enteros). Un hecho interesante sobre los elementos de **Q**, es que éstos se pueden caracterizar en términos de la expansión decimal que tienen (es decir, en términos de los dígitos que siguen después del punto decimal): los elementos de **Q** son números que en su expansión decimal presentan una parte periódica (que se repite siempre). Para no caer en precisiones teóricas que sostengan esta afirmación, consideremos el ejemplo del número racional $\frac{1}{7}$. Al hacer la división de 1 entre 7 seguimos, según el algoritmo de la división que hemos estudiado desde la primaria, los siguientes pasos:

1. Puesto que el 7 "no cabe" en el 1, el (único) dígito antes del punto decimal en el cociente es el cero. Ponemos un cero a la derecha del 1 del numerador, y procedemos a hacer la división de 10 entre 7. El resultado es 1 y en el residuo queda 3. Así, nuestro cociente en esta etapa se ve como $0.1\ldots$
2. Ponemos un cero a la derecha del 3 (el residuo del paso anterior) y dividimos 30 entre 7. El resultado es 4 y en el residuo queda 2. Nuestro cociente se ve ahora como $0.14\ldots$
3. Ponemos un cero a la derecha del 2 (residuo del paso anterior) y dividimos 20 entre 7. El resultado es 2 y en el residuo queda 6. Nuestro cociente en este paso se ve como $0.142\ldots$
4. Dividimos 60 entre 7, obtenemos un 8 y queda como residuo un 4. El cociente se ve en este paso como $0.1428\ldots$
5. Dividimos 40 entre 7, obtenemos un 5 y queda como residuo un 5. El cociente se ve en este paso como $0.14285\ldots$

6. Dividimos 50 entre 7, obtenemos un 7 y queda como residuo un 1. El cociente se ve en este paso como 0.142857…
7. En este paso tenemos como residuo de la etapa anterior un 1, así que le ponemos un cero a la derecha y dividimos 10 entre 7.

Regrese ahora a ver lo que hicimos en el paso 1. ¿Qué sigue de nuestro cociente? Es claro que vendrá ahora el dígito 1, después el 4 (como en el paso 2), luego el 2 (como en el paso 3), etcétera. Así, podemos asegurar que el resultado de dividir 1 entre 7 es el número 0.142857142857142857…, que escribiremos como $0.\overline{142857}$ para indicar, con la barra superior, que esa secuencia de dígitos se repite *ad infinitum*.

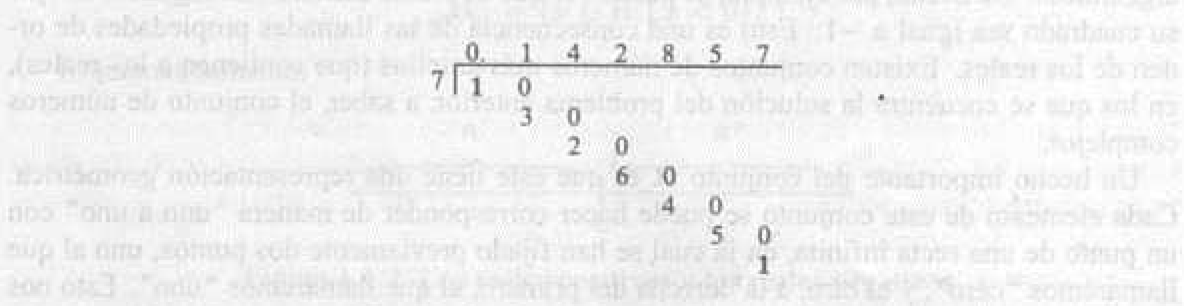


Figura 1.1.1. La división de 1 entre 7 da una fracción periódica.

De la misma manera se ve que: $\frac{1}{2} = 0.5\overline{0}$, $\frac{2}{3} = 0.\overline{6}$, $\frac{657}{4950} = 0.1\overline{327}$, etcétera.

De modo recíproco, supongamos que un número presenta, después de un punto decimal, una parte periódica. Afirmamos que este número es racional (es un cociente de dos números enteros). Veamos con un ejemplo concreto cómo podemos hacer para descubrir cuáles enteros, al dividirse, producen un número con las características mencionadas. Consideremos el número $1.283\overline{456}$. Llamémoslo x. Multiplicando ese número por 10^6, obtenemos $10^6x = 1283456.\overline{456}$. Multiplicando ahora x por 10^3 obtenemos $10^3x = 1283.\overline{456}$, de tal modo que

$$10^6x - 10^3x = 1283456.\overline{456} - 1283.\overline{456}$$

Observe que el número que se encuentra a la derecha en esta expresión tiene solamente ceros en su expansión decimal (es decir, *es un número entero*), pues es el resultado de restar dos números que tienen *la misma expansión decimal*. Así pues, la expresión anterior se ve como $999000x = 1282173$, de donde $x = \frac{1282173}{999000}$.

En el conjunto de números racionales encontramos las soluciones de todos los problemas del tipo: "Determine x tal que $bx = a$, en donde a y b son enteros y b es no nulo." Sin embargo, el problema: "Determine x tal que su cuadrado sea 2", no tiene su solución en los racionales. (Este hecho es conocido desde hace *muchos* años, —¡como 2500!—, y su demostración se encuentra ya reportada en *Los elementos* de Euclides.) Existen, pues, otros tipos de números que no se pueden escribir como el cociente de dos números enteros. Éstos son llamados números irracionales. Muchos de los números famosos en la Matemática son irracionales: todas las raíces cuadradas de los números primos, el número π, el número e (la

base de los logaritmos naturales), etcétera. En realidad, se puede demostrar que existen "muchos más" números irracionales que racionales. (La expresión "muchos más" se entiende cuando se estudian las cardinalidades de conjuntos infinitos.)

Estamos ahora en posibilidades de decir cuáles son los números reales.

El conjunto de los números reales, denotado con $\mathbf{R}$*, es la unión del conjunto de números racionales y de números irracionales.*

El conjunto $\mathbf{R}$ contiene a los números con los que vamos a trabajar en este libro. Es importante señalar que en este conjunto no se encuentran las soluciones de "todos" los problemas algebraicos. De hecho, por ejemplo, se puede ver que no existe número real alguno x tal que su cuadrado sea igual a -1. Esto es una consecuencia de las llamadas propiedades de orden de los reales. Existen conjuntos de números más amplios (que contienen a los reales), en los que se encuentra la solución del problema anterior, a saber, el conjunto de números complejos.

Un hecho importante del conjunto $\mathbf{R}$ es que éste tiene una representación geométrica. Cada elemento de este conjunto se puede hacer corresponder de manera "uno a uno" con un punto de una recta infinita, en la cual se han fijado previamente dos puntos, uno al que llamaremos "cero", y el otro, a la derecha del primero, al que llamaremos "uno". Esto nos permite pensar el conjunto $\mathbf{R}$ como si estuviera constituido por los puntos de tal recta (en el sentido de que cada número real corresponde a un único punto de la recta, y a su vez, cada punto de la recta representa a un único número real), llamada **recta real** (o **recta de los reales**), y representada como:

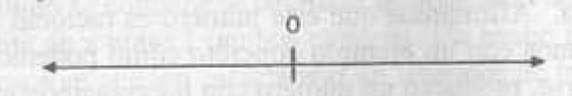


Figura 1.1.2. La recta de los reales.

De ahora en adelante entonces, cuando nos refiramos al conjunto de los reales $\mathbf{R}$, podemos pensar en la recta real que lo representa. Con esta idea en mente, podemos presentar las **relaciones de orden** en el conjunto $\mathbf{R}$ de la siguiente manera: sean x y y números reales:

1. Se dice que x es mayor que y (o bien, que y es menor que x), lo cual se escribe como $x > y$ (o bien, $y < x$), si en la recta de los reales el punto x se encuentra a la derecha del punto y (o bien, si el punto y se encuentra a la izquierda de x, respectivamente).
2. Se dice que x es mayor o igual que y (o bien, que y es menor o igual que x), lo cual se escribe como $x \geq y$ (o bien, $y \leq x$), si en la recta de los reales el punto x se encuentra a la derecha, o coincide con el punto y (o bien, si el punto y se encuentra a la izquierda o coincide con x, respectivamente).

Así, por ejemplo, se tiene $5 > 2$, $\pi > 2$, $-3 \geq -6$, $0 < 10$, $-1 \leq -1$, etcétera.

Algunas veces queremos indicar que un número real z es menor (o menor igual) que y y es mayor (o mayor igual) que x (por ejemplo, el número π es menor que 5 y es mayor que 2). Es decir, que el número real z cumple simultáneamente las dos condiciones $z < y$ y $z > x$. En tales casos, convenimos en escribir ambas condiciones como $x < z < y$, y decimos que z

se encuentra entre x y y. Con esta convención, la expresión $x \leq z \leq y$ nos indicaría que z se encuentra entre x y y, o bien, que coincide con alguno de estos dos números, y la expresión $x \leq z < y$ nos indicaría que z se encuentra entre x y y, o que es igual a x.

En el conjunto de los números reales se distinguen dos subconjuntos importantes:

1. El conjunto de los **reales positivos**, denotado con $\mathbf{R}^+$, formado por los puntos que están a la derecha del cero en la recta real. Es decir,

$$\mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}.$$

2. El conjunto de los **reales negativos**, denotado con $\mathbf{R}^-$, formado por los puntos que están a la izquierda del cero en la recta real. Es decir,

$$\mathbf{R}^- = \{x \in \mathbf{R} \mid x < 0\}.$$

Esquemáticamente:

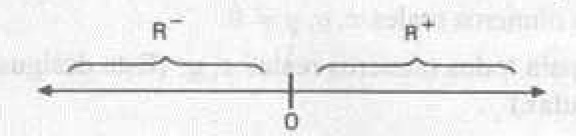


Figura 1.1.3. Los reales positivos y los reales negativos.

Observe que el número real 0 no pertenece a ninguno de los conjuntos $\mathbf{R}^+$ ni $\mathbf{R}^-$. De hecho, el conjunto $\{x : x \geq 0\}$ que está formado por los reales positivos y el cero, tiene la característica de que ninguno de sus elementos es negativo (es el complemento de $\mathbf{R}^-$). Es llamado **conjunto de los reales no negativos.** Similarmente, el conjunto $\{x : x \leq 0\}$ es llamado el **conjunto de los reales no positivos.**

Algunos hechos importantes que es importante que recordemos sobre el manejo algebraico en el conjunto de números reales son los siguientes:

1. Todo número real x no nulo tiene un inverso multiplicativo x^{-1} tal que su producto con x es igual a 1.
2. Si $x > y$ y z es cualquier número real, entonces $x + z > y + z$.
3. Si $x > y$ y z es un real positivo, entonces $xz > yz$.
4. Si $x > y$ y z es un real negativo, entonces $xz < yz$.
5. Para todo número real x, se tiene que $x^2 \geq 0$. De hecho, $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

El **valor absoluto** de un número real x, denotado por $|x|$, se define como:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Así por ejemplo, $|3| = 3$, $|-4| = 4$, $|0| = 0$. Una interpretación geométrica que podemos dar a $|x|$ es decir que es la distancia (sin signo) que media entre el punto de la recta real que corresponde a x y el cero. Por ejemplo, la distancia que existe entre el número real -4 y el 0 es $|-4| = 4$. Más aún, el valor absoluto de la diferencia de dos números reales x y y, $|x - y|$ puede ser interpretado como la distancia (sin signo) entre los puntos correspondientes a x y

y en la recta real. Por ejemplo, la distancia entre $x = 9$ y $y = 4$ es $|9 - 4| = 5$, la cual es la misma que la distancia que hay entre $x = 4$ y $y = 9$, pues $|4 - 9| = |-5| = 5$.

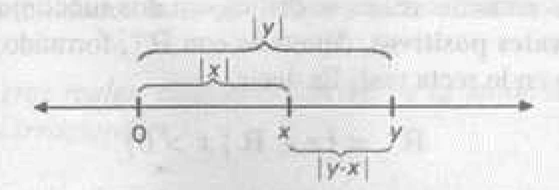


Figura 1.1.4. El valor absoluto como una distancia.

Algunas de las propiedades que usaremos del valor absoluto de un número real son:

1. $|x| \geq 0$ para todo número real x, y $|x| = 0$ si y solamente si $x = 0$.
2. $|xy| = |x|\,|y|$ para todos números reales x, y.
3. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, para todos números reales $x, y, y \neq 0$.
4. $|x + y| \leq |x| + |y|$ para todos números reales x, y. (Esta desigualdad es conocida como **desigualdad triangular**.)

EJERCICIOS (1.1)

¿Verdadero o Falso? (Ejercicios 1 al 5)

1. Si $x \in \mathbf{Q}$, entonces $x^2 \in \mathbf{Q}$.
2. Si $x \in \mathbf{R}$ es tal que $x^2 \in \mathbf{Q}$, entonces $x \in \mathbf{Q}$.
3. Si $x, y \in \mathbf{Q}$, entonces $x + y \in \mathbf{Q}$.
4. $x < |x|$, para toda $x \in \mathbf{R}$.
5. Si $|x + y| = |x| + |y|$, entonces $x, y \geq 0$.

Complete la siguiente tabla.

Ejercicio	x	¿Racional? ¿Irracional?	¿Positivo? ¿Negativo?	$\|x\|$	Si $x \in \mathbf{Q}$, su expresión como cociente de dos enteros.
6	0.1				
7	$-0.1010010001\ldots$				
8	$0.10101010\ldots$				
9	12.1231				
10	$1 - 3.121212\ldots$				

11. Dé un ejemplo de dos números irracionales cuya suma sea irracional.
12. Dé un ejemplo de dos números irracionales cuya suma sea racional.

En cada uno de los ejercicios 13 – 23, se dan dos números reales. Escriba en el espacio indicado, el símbolo <, > o = que le corresponda.

13. 2 ____ 3. **14.** -2 ____ -3. **15.** -2 ____ 3.

16. 2 ____ -3. **17.** π ____ 3.1416. **18.** π^2 ____ 10.

19. $-2(\pi-4)$ ____ 1.5. **20.** 3^2 ____ 2^3. **21.** 3^{-2} ____ 2^{-3}.

22. $(-3)^{-2}$ ____ $(-2)^{-3}$. **23.** $(-3)^2$ ____ $(-2)^3$.

1.2 INTERVALOS

Dentro de los subconjuntos de los números reales, hay algunos que son especialmente importantes, llamados intervalos. De manera intuitiva, un intervalo puede considerarse como un "pedazo de la recta de los reales constituido de una sola pieza". Con esta idea en mente, los pedazos de la recta que tengan agujeros no podrán ser intervalos, porque tales agujeros marcarían la separación entre distintas piezas del subconjunto de los reales que se esté considerando. De manera rigurosa, un intervalo se define como:

Un intervalo de $\mathbf{R}$ *es un subconjunto* $I \subseteq \mathbf{R}$ *que tiene la siguiente propiedad: si* $x, y \in I$ y $x < z < y$, *entonces* $z \in I$.

Es decir, un intervalo es un subconjunto de los números reales que tiene la propiedad de que si dos números x y y están en tal subconjunto, entonces cualquier número z que se encuentre entre x y y también está en el subconjunto.

Por ejemplo, es claro que $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^+$, y $\mathbf{R}^-$ son intervalos de $\mathbf{R}$. También, los conjuntos $\{x \in \mathbf{R} \mid -5 \leq x \leq 4\}$ y $\{x \in \mathbf{R} \mid 3 < x \leq 9\}$ son intervalos de $\mathbf{R}$. Sin embargo, el conjunto $I = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 < x < 2\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid 4 < x < 9\}$ no es un intervalo, puesto que, por ejemplo, los puntos $x = 0.5$ y $y = 8$ pertenecen a I, el punto $z = 3$ se encuentra entre x y y, y z no pertenece a I.

Presentamos ahora algunos tipos especiales de intervalos.

1. Sea a un número real. Se dice que el intervalo $\{x \in \mathbf{R} \mid x > a\}$, correspondiente a todos los puntos de la recta que se encuentran a la derecha de a, es un *intervalo abierto infinito*. Se denota con (a, ∞), y geométricamente se ve como en la figura 1.2.1.
2. El intervalo $\{x \in \mathbf{R} \mid x < a\}$, correspondiente a todos los puntos de la recta que se encuentran a la izquierda de a, también es un *intervalo abierto infinito*, denotado con $(-\infty, a)$, y representado geométricamente como en la figura 1.2.2.

3. Se dice que el intervalo $\{x \in \mathbf{R} \mid x \geq a\}$, correspondiente a los puntos de la recta que se encuentran a la derecha o coinciden con a, es un *intervalo cerrado infinito*, denotado con $[a, \infty)$, y representado geométricamente como en la figura 1.2.3.
4. El intervalo $\{x \in \mathbf{R} \mid x \leq a\}$, correspondiente a los puntos de la recta que se encuentran a la izquierda o coinciden con a, es también un *intervalo cerrado infinito*, denotado con $(-\infty, a]$, y representado geométricamente como en la figura 1.2.4.
5. Sean a y b números reales, tales que $a < b$. El intervalo $\{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$, que corresponde a los puntos de la recta que se encuentran entre a y b, se dice ser un *intervalo abierto finito*, el cual es denotado por (a, b), y representado geométricamente como en la figura 1.2.5.
6. Sean a y b números reales, tales que $a < b$. El intervalo $\{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$, que corresponde a los puntos de la recta que se encuentran entre a y b, o coinciden con a y b, se dice ser un *intervalo cerrado finito* (también llamado un intervalo compacto), el cual es denotado por $[a, b]$, y representado geométricamente como en la figura 1.2.6.
7. Los intervalos del tipo $I_1 = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}$ o $I_2 = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$ son llamados *intervalos semiabiertos*, denotados con $I_1 = [a, b)$ o $I_2 = (a, b]$, y representados geométricamente como en las figuras 1.2.7 y 1.2.8, respectivamente.

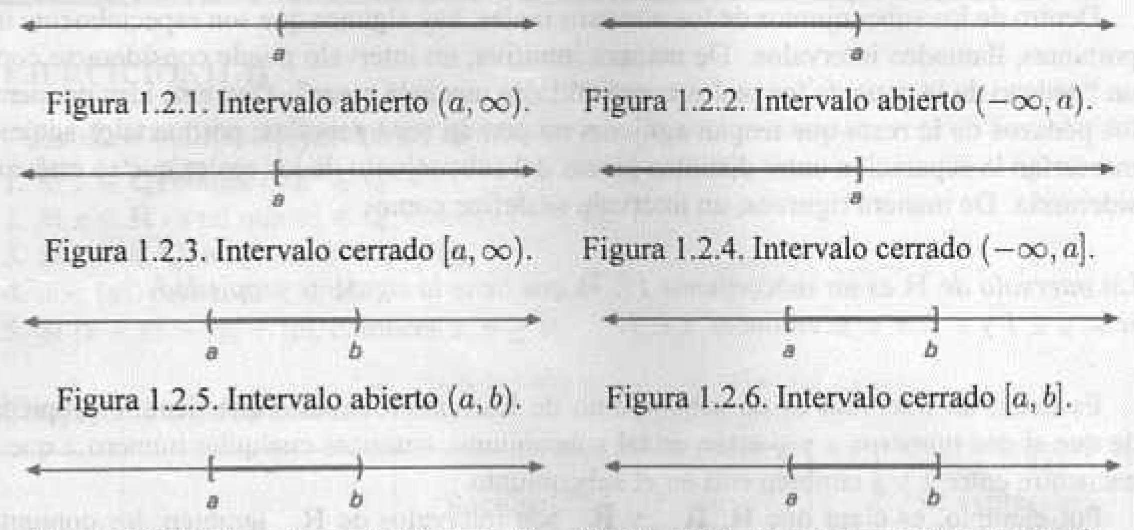


Figura 1.2.1. Intervalo abierto (a, ∞). Figura 1.2.2. Intervalo abierto $(-\infty, a)$.

Figura 1.2.3. Intervalo cerrado $[a, \infty)$. Figura 1.2.4. Intervalo cerrado $(-\infty, a]$.

Figura 1.2.5. Intervalo abierto (a, b). Figura 1.2.6. Intervalo cerrado $[a, b]$.

Figura 1.2.7. Intervalo semiabierto $[a, b)$. Figura 1.2.8. Intervalo semiabierto $(a, b]$.

EJEMPLO 1.2.1. Considere los siguientes intervalos: $I_1 = [2, 5], I_2 = (3, 7), I_3 = [-1, 2]$. Describa explícitamente los conjuntos de $\mathbf{R}$ dados por: a) $I_1 \cap I_2$. b) $I_1 \cup I_2$. c) $I_1 \cap I_3$.

SOLUCIÓN.

a) $I_1 \cap I_2$ contiene los puntos que se encuentran a la vez en $I_1 = \{x \in \mathbf{R} \mid 2 \leq x \leq 5\}$ y en $I_2 = \{x \in \mathbf{R} \mid 3 < x < 7\}$. Así pues, $I_1 \cap I_2 = \{x \in \mathbf{R} \mid 3 < x \leq 5\}$. Observe que éste es también un intervalo.

b) El conjunto $I_1 \cup I_2$ contiene los puntos que se encuentran en: $I_1 = \{x : 2 \leq x \leq 5\}$ o en $I_2 = \{x \in \mathbf{R} \mid 3 < x < 7\}$. Así entonces, $I_1 \cup I_2 = \{x \in \mathbf{R} \mid 2 \leq x < 7\}$. Observe nuevamente que en este caso se obtiene también un intervalo.

c) El conjunto $I_1 \cap I_3$ contiene los puntos que comparten $I_1 = \{x \in \mathbf{R} \mid 2 \leq x \leq 5\}$ e $I_3 = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x \leq 2\}$. Es claro que el único punto compartido por estos intervalos es $x = 2$. Así, $I_1 \cap I_3 = \{2\}$.

★

Consideremos ahora intervalos del tipo $\{x \in \mathbf{R} \mid |x| < r\}$ en donde r es un número positivo dado. Este intervalo está constituido entonces por las x cuyo valor absoluto es menor que r. Interpretando geométricamente el valor absoluto de x como la distancia de x al origen, vemos que en este intervalo se encuentran las x cuya distancia al origen es menor que r (en otras palabras, las x que distan de 0 en menos que r). Es claro que tales x son justamente aquellas que se encuentran entre $-r$ y r. Así pues, la expresión $|x| < r$ es equivalente a la expresión $-r < x < r$. Análogamente, si consideramos el conjunto $\{x \in \mathbf{R} \mid |x| > r\}$ (el cual no es un intervalo) vemos que en él se encuentran las x que distan del 0 en más que r. Estas x son las mayores que r o bien las menores que $-r$. Así, la expresión $|x| > r$ es equivalente a la expresión $x > r$ o $x < -r$ (en donde la "o" se entiende en el sentido de la unión de conjuntos). Resaltamos este par de hechos importantes a continuación:

$$|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r.$$

$$|x| > r \Leftrightarrow x > r \text{ o } x < -r.$$

Esquemáticamente, el conjunto $\{x \in \mathbf{R} \mid |x| < r\}$ (que sí es un intervalo) se representa en la figura 1.2.9, y el conjunto $\{x \in \mathbf{R} \mid |x| > r\}$ (que no es un intervalo) se representa en la figura 1.2.10.



Figura 1.2.9. El conjunto $\{x \in \mathbf{R} \mid |x| < r\}$.

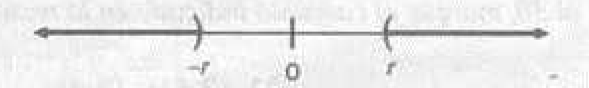


Figura 1.2.10. El conjunto $\{x \in \mathbf{R} \mid |x| > r\}$.

Generalizando las ideas anteriores, consideramos un número real arbitrario a y un real positivo r. Se dice que el intervalo $V = \{x \in \mathbf{R} \mid |x - a| < r\}$ es una **vecindad con centro en a y radio r**. Observe que en V se encuentran aquellas x reales cuya distancia al punto a es menor que r. De hecho, considerando que la expresión $|x - a| < r$ es equivalente a $-r < x - a < r$ o bien a $a - r < x < a + r$, vemos que en la vecindad V se encuentran justamente las x del intervalo abierto $(a - r, a + r)$, como esquemáticamente se muestra en la figura 1.2.11.

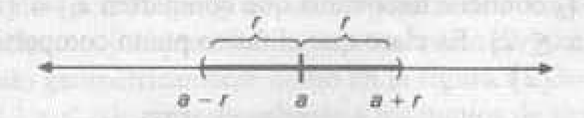


Figura 1.2.11. La vecindad $\{x \in \mathbf{R} \mid |x-a| < r\}$.

EJERCICIOS (1.2)

En los ejercicios 1 al 10, escriba el intervalo dado en forma de conjunto.

1. $(2, 2.3)$. **2.** $[2,5]$. **3.** $[0,9]$.

4. $(-1,-0.5)$. **5.** $[2,6]$. **6.** $(1,\infty)$.

7. $(-\infty,3)$. **8.** $(-\infty,\infty)$. **9.** $(0,0.001)$.

10. $(-10^{-5},10^{-5})$.

En los ejercicios 11 al 20, escriba el intervalo dado en forma de vecindad, identificando su centro y su radio. Marque la vecindad en la recta de los reales.

11. $\{x \in \mathbf{R} \mid |x-2| < 3\}$. **12.** $\{x \in \mathbf{R} \mid |x| < 1\}$. **13.** $\{x \in \mathbf{R} \mid |x+5| < 9\}$.

14. $(1,7)$. **15.** $(-3,11)$. **16.** $(0,1)$.

17. $\{x \in \mathbf{R} \mid -2 < x < 7\}$. **18.** $\{x \in \mathbf{R} \mid 0 < x < 13\}$.

19. $\{x \in \mathbf{R} \mid -4 < x-3 < 8\}$. **20.** $\{x \in \mathbf{R} \mid -5 < x+5 < 17\}$.

En los ejercicios 21 al 30, marque el conjunto indicado en la recta de los reales.

21. $(1,9) \cap [2,18]$. **22.** $(2,6) \cup (3,4)$.

23. $[2,6] \cap [-3,5]$. **24.** $(3,5) \cup (9,10)$.

25. $\{x \in \mathbf{R} \mid |x-2| < 1\} \cap \{x \in \mathbf{R} \mid |x-1| < 0.5\}$.

26. $\{x \in \mathbf{R} \mid |x+2| < 4\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid |x+2| < 7\}$.

27. $\{x \in \mathbf{R} \mid |x+2| < 4\} \cap \{x \in \mathbf{R} \mid |x+2| < 7\}$.

28. $\{x \in \mathbf{R} \mid |x-a| < r_1\} \cap \{x \in \mathbf{R} \mid |x-a| < r_2\}$, en donde $0 < r_1 < r_2$.

29. $(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}) \cap (a - \frac{1}{4}, a + \frac{1}{4})$.

30. $(a-1, a+1) \cap (a-2, a+2) \cap (a-3, a+3) \cap (a-4, a+4)$.

31. ¿Es la unión de dos intervalos un intervalo? Justifique su respuesta.

32. ¿Es la intersección de dos intervalos un intervalo? Justifique su respuesta.

33. ¿Es un conjunto formado por un solo punto un intervalo?

34. ¿Es el conjunto vacío un intervalo?

1.3 DESIGUALDADES

En esta sección repasaremos algunos métodos para resolver desigualdades sencillas. Recordemos que todas las reglas del álgebra que conocemos, aplicadas a las ecuaciones (en las que tratamos de despejar la incógnita x) son también válidas en el caso de que el signo igual que aparece en la ecuación se cambie por un signo $<, \leq, >$ o $\geq$ (entonces la ecuación queda convertida en una desigualdad), excepto una de tales reglas: cuando pasemos multiplicando o dividiendo un número negativo, la desigualdad "cambia de sentido" (si es $<$, quedará $>$, y si es $\leq$, quedará $\geq$). Esta situación no es más que la regla operativa en donde se usa la propiedad ya mencionada en la primera sección: si $x < y$ y $z < 0$, entonces $xz > yz$.

Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 1.3.1. Resolver la desigualdad $2x + 3 > 6x - 10$.

SOLUCIÓN. La desigualdad dada es equivalente a (si se agrupa en el lado derecho todos los términos con x) $2x - 6x > -10 - 3$, o sea a $-4x > -13$. Para dejar despejada la x de esta última expresión, deberíamos pasar dividiendo el coeficiente -4 al lado izquierdo de ella. Puesto que -4 es negativo, la desigualdad cambiará de sentido y nos queda como $x < \frac{-13}{-4}$. Es decir, la solución de la desigualdad dada es $\{x \in \mathbf{R} \mid x < \frac{13}{4}\}$ (que es el intervalo abierto infinito $(-\infty, \frac{13}{4})$).

★

EJEMPLO 1.3.2. Resolver la desigualdad $|2x - 6| < 4$.

SOLUCIÓN. La desigualdad dada es equivalente a $-4 < 2x - 6 < 4$. Sumando 6 en los "tres miembros" de esta desigualdad (recuerde: la última expresión es equivalente a las dos desigualdades $-4 < 2x - 6$ y $2x - 6 < 4$, de tal modo que si en cada una de estas dos desigualdades sumamos 6 en ambos miembros, esto equivale a sumar 6 en los "tres" miembros de la desigualdad $-4 < 2x - 6 < 4$). Nos queda entonces que $-4 + 6 < 2x < 4 + 6$, o bien $2 < 2x < 10$. Dividiendo entre 2, obtenemos $1 < x < 5$, que es la solución de la desigualdad dada. Observe que esta solución es el intervalo abierto $(1, 5)$. Otra manera de ver nuestro problema inicial de resolver la desigualdad dada, es al tratar de "acomodar"

tal expresión en forma de una vecindad: observe que $|2x-6| < 4 \Leftrightarrow |2(x-3)| < 4 \Leftrightarrow 2|x-3| < 4 \Leftrightarrow |x-3| < 2$, de tal modo que la desigualdad dada en este ejemplo no es más que una vecindad con centro en 3 y radio 2: las x que se encuentran en tal vecindad son las que distan de 3 en menos que 2, es decir, las que están a 2 unidades del 3 (para ambos lados de este número), por lo que resulta claro que se trata del intervalo abierto $(1, 5)$.

★

EJEMPLO 1.3.3. Resolver la desigualdad $\frac{2x-1}{x-3} < 1$.

SOLUCIÓN. El primer paso que debemos dar para poder despejar la x de esta expresión, es "pasar multiplicando al segundo miembro el $x-3$ que se encuentra dividiendo en el primer miembro". El problema es que, como ya dijimos antes, cuando pasamos multiplicando un número de un miembro a otro en una desigualdad, debemos estar conscientes de que tal número es positivo (en cuyo caso la desigualdad no se altera) o negativo (en cuyo caso la desigualdad se altera). En nuestro caso, tenemos el problema de no saber qué signo tiene $x-3$ (¡tal signo depende de la x!). Entonces debemos dividir la solución de esta desigualdad en 2 casos:

Caso (I). Suponga que $x-3 > 0$. En este caso nos limitaremos a considerar solamente la $x > 3$. Podemos multiplicar el $x-3$ de la desigualdad, sin alterar ésta, y nos queda $2x-1 < x-3$, la cual es una desigualdad muy sencilla (como la del ejemplo 1.3.1), cuya solución es $x < -2$. Observe que desde el principio habíamos dicho que nos limitaríamos a considerar solamente las x mayores que 3 y, con este supuesto, obtuvimos que las x que resuelven nuestro problema deben ser menores que -2. Es claro que no existe x alguna que cumpla con estos dos requisitos. Por tanto, concluimos que, para este caso, no existe x que resuelva el problema.

Caso (II). Suponga que $x-3 < 0$. En este caso nos limitaremos a considerar solamente las $x < 3$. Al multiplicar el $x-3$ al segundo miembro de la desigualdad dada, debemos cambiar el signo $<$ que aparece en ella, por el signo $>$, pues estamos multiplicando, en este caso, un número negativo. Así, la desigualdad se convierte en $2x-1 > x-3$, cuya solución es $x > -2$. Recuerde que de estas x solamente debemos considerar las menores que 3. Por tanto, concluimos que la solución de la desigualdad en este caso es el conjunto de las x tales que $-2 < x < 3$. Como en el caso anterior no hubo solución alguna para x, la desigualdad de este caso es la de la desigualdad original. Es decir, esta desigualdad tiene por solución el intervalo abierto $(-2, 3)$.

★

Vamos a recordar ahora cómo se resuelven las desigualdades cuadráticas (en donde intervienen términos del tipo x^2). Lo haremos con un ejemplo concreto.

EJEMPLO 1.3.4. Resolver la desigualdad $x^2 - 5x + 6 > 0$.

SOLUCIÓN. Podemos escribir la desigualdad dada como $(x-2)(x-3) > 0$. Entendamos esta desigualdad de la siguiente manera: queremos ver cuáles x son tales que el producto de $x-2$ por $x-3$ sea positivo. Sabemos que el producto de dos factores es positivo solamente cuando ambos tienen el mismo signo ("más por más y menos por menos es más"). Entonces dividimos la solución de la desigualdad en dos casos:

Caso (I). $x - 2 > 0$ y $x - 3 > 0$ (ambos factores son positivos). Las x que cumplen esta condición son las que cumplen a la vez con $x > 2$ y $x > 3$. Es claro que las x mayores que 3 satisfacen ambos requisitos.

Caso (II). $x - 2 < 0$ y $x - 3 < 0$ (ambos factores son negativos). Las x que cumplen con esta condición son las que cumplen a la vez con $x < 2$ y $x < 3$. Es claro que las x menores que 2 satisfacen ambos requisitos.

Concluimos: la solución de la desigualdad original está constituida por las $x > 3$ (del caso I) y las $x < 2$ (del caso II). Es decir, la solución de la desigualdad dada es la unión de los intervalos $(-\infty, 2)$ y $(3, \infty)$.

★

Una idea geométrica muy simple que ayuda a resolver las desigualdades cuadráticas es considerar la expresión $ax^2 + bx + c$, que aparece en la desigualdad $ax^2 + bx + c > 0$ (por ejemplo), como si estuviera formando parte de la ecuación $y = ax^2 + bx + c$. Esta ecuación representa en el plano cartesiano una parábola que abre hacia arriba, si a es positivo, o hacia abajo, si a es negativo. Resolver la desigualdad $ax^2 + bx + c > 0$ significa encontrar las x tales que la $y = ax^2 + bx + c$ sea positiva. Y éste es un hecho que se puede ver en la gráfica de la parábola. Por ejemplo, si la a es positiva, estaríamos en una situación como la mostrada en la figura 1.3.1. La solución de la desigualdad estaría formada por aquellas x que se encuentran a la izquierda de r_1 junto con las x que están a la derecha de r_2, pues son justamente estas x las que tienen su ordenada positiva en la parábola $y = ax^2 + bx + c$.

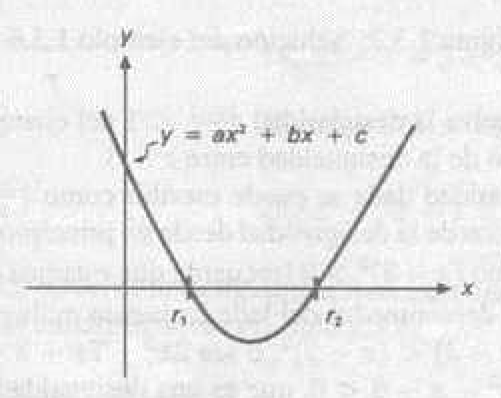


Figura 1.3.1. Una parábola que abre hacia arriba.

De este modo, la solución de una desigualdad cuadrática únicamente indica si la parábola correspondiente abre hacia arriba o hacia abajo, lo cual se deduce del signo del coeficiente cuadrático en la ecuación de la parábola, así como de los puntos del eje x en donde la parábola corta. Éstos se obtienen de resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

EJEMPLO 1.3.5. Resuelva la desigualdad $x^2 - 5x + 6 > 0$ del ejemplo 1.3.4, con argumentos geométricos.

SOLUCIÓN. La ecuación $y = x^2 - 5x + 6$ representa una parábola que abre hacia arriba (pues el coeficiente del término cuadrático es 1, que es positivo), y corta el eje x en

$r_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-4(6)}}{2} = 2, 3$. Así, la solución de la desigualdad está formada por las x que tienen su y positiva. Éstas son las x menores que 2 junto con las x mayores que 3, como obtuvimos en el ejemplo 1.3.4.

⋆

EJEMPLO 1.3.6. Resolver la desigualdad $-x^2 + x + 6 > 0$.

SOLUCIÓN. Se quieren encontrar las x en la parábola $y = -x^2 + x + 6$ que tengan su y positiva. Esta parábola abre hacia abajo, y corta al eje x en $r_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(-1)(6)}}{-2} = -2, 3$. (Ver figura 1.3.2.) Así, la solución de la desigualdad es el intervalo abierto $(-2, 3)$.

⋆

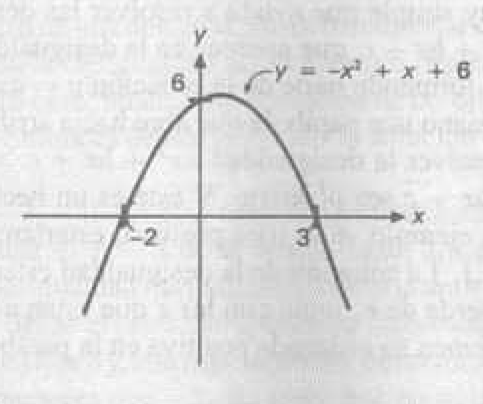


Figura 1.3.2. Solución del ejemplo 1.3.6.

EJEMPLO 1.3.7. Resuelva la desigualdad $\frac{2x-1}{x-3} < 1$ del ejemplo 1.3.3, multiplicando y dividiendo el lado izquierdo de la desigualdad entre $x - 3$.

SOLUCIÓN. La desigualdad dada se puede escribir como $\left(\frac{2x-1}{x-3}\right)\left(\frac{x-3}{x-3}\right) < 1$ (el valor $x = 3$ está fuera de la solución de la desigualdad desde un principio). Es decir, la desigualdad queda $\frac{(2x-1)(x-3)}{(x-3)^2} < 1$. Como $(x-3)^2 > 0$ (recuerde que estamos considerando que $x \neq 3$), entonces podemos pasar el denominador del lado izquierdo multiplicando al lado derecho y obtenemos así: $(2x-1)(x-3) < (x-3)^2$, o sea $2x^2 - 7x + 3 < x^2 - 6x + 9$, la cual, si se simplifica se ve como $x^2 - x - 6 < 0$, que es una desigualdad cuadrática que podemos resolver identificando las raíces $r_{1,2} = -2, 3$ de la parábola $y = x^2 - x - 6$ que abre hacia arriba. Como buscamos las x que tengan su $y < 0$, la solución de esta desigualdad es el intervalo $(-2, 3)$, como obtuvimos en el ejemplo 1.3.3.

⋆

EJERCICIOS (1.3)

En los ejercicios 1 al 10, resuelva la desigualdad indicada. Marque su resultado en la recta de los reales.

1. $2x + 1 > 0$.

2. $3x - 2 \leq 7$.

3. $5(x - 2) > 2(x - 1)$.

4. $3x - 1 < 2x - 3$.

5. $2x + 5 < 3(x + 5)$.

6. $|x - 4| < 6$.

7. $|x - 4| > 6$.

8. $x^2 + 1 > 0$.

9. $\dfrac{2x - 5}{x^2 + 4} < 0$.

10. $\dfrac{5x + 2}{-x^2 - 1} < 0$.

En los ejercicios 11 al 20, use argumentos geométricos para resolver la desigualdad cuadrática indicada. Marque su resultado en la recta de los reales.

11. $(x + 1)(x + 3) > 0$.

12. $(1 - x)(x + 4) \leq 0$.

13. $(2x - 3)(3x - 2) > 0$.

14. $(x + 4)(6 - x) < 0$.

15. $x^2 - 1 < 0$.

16. $x^2 + x + 3 < 2$.

17. $x^2 - 13x + 22 > 0$.

18. $x^2 + 12x > -35$.

19. $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4} < 0$.

20. $x^2 + 5x + 1 < 0$.

En los ejercicios 21 al 25, resuelva la desigualdad indicada, reduciendo el problema a la solución de una desigualdad cuadrática (ver ejemplo 1.3.7).

21. $\dfrac{2x - 1}{x + 1} < 1$.

22. $\dfrac{x - 2}{x - 6} < 2$.

23. $\dfrac{3x + 1}{x - 2} - 1 < 0$.

24. $4 - \dfrac{x - 1}{2x + 6} > 0$.

25. $2 + \dfrac{2x + 9}{3x + 7} < 0$.

1.4 FUNCIONES

Como habíamos mencionado ya al principio del capítulo, los objetos matemáticos con los que se trabaja en Cálculo son las funciones. En particular, en este libro se trabajará con un tipo de funciones llamadas funciones reales de una variable real, cuya definición establecemos a continuación.

Una función real de una variable real es una regla que asocia a cada número real x de un conjunto $D \subseteq \mathbf{R}$, un único número real $f(x)$, llamado imagen de x bajo f. Una función tal se denota con $f : D \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

Al conjunto D de la definición anterior se le llama **dominio** de la función f. Cuando una función f tiene dominio D, decimos que ésta se encuentra **definida en** D. Al conjunto $\{y \in \mathbf{R} \mid y = f(x), x \in D\}$, formado por las imágenes $f(x)$ de las x del dominio, se le llama **rango** de la función f. Al número real x del dominio de la función se le llama **variable independiente** de la función, mientras que a la imagen correspondiente $y = f(x)$ se le llama **variable dependiente** (en el sentido de que su valor depende del valor de x).

Observe entonces que, para especificar completamente una función, es necesario especificar el subconjunto de los reales que constituye su dominio D, así como la regla de asociación de los elementos x en D con sus imágenes $f(x)$ en $\mathbf{R}$. En ocasiones es necesario hacer explícito el dominio de la función. Sin embargo, en muchos otros casos, lo que importa es saber cuál es la regla con la que la función opera con las x de su dominio, para producir sus imágenes. En este caso es común escribir "la función $y = f(x)$", y se debe entender que el dominio de ésta es el mayor subconjunto de los reales para el cual hace sentido calcular $f(x)$. Este subconjunto es llamado **dominio natural** (o simplemente dominio) de la función f.

Esquemáticamente podemos ver a una función $f : D \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ como:

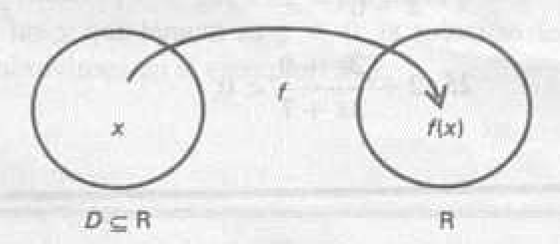


Figura 1.4.1. Una función real con dominio D.

EJEMPLO 1.4.1. Considere la función $f(x) = x^4$. Determine su dominio natural, su rango y las imágenes $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$.

SOLUCIÓN. La operación de elevar a la cuarta potencia no tiene restricción alguna para que opere sobre cualquier número real. De modo que el dominio natural de esta función es todos los números reales.

Puesto que para todo número real x se tiene $x^4 \geq 0$, concluimos que el rango de esta función es el de los números reales no negativos. Se tiene $f(0) = 0^4 = 0$, $f(1) = 1^4 = 1$, $f(-1) = (-1)^4 = 1$.

Observe que en el ejemplo anterior tanto el 1 como el -1 tienen la misma imagen. Esto no entra en conflicto con la definición dada de función, pues en ésta se exige solamente que para cada x del dominio exista una sola imagen $f(x)$ que le corresponda, pero no se establece que a diferentes x del dominio les deban corresponder distintas imágenes. En realidad, se podría presentar la situación extrema en la que una función, cuyo dominio sea todo el conjunto de los reales, tenga una única imagen compartida por todos los números reales de su dominio. Es decir, una función $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, tal que $f(x) = c$, (en donde c es un número real dado), para toda $x \in \mathbf{R}$. Ésta es, de hecho, una función que juega un papel importante en el estudio del Cálculo, llamada *función constante*.

Una manera que puede ayudar a entender más lo que son las funciones, es pensando cada una de ellas como "un tipo de máquina a la que se alimenta con números reales y también produce números reales". Como cualquier máquina, ésta no puede recibir todo tipo de alimento: las x que la máquina-función puede procesar son las del dominio de la función, y el conjunto de números reales que la máquina produce constituyen el rango de la función.

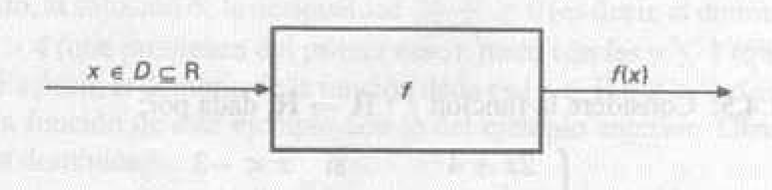


Figura 1.4.2. Una función es como una máquina que procesa números reales.

Así, la función $f(x) = x^4$ del ejemplo 1.4.1 es una máquina que recibe un número real x (en este caso, la máquina recibe cualquier número real), "lo procesa" y entrega como producto el número real x^4. Entonces es una máquina que "eleva a la cuarta potencia". La función $f(x) = \sqrt{x}$ es una máquina que extrae raíz cuadrada a los números que le llegan. Observe que esta máquina no puede alimentarse con números negativos, pues éstos no pueden ser procesados por ella (el mecanismo interno de la máquina está diseñado para producir solamente números reales, y sabemos que no existen —como números reales— raíces cuadradas de números negativos).

EJEMPLO 1.4.2. Determine el dominio de la función $f(x) = \sqrt{4x-6}$. Calcule $f(3)$, $f(5)$ y $f(10)$.

SOLUCIÓN. Para que tenga sentido la expresión de $f(x)$ (como número real), debemos pedir que la x sea tal que $4x-6 \geq 0$, pues sabemos que solamente para números no negativos existe su raíz cuadrada. En este caso entonces, la restricción que tiene la fórmula que define a $f(x)$ es que $4x-6 \geq 0$, de donde se obtiene que $x \geq \frac{3}{2}$. De modo, pues, que el dominio de la función dada es $D = \{x \in \mathbf{R} : x \geq \frac{3}{2}\}$. Se tiene $f(3) = \sqrt{4(3)-6} = \sqrt{6}$, $f(5) = = \sqrt{4(5)-6} = \sqrt{14}$, $f(10) = \sqrt{4(10)-6} = \sqrt{34}$.

★

EJEMPLO 1.4.3. Sea $f(x) = x^2+2$. Obtenga $f(x^2)$ y $f^2(x)$.

SOLUCIÓN. $f(x^2)$ es la imagen de la función $f(x)$ en x^2, es decir, $f(x^2) = (x^2)^2+2$. La expresión $f^2(x)$ (que es una manera de escribir $(f(x))^2$), es la imagen de $f(x)$ elevada al cuadrado. Es decir, $(f(x))^2 = (x^2+2)^2 = x^2+4x^2+4$.

★

EJEMPLO 1.4.4. Determine el dominio de la función $f(x) = \frac{5x-8}{x^2+3x+2}$. Calcule $f(3)$ y $f(0)$.

SOLUCIÓN. En este caso en la fórmula que define a la función aparece un cociente. Sabemos que para que este cociente tenga sentido (se pueda calcular), el denominador de éste no puede ser cero. Entonces la restricción que se presenta para que $f(x)$ exista es que $x^2+3x+2 \neq 0$. En otras palabras, la x no puede ser raíz de la ecuación cuadrática $x^2+3x+2=0$, las cuales son $x=-1, x=-2$. Por lo tanto, el dominio de la función dada es $D = \{x \in \mathbf{R} : x \neq -1, -2\}$. Se tiene $f(3) = \frac{5(3)-8}{(3)^2+3(3)+2} = \frac{7}{20}$ y $f(0) = \frac{5(0)-8}{(0)^2+3(0)+2} = \frac{-8}{2} = -4$.

★

EJEMPLO 1.4.5. Considere la función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{si } x < -3 \\ \frac{1}{x^2+2} & \text{si } -3 \leq x \leq 2 \\ x^3-2x-4 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Calcule $f(-4)$, $f(0)$, $f(1)$ y $f(3)$.

SOLUCIÓN. Se trata de una función definida "por partes": la regla que nos da la manera como se obtienen las imágenes de la función cambia, dependiendo de dónde se encuentre la x. Así, si la x es menor que 3, la regla es $f(x) = 2x+4$, si la x se encuentra en el intervalo $[-3,2]$, la regla es $f(x) = \frac{1}{x^2+2}$, y, finalmente, si la x es mayor que 2, la regla es $f(x) = x^3-2x-4$. De modo, pues, que para calcular $f(-4)$ debemos usar la regla $f(x) = 2x+4$, pues $-4 < -3$. Entonces $f(-4) = 2(-4)+4 = -8+4 = -4$. Similarmente, puesto que $0, 1 \in [-3,2]$, se tiene $f(0) = \frac{1}{0^2+2} = \frac{1}{2}$ y $f(1) = \frac{1}{1^2+2} = \frac{1}{3}$.

Finalmente, $f(3) = 3^3-2(3)-4 = 17$.

★

EJEMPLO 1.4.6. Determine el dominio natural de la función $f(x) = \frac{5\sqrt{x-1}}{7\sqrt{x-4}}$.

SOLUCIÓN. Se trata de un cociente, cuyo numerador es una función que tiene por dominio a las x tales que $x - 1 \geq 0$, es decir, tales que $x \geq 1$, y cuyo denominador es otra función que tiene por dominio a las x tales que $x - 4 \geq 0$, es decir, tales que $x \geq 4$. El dominio de la función $f(x)$ dada debe estar constituido por las x con las que se pueda calcular tanto el numerador como el denominador. Es decir, debe ser la intersección de los dos dominios determinados anteriormente, y eliminar de tal intersección las x que anulen el denominador. La única x que hace que $7\sqrt{x-4} = 0$ es $x = 4$, así que el dominio de $f(x)$ es

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 1\} \cap \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 4\} - \{4\} = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 4\}.$$

★

EJEMPLO 1.4.7. Determine el dominio natural de la función $f(x) = \sqrt{\frac{5(x-1)}{7(x-4)}}$.

SOLUCIÓN. La restricción que impone la raíz cuadrada en la expresión de $f(x)$ obliga a que $\frac{5(x-1)}{7(x-4)} \geq 0$. Para resolver esta desigualdad podemos proceder de la manera siguiente: se trata de encontrar las x tales que el cociente $\frac{5(x-1)}{7(x-4)}$ sea no negativo. Esto puede ocurrir en dos casos (quitando desde el principio la posibilidad de que $x = 4$): 1) si el numerador y denominador son no negativos, o, 2) si numerador y denominador son no positivos. En el primer caso se tiene $5(x-1) \geq 0$ (de donde $x \geq 1$) y $7(x-4) \geq 0$ (de donde $x \geq 4$). Como el valor de $x = 4$ lo tenemos excluido desde el comienzo, concluimos que el primer caso lo satisfacen las $x > 4$. En el segundo caso se tiene una situación similar: buscamos las x tales que $5(x-1) \leq 0$ (o sea que $x \leq 1$) y $7(x-4) \leq 0$ (o sea tales que $x \leq 4$). Las x que satisfacen estas dos condiciones a la vez son las $x \leq 1$. De esta forma el segundo caso se satisface si $x \leq 1$. Por lo tanto, la solución de la desigualdad $\frac{5(x-1)}{7(x-4)} \geq 0$ (es decir, el dominio de la función dada) son las $x > 4$ (que provienen del primer caso), junto con las $x \leq 1$ (que provienen del segundo caso). Es decir, el dominio de la función dada es $\{x \in \mathbf{R} \mid x > 4 \text{ o } x \leq 1\}$. Observe el parecido de la función de este ejemplo con la del ejemplo anterior. Observe también la diferencia en sus dominios.

★

EJEMPLO 1.4.8. Determine el dominio de la función $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2-7x+12}}$.

SOLUCIÓN. Las restricciones que presenta la fórmula que define a la función dada vienen de dos fuentes: las raíces cuadradas existen solamente para números no negativos y no puede haber divisiones entre cero. Al juntar estas dos condiciones, vemos que lo que aparece dentro de la raíz cuadrada en la fórmula de $f(x)$ **debe ser un número positivo.** En efecto, observe que en principio lo que se encuentra dentro de la raíz cuadrada debe ser un número no negativo, lo cual acepta la posibilidad de que tal número sea cero. Sin embargo, esa posibilidad queda anulada ya que obtendríamos una división entre cero. Resumiendo, la restricción que presenta esta función es que $x^2-7x+12 > 0$. La solución de esta desigualdad nos describe explícitamente las x que satisfacen esta condición. Para obtener esta solución consideramos la ecuación $y = x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4) = 0$. Esta ecuación cuadrática

tiene por raíces a $x = 3$, $x = 4$. Entonces procuramos las x de la parábola $y = x^2 - 7x + 12$ que tengan su ordenada positiva. La visualización geométrica de esta parábola (la cual abre hacia arriba y corta al eje x en 3 y en 4) nos indica que las x que cumplen con la condición deseada son las menores que 3, junto con las mayores que 4. Entonces, el dominio de la función dada es $D = \{x \in \mathbf{R} \mid x < 3\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid x > 4\}$.

⋆

EJEMPLO 1.4.9. Determine el dominio de la función $f(x) = 3x + \sqrt{\ln(x-4)}$.

SOLUCIÓN. Recordemos que el logaritmo de un número se puede calcular solamente cuando el número es positivo ($\ln(z)$ existe —como número real— si y solamente si z es un número positivo). Tenemos pues, en principio, una restricción impuesta por el logaritmo: éste se calculará en $x - 4$ y entonces la x debe ser tal que $x - 4$ sea positivo (el sumando $3x$ no impone restricción adicional alguna). Sin embargo, existe otra restricción: una vez calculado el logaritmo de $x - 4$, se deberá tomar la raíz cuadrada de él. Recordemos que el logaritmo de un número es negativo cuando tal número se encuentra entre 0 y 1, y positivo cuando el número es mayor que 1 (el logaritmo de 1 es cero). Así pues, si la x es tal que $x - 4$ produce un número entre 0 y 1, podremos calcular su logaritmo, pero no podremos extraer la raíz cuadrada del resultado de este logaritmo (por ejemplo, si $x = 4.5$, tenemos que $\ln(x-4) = \ln(4.5-4) = \ln(.5) = -0.6931$, y entonces ya no podremos calcular $f(4.5)$). Debemos asegurarnos entonces, para que $f(x)$ exista, que la x sea tal que $\ln(x-4)$ sea un número no negativo. Esto lo logramos si imponemos la condición de que el logaritmo se calcule en números mayores o iguales a 1. Es decir, la restricción que presenta la función dada para que ésta pueda calcularse es que $x - 4 \geq 1$, de donde se obtiene que el dominio de tal función es $D = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 5\}$.

⋆

EJEMPLO 1.4.10. Determine el dominio de la función $f(x) = \ln\sqrt{x^2 + x + 2}$.

SOLUCIÓN. Observe que en la fórmula que define a $f(x)$ se encuentra un logaritmo, que se calculará en $\sqrt{x^2 + x + 2}$, el cual *siempre es un número positivo*, de modo que el cálculo del logaritmo en la expresión $f(x)$ no representa ningún obstáculo para que la función pueda calcularse. Solamente debemos cuidar que las x involucradas sean tales que $\sqrt{x^2 + x + 2}$ pueda calcularse. Nuevamente, se trata de una raíz cuadrada, que existe solamente para números no negativos. Así, las x del dominio de la función deben ser tales que $x^2 + x + 2 \geq 0$. Ésta es una desigualdad cuadrática que resolvemos con argumentos geométricos: la parábola $y = x^2 + x + 2$ abre hacia arriba y sus intersecciones con el eje x las obtenemos de resolver la ecuación $x^2 + x + 2 = 0$. Las raíces de esta ecuación son:

$$r_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2},$$

las cuales *no son números reales*. Esto nos indica que la parábola $y = x^2 + x + 2$ no corta el eje x. Puesto que ésta abre hacia arriba, concluimos que para cualquier x, la correspondiente $y = x^2 + x + 2$ es siempre positiva. En resumen, no hay restricción alguna para que pueda

calcularse la fórmula que define a $f(x)$. Entonces el dominio de esta función es todo el conjunto de los números reales.

★

EJERCICIOS (1.4)

1. Sea $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$. Calcule $f(0)$ y $f(1)$.
2. Sea $f(x) = x^3 - 2x + 4$. Calcule $f(-a)$.
3. Sea $f(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 + x + 4$. Calcule $\frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ y $\dfrac{1}{2}(f(x) - f(-x))$.
4. Si $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, determine $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
5. Si $f(x) = x^2 - 2x$, calcule $f(0)\left[\dfrac{f(2.32) - f(4)}{(f(\pi) + f(\pi^2))^3}\right]$.

En los ejercicios 6 al 20 se dan funciones $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *Determine en cada caso las imágenes indicadas.*

6. $f(x) = \sqrt{x^2}$. $f(2), f(-2)$.
7. $f(x) = \dfrac{x^6 + x^4 + x^2}{x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}$. $f(1), f(0)$.
8. $f(x) = \dfrac{x^9 - x^8 + x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1}{1 + 2x + 3x^2}$. $f(1), f(0)$.
9. $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{x}}}$. $f(1), f(0)$.
10. $f(x) = \sqrt{x}\,(1 + \sqrt{x}\,(2 + \sqrt{x}\,(3 + \sqrt{x})))$. $f(0), f(1), f(4)$.
11. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 0 \\ 5x - 4 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$. $f(-2), f(0), f(3)$.
12. $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x \neq 1 \\ 5 & \text{si } x = 1 \end{cases}$. $f(0), f(1)$.
13. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 4 & \text{si } x = 1 \end{cases}$. $f(1), f(3)$.
14. $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ 5 & \text{si } x = 0 \\ -x + 5 & \text{si } x > 0 \end{cases}$. $f(-3), f(0), f(3)$.
15. $f(x) = \begin{cases} 4x + 1 & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x^3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$. $f(-1), f(0), f(1)$.
16. $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x+2} & \text{si } x < -3 \\ 4 & \text{si } -3 \leq x < 8 \\ x & \text{si } x \geq 8 \end{cases}$. $f(-4), f(2), f(3), f(10)$.

17. $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } 0\leq x\leq 1 \\ 2 & \text{si } x>1 \end{cases}$. $f(-1), f(2)$.

18. $f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x} & \text{si } x\leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } 0<x<4 \\ 6 & \text{si } x=4 \\ x^2 & \text{si } x>4 \end{cases}$. $f(-1), f(-0.1), f(0.1), f(5)$.

19. $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x<0 \\ 2x & \text{si } 0\leq x<2 \\ 3 & \text{si } x=2 \\ 4 & \text{si } x>2 \end{cases}$. $f(-1), f(1), f(2), f(3)$.

20. $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\leq -1 \\ \frac{1}{x^2-1} & \text{si } -1<x<1 \\ 2x & \text{si } 1\leq x<5 \\ 3x & \text{si } x\geq 5 \end{cases}$. $f(-1.1), f(0), f(1), f(6)$.

21. Sea $f:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ una función tal que $f(x^3+4)=3x^2+2x+4$. Calcule $f(5)$.

22. Sea $f:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ una función tal que $f(-x)=5x^2+3x-2$. Determine $f(x)$ para una $x\in\mathbf{R}$ cualquiera.

23. Sea $f:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ una función tal que $f(2x+1)=5x^2+3$. Determine $f(x)$ para una $x\in\mathbf{R}$ cualquiera.

24. Dé un ejemplo de una función $f:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ para la cual $f(x)+f(-x)=0$ para toda $x\in\mathbf{R}$.

25. Dé un ejemplo de una función $f:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ para la cual $f(x)+f(-x)=2$ para toda $x\in\mathbf{R}$.

En los ejercicios 26 al 40, determine el dominio natural de la función indicada.

26. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{3}$.

27. $f(x)=\dfrac{3}{x^2+1}$.

28. $f(x)=\dfrac{x^2-3}{4}$.

29. $f(x)=\dfrac{4}{x^2-3}$.

30. $f(x)=\sqrt{2x+4}$.

31. $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{x}}$.

32. $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{x}}$.

33. $f(x)=\sqrt{x^2-4}$.

34. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

35. $f(x)=\sqrt{2+(x^3-2x+1)^2}$.

36. $f(x)=\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}$.

37. $f(x)=\ln(1-x^2)$.

38. $f(x)=\ln\ln x$.

39. $f(x)=\ln\left(2+\sqrt{3+x^2}\right)$.

40. $f(x) = \ln x^2 + \ln^2 x.$

1.5 GRÁFICAS DE FUNCIONES

Una de las características importantes que tienen las funciones reales de una variable real es que podemos tener representaciones geométricas de ellas, por medio de una curva en el plano cartesiano, que llamaremos gráfica de la función y que definimos a continuación.

Sea $f : D \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función definida en D. La gráfica de la función f es el conjunto de puntos (x, y) en el plano cartesiano, en donde x está en el dominio D de f, y $y = f(x)$. Es decir, gráfica de $f = \{(x, y) : x \in D, y = f(x)\}$.

En otras palabras, la gráfica de una función $f : D \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es la gráfica de la curva $y = f(x)$ en el plano cartesiano xy. Cada punto de esta curva es tal que su primera coordenada es un elemento de x del dominio de la función, y su segunda coordenada es la imagen correspondiente de esa x bajo la función f. Por ejemplo, la gráfica de la función $f(x) = x^2$ es la parábola $y = x^2$ (que es una parábola con vértice en el origen, que abre hacia arriba); los puntos de esta curva son del tipo (x, x^2), en donde x puede ser cualquier número real (pues el dominio de esta función es todo $\mathbf{R}$).

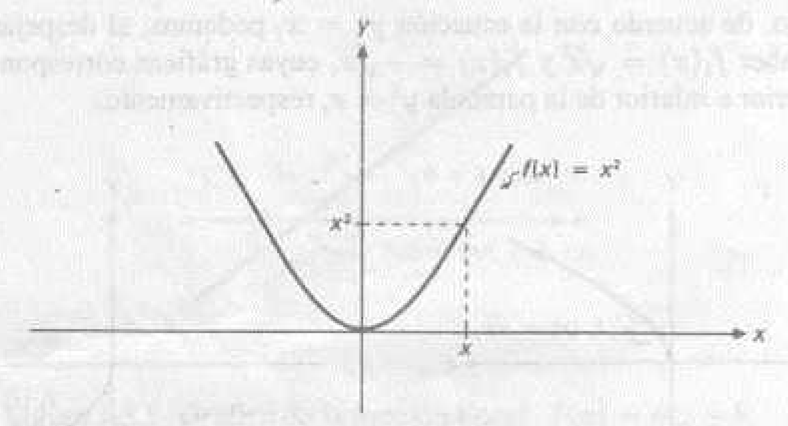


Figura 1.5.1. Gráfica de la función $f(x) = x^2$.

Una característica general que tienen las curvas que representan gráficas de funciones, es que a cada valor de x en el dominio de la función (el cual es un subconjunto del eje de las abscisas) le corresponde *una única* ordenada, a saber, la imagen $y = f(x)$. Ésta es la condición establecida en la definición de función. Este hecho se puede verificar fácilmente si imaginamos rectas verticales (rectas del tipo $x = x_0$) en el plano en donde se encuentra la curva: cada una de estas rectas puede cortar la gráfica de una función cuando mucho una vez.

En efecto, si la x en donde la recta corta el eje de abscisas está en el dominio de la función, tal recta debe cortar la gráfica en un solo punto: la ordenada de ese punto es la *única* imagen $f(x)$ de la mencionada x.

Por ejemplo, la parábola $y^2 = x$ (vértice en el origen, abre hacia la derecha), no puede ser la gráfica de una función $y = f(x)$, pues en la gráfica de esta parábola vemos que las rectas verticales (a la derecha del eje de las ordenadas) cortan la curva en dos puntos. Desde el punto de vista algebraico, podemos explicarnos este hecho de la siguiente manera: si la ecuación $y^2 = x$ representara una función $y = f(x)$, entonces a cada x debería corresponder una única $y = f(x)$. Pongamos por ejemplo $x = 1$. Entonces se debería tener $y^2 = 1$ de donde descubrimos que para tal valor de x existen dos posibilidades para valores de y, a saber $y = 1$ y $y = -1$ (en general, para cualquier $x \geq 0$ existen las dos posibilidades para y, $y = \sqrt{x}$ y $y = -\sqrt{x}$). Así pues, $y^2 = x$ no puede ser una función del tipo $y = f(x)$.

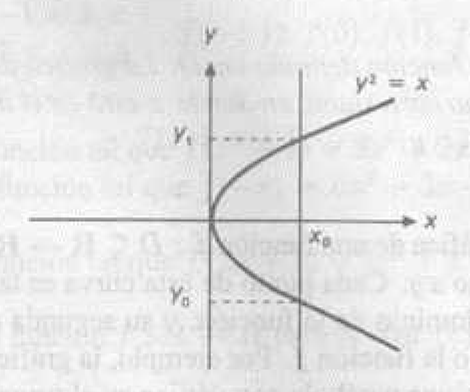


Figura 1.5.2. La parábola $y^2 = x$ no puede ser la gráfica de una función $y = f(x)$.

Sin embargo, de acuerdo con la ecuación $y^2 = x$, podemos, al despejar y, definir dos funciones, a saber $f_1(x) = \sqrt{x}$ y $f_2(x) = -\sqrt{x}$, cuyas gráficas corresponden a las semi-parábolas superior e inferior de la parábola $y^2 = x$, respectivamente.

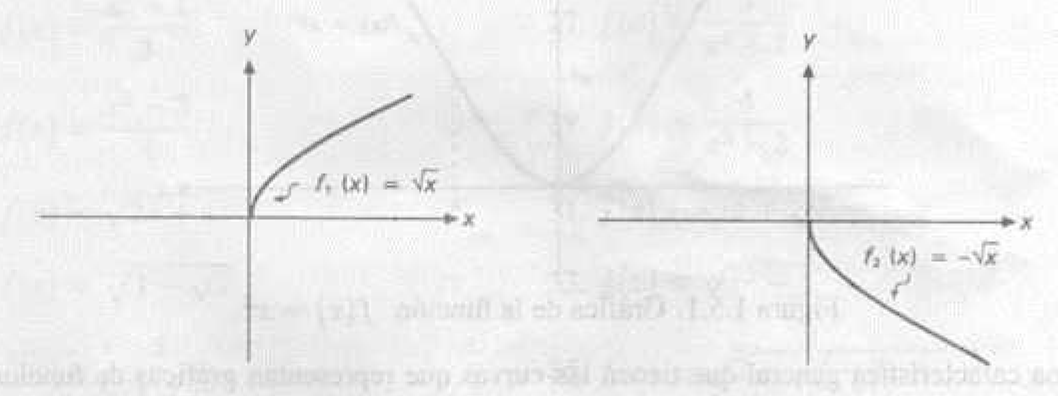


Figura 1.5.3. Gráficas de las funciones $f_1(x) = \sqrt{x}$ y $f_2(x) = -\sqrt{x}$.

Algunas funciones con las que estaremos trabajando constantemente en todo el libro y de las que es importante tener siempre clara su imagen geométrica son:

1. La función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = c$, en donde c es una constante. Esta función la habíamos mencionado ya anteriormente y es llamada **función constante.** Observe que su dominio es todo el conjunto de los números reales, mientras que su rango consiste solamente en el elemento $y = c$. La gráfica de esta función es la de la recta $y = c$, que es horizontal y cruza el eje de ordenadas en el punto $(0, c)$.

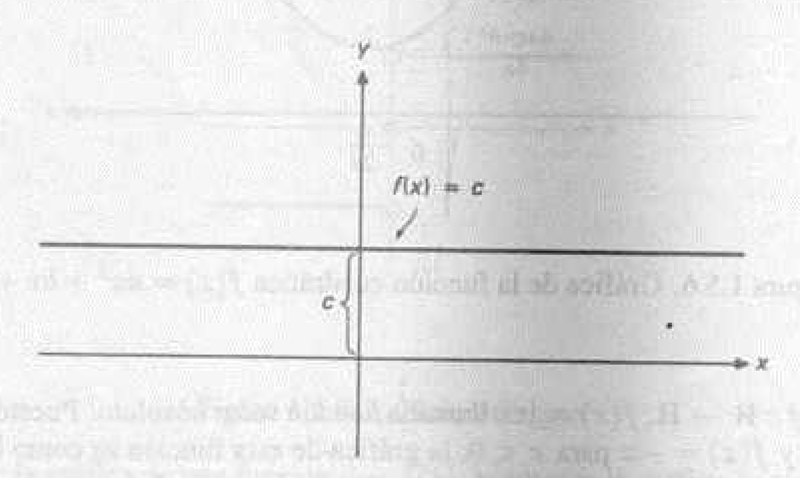


Figura 1.5.4. Gráfica de la función constante $f(x) = c$.

2. La *función lineal* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = mx + b$, en donde $m \neq 0$. Tanto el dominio como el rango de esta función son todos los reales. Su gráfica es la de la recta $y = mx + b$, la cual tiene pendiente m y ordenada al origen b.

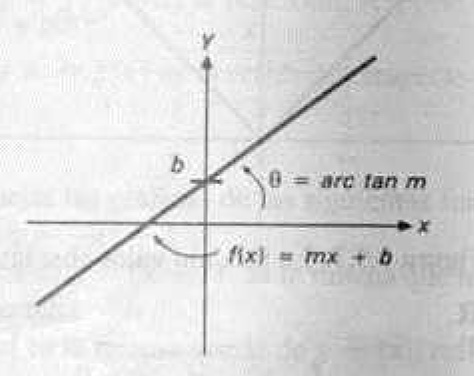


Figura 1.5.5. Gráfica de la función lineal $f(x) = mx + b$.

3. Un caso especial de función lineal es la función $f(x) = x$, llamada *función identidad.* Entonces su gráfica es una recta de pendiente 1 (con ángulo de inclinación de 45°) que pasa por el origen.
4. La función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, en donde $a \neq 0$, llamada *función cuadrática.* Su gráfica es la de la parábola $y = ax^2 + bx + c$, la cual abre hacia arriba si $a > 0$, hacia abajo si $a < 0$, y tiene su vértice en el punto $V = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

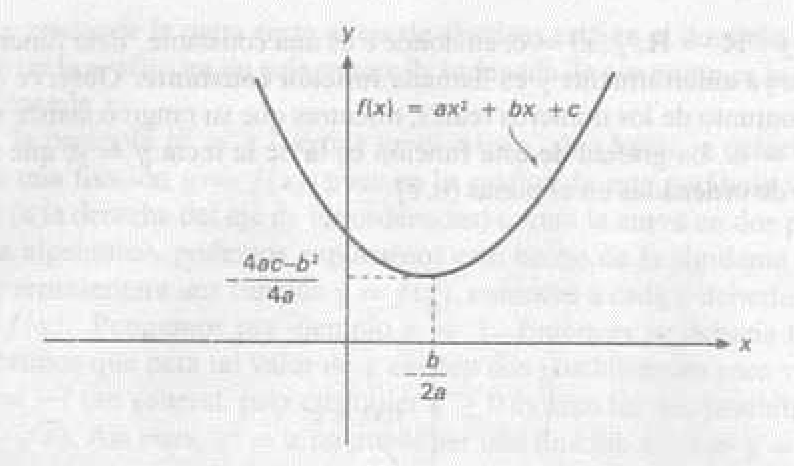


Figura 1.5.6. Gráfica de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$.

5. La función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x|$, llamada *función valor absoluto*. Puesto que $f(x) = x$ para $x \geq 0$ y $f(x) = -x$ para $x < 0$, la gráfica de esta función es como la mostrada en la figura 1.5.8. Puesto que el valor absoluto de un número real es siempre no negativo, el rango de esta función es $\{y \in \mathbf{R} \mid y \geq 0\}$.

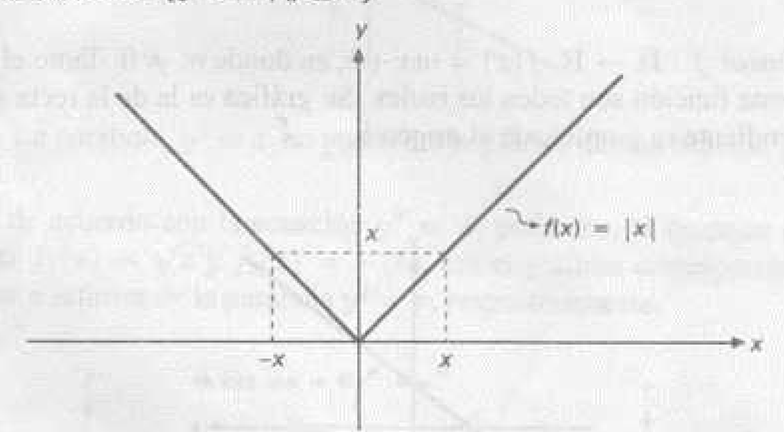


Figura 1.5.7. La función valor absoluto.

6. La función $\operatorname{sgn} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0, \end{cases}$$

es llamada *función signo de* x. Lo que esta función hace con la variable x es una especie de "codificación del signo de x": no le importa el valor que la x tenga, lo que a esta función le interesa es el signo que tenga x, a saber, si x es positiva le asocia el valor $+1$, si es 0 le asocia el valor 0 y si es negativa le asocia el valor -1. Observe que el rango de esta función está formado solamente por tres valores $y = -1, y = 0$ y $y = -1$. Su gráfica se muestra en la figura 1.5.8.

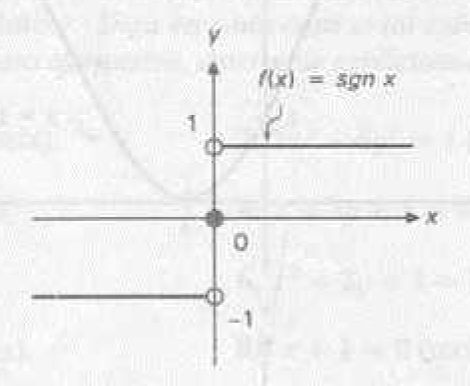


Figura 1.5.8. La función signo.

Si se conoce la gráfica de una función $y = f(x)$, bosquejar la gráfica de alguna "función pariente" (que resulte de una traslación y/o simetría) de la función dada resulta siempre una tarea sencilla, a saber:

- La gráfica de la función $y = f(x - h)$ es la misma gráfica de $y = f(x)$ recorrida ésta h unidades a la derecha si $h > 0$, o h unidades a la izquierda si $h < 0$.
- La gráfica de la función $y = f(x) + k$ es la misma gráfica de $y = f(x)$ recorrida ésta k unidades hacia arriba si $k > 0$, o k unidades hacia abajo si $k < 0$.
- La gráfica de la función $y = f(-x)$ es la reflexión, respecto del eje y, de la gráfica de $y = f(x)$.
- La gráfica de la función $y = -f(x)$ es la reflexión, respecto del eje x, de la gráfica de $y = f(x)$.

EJEMPLO 1.5.1. Bosquejar las gráficas de las siguientes funciones: a) $y = (x - 1)^2$, b) $y = -|x|$, c) $y = -x^3$, d) $y = -x^2 + 3$.

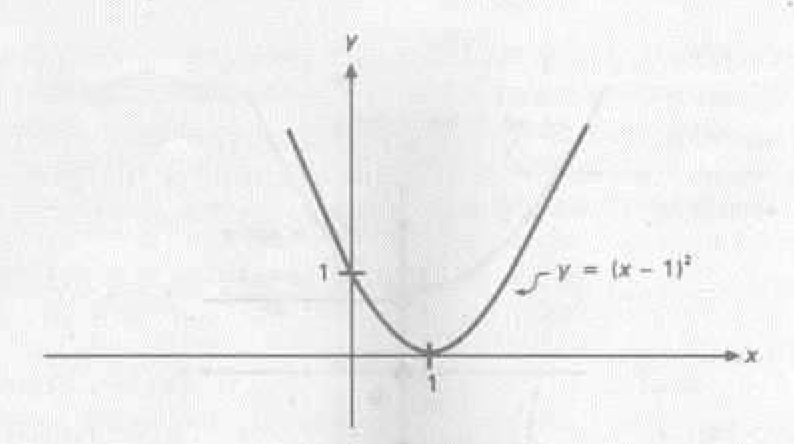
SOLUCIÓN. a) La gráfica de $y = (x - 1)^2$ es la misma que la de $y = x^2$, recorrida esta última una unidad hacia la derecha.

b) La gráfica de $y = -|x|$ es la misma que la de $y = |x|$, reflejada esta última sobre el eje x.

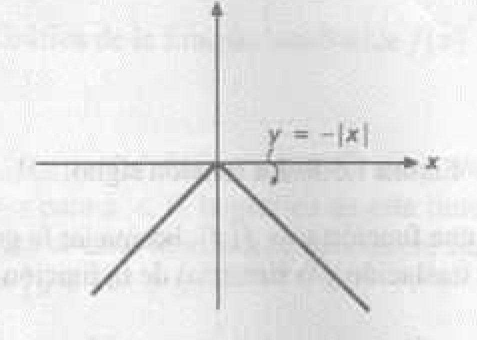
c) La gráfica de $y = -x^3$ es la de la parábola cúbica $y = x^3$, reflejada esta última sobre el eje x. Observe que en este caso $y = -x^3 = (-x)^3$, de modo que también podemos considerar la gráfica de esta función como el reflejo, sobre el eje y, de la parábola cúbica $y = x^3$.

d) La gráfica de $y = -x^2 + 3$ proviene de dos movimientos con la gráfica de la parábola $y = x^2$: primero consideramos su reflejo sobre el eje x para obtener la gráfica de $y = -x^2$, luego desplazamos esta última gráfica 3 unidades hacia arriba, y así obtenemos finalmente la gráfica de $y = -x^2 + 3$.

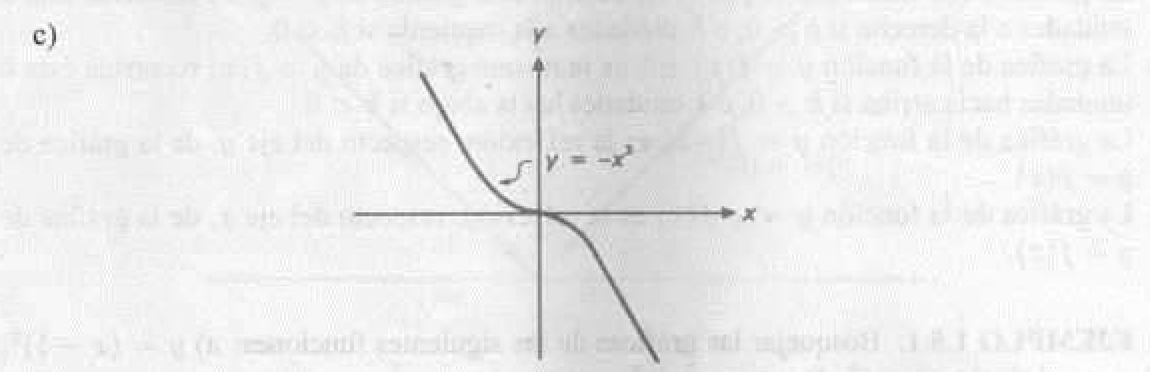
a)



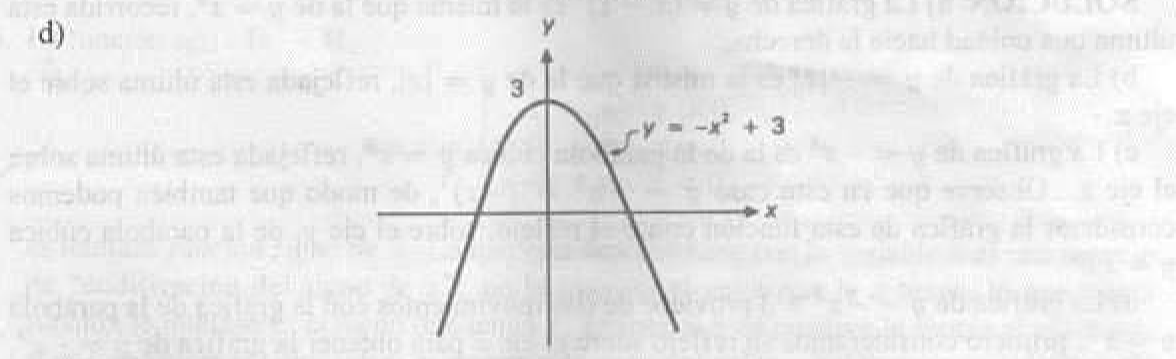
b)



c)



d)



EJERCICIOS (1.5)

En cada uno de los ejercicios 1 al 10 se dan ecuaciones de curvas en el plano (conocidas del curso de geometría analítica). Diga en cada caso si tal curva puede ser la gráfica de una función $y = f(x)$. En caso afirmativo, determine explícitamente la función.

1. $x^2 + y^2 = 3$ (circunferencia).

2. $2x^2 + 6y^2 = 1$ (elipse).

3. $x^2 - 3y^2 = 1$ (hipérbola).

4. $x + 3y - 4 = 0$ (recta).

5. $xy = 4$ (hipérbola).

6. $x^2 + 3y - 1 = 0$ (parábola).

7. $x + 2y^2 - 2 = 0$ (parábola).

8. $x + 1 = 0$ (recta).

9. $y + 1 = 0$ (recta).

10. $(x-1)^2 + y^2 = 4,\ y \geq 0$ (semicircunferencia).

En cada uno de los ejercicios 11 al 20, determine si los puntos p y q dados pertenecen o no a la gráfica de la función indicada.

11. $f(x) = x^2 + 2x,\ p = (0,0),\ q = (1,1)$.
12. $f(x) = 3x + 1,\ p = (-1,2),\ q = (3,5)$.
13. $f(x) = x^2 - 2x - 4,\ p = (0,-4),\ q = (1,-5)$.
14. $f(x) = \sqrt{x^2+1},\ p = (0,1),\ q = (\pi^2,-2)$.
15. $f(x) = \dfrac{1}{2+x^2},\ p = \left(0,\dfrac{1}{2}\right),\ q = \left(\dfrac{5}{4},-2\right)$.
16. $f(x) = \operatorname{sgn}(1+x),\ p = (0,0),\ q = (0,1)$.
17. $f(x) = |2x-5|,\ p = (0,-5),\ q = (0,5)$.
18. $f(x) = |1 - x\,|x||,\ p = (1,0),\ q = (-1,2)$.
19. $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{si } x < 1 \\ 2x & \text{si } x \geq 1 \end{cases},\ p = (0,1),\ q = (3,6)$.
20. $f(x) = \begin{cases} 4x^2+2 & \text{si } x < 0 \\ x^2+3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases},\ p = (\sqrt{2},-1),\ q = (1,1)$.

21. Sea $f(x) = x^2 + 3x + k$. Determine el valor de k para que la gráfica de la función $f(x)$ pase por el punto $(1,2)$.

22. Sea $f(x) = ax + b$. Determine los valores de a y b para que la gráfica de la función $f(x)$ pase por los puntos $(1,1)$ y $(2,2)$.

23. Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$. Determine los valores de a, b y c para que la gráfica de la función $f(x)$ pase por los puntos $(0,0)$, $(1,1)$ y $(2,4)$.

24. Verifique que las gráficas de las funciones $f(x) = x + 3$ y $g(x) = -2x + 1$ se cortan en un punto. Determine tal punto.

25. Verifique que las gráficas de las funciones $f(x) = 1 - x^2$ y $g(x) = x^2 - 1$ se cortan en dos puntos sobre el eje x.

26. Sea $f(x) = \sqrt{x^4 + 2x^2 + 8}$. Verifique que esta función está definida en todo R. Demuestre que ningún punto de la forma $p = (x_0, y_0)$ con $y_0 < 0$ puede pertenecer a la gráfica de la función.

Conocidas las gráficas de las funciones $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = \dfrac{1}{x}$, $y = |x|$ *y* $y = \text{sgn}(x)$, *bosqueje las gráficas de las funciones indicadas en los ejercicios 27 al 40.*

27. $f(x) = (x+2)^2 - 3.$

28. $f(x) = -x^2 + 2.$

29. $f(x) = \sqrt{x+1}.$

30. $f(x) = 2 - \sqrt{x-1}.$

31. $f(x) = (x+1)^3 - 1.$

32. $f(x) = -x^3.$

33. $f(x) = \frac{1}{x+1} + 1.$

34. $f(x) = 2 + \dfrac{1}{3-x}.$

35. $f(x) = \sqrt{-x}.$

36. $f(x) = -\sqrt{-x}.$

37. $f(x) = 4 - \sqrt{-2-x}.$

38. $f(x) = |x-1| + 2.$

39. $f(x) = -|x+1| - 1.$

40. $f(x) = sgn(x-2) + 1.$

41. Sea $f : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función definida en $I \subseteq \mathbf{R}$. Considere la siguiente función $\varphi : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dada por $\varphi(x) = |f(x)|$.

a) Determine el rango de $\varphi(x)$.

b) Verifique que $\varphi(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } x < 0 \\ f(x) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

c) Verifique que la gráfica de $\varphi(x)$ es la misma que la gráfica de $f(x)$ cuando esta última se encuentra por encima del eje x (o coincide con él), mientras que si la gráfica de $f(x)$ se encuentra por debajo del eje x, la gráfica de $\varphi(x)$ es el reflejo, respecto del eje x, de la gráfica de $f(x)$.

En los ejercicios 42 al 50, use el resultado del ejercicio anterior para bosquejar la gráfica de la función dada.

42. $f(x) = |x^2 - 1|.$

43. $f(x) = |sgn(x)|.$

44. $f(x) = sgn\,|x|.$

45. $f(x) = \dfrac{1}{|x|}.$

46. $f(x) = |x^3|.$

47. $f(x) = ||x| - 4|.$

48. $f(x) = 1 - ||x| - 4|.$

49. $f(x) = |1 - ||x| - 4||.$

50. $f(x) = 2 - |1 - ||x| - 4||.$

1.6 OPERACIONES CON FUNCIONES

Vamos a estudiar ahora cómo se pueden efectuar operaraciones entre las funciones para producir otras nuevas. Veremos que estos objetos matemáticos pueden sumarse, multiplicarse, dividirse, y producir así nuevos objetos de esta naturaleza.

Comenzaremos por definir cómo se realiza la suma entre funciones.

Sean $f : D_1 \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *y* $g : D_2 \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *dos funciones definidas en los subconjuntos* D_1 *y* D_2 *de* $\mathbf{R}$, *respectivamente. Se define la suma de* f *y* g, *como la función (llamada función suma de* f *y* g*)* $f + g : D \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *definida en* $D = D_1 \cap D_2$ *y dada por* $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

Así pues, la suma de las funciones f y g es una nueva función $f + g$ cuya imagen en un punto x es la suma de las imágenes de f y g en x. Observe que para poder evaluar la función suma de f y g en un punto x, es necesario poder evaluar las funciones f y g en x, de tal modo que x debe pertenecer tanto al dominio de f como al de g. Es por eso que el dominio de la función suma de f y g es la intersección de los dominios de estas dos funciones.

El producto de dos funciones se define de manera similar.

Sean $f : D_1 \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *y* $g : D_2 \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *dos funciones definidas en los subconjuntos* D_1 *y* D_2 *de* $\mathbf{R}$, *respectivamente. Se define el producto de* f *y* g, *como la función (llamada función producto de* f *y* g*)* $fg : D \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *definida en* $D = D_1 \cap D_2$ *y dada por* $(fg)(x) = f(x)g(x)$.

Como en el caso de la función suma, la función producto de f y g se define como la función cuya imagen en el punto x es el producto de las imágenes de f y g en ese punto. Para poder calcular estas últimas, es necesario que la x se encuentre en el dominio de f y en el de g. Es decir, al igual que la función suma, la función producto tiene por dominio a la intersección de los dominios de las funciones involucradas.

En el caso del cociente, la definición es similar a las dadas anteriormente para la suma y para el producto ("imagen por imagen"), sólo que en este caso el dominio de la función cociente presenta una restricción adicional: debemos eliminar la posibilidad de que el denominador de la nueva función sea cero.

Sean $f : D_1 \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *y* $g : D_2 \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *dos funciones definidas en los subconjuntos* D_1 *y* D_2 *de* $\mathbf{R}$, *respectivamente. Se define el cociente de* f *entre* g, *como la función (llamada función cociente de* f *entre* g*)* $\dfrac{f}{g} : D \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *definida en* $D = D_1 \cap D_2 - \{x \in D_2 : g(x) = 0\}$ *y dada por*

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 1.6.1. Considere las funciones $f(x) = x^2 + 3$ y $g(x) = x + 4$. Determine las funciones suma $f + g$, producto fg y cocientes $\frac{f}{g}$ y $\frac{g}{f}$, indicando los dominios de ellas.

SOLUCIÓN. Observe que tanto f como g están definidas en todos los reales, de modo que las funciones suma y producto estarán también definidas en todo $\mathbf{R}$ (la intersección de $\mathbf{R}$ con $\mathbf{R}$). Estas funciones son:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (x^2 + 3) + (x + 4) = x^2 + x + 7$$

y

$$(fg)(x) = f(x)\, g(x) = (x^2 + 3)(x + 4) = x^3 + 4x^2 + 3x + 12.$$

La función cociente $\frac{f}{g}$ es:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 + 3}{x + 4}.$$

El dominio de esta función es $\mathbf{R}$, excepto aquellas x que anulen el denominador. Observe que $x + 4 = 0$ para $x = -4$. Así pues, el dominio de la función cociente $\frac{f}{g}$ es $\mathbf{R} - \{-4\}$.

La función cociente $\frac{g}{f}$ es:

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x + 4}{x^2 + 3}.$$

El dominio de esta función es $\mathbf{R}$ excepto aquellas x que anulen el denominador. Observe que en este caso la ecuación $x^2 + 3 = 0$ no tiene raíces (reales). Así, el dominio de la función cociente $\frac{g}{f}$ es todo el conjunto de los números reales.

⋆

EJEMPLO 1.6.2. Considere las funciones $f(x) = \sqrt{x+3}$ y $g(x) = \sqrt{5-x}$. Determine las funciones suma $f + g$, producto fg y cocientes $\frac{f}{g}$ y $\frac{g}{f}$, indicando sus dominios.

SOLUCIÓN. El dominio de la función f (llamémoslo D_1) está formado por las x para las cuales $x + 3 \geq 0$. Es decir, $D_1 = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq -3\}$. El dominio de la función g, (llamémoslo D_2) está formado por las x para las cuales $5 - x \geq 0$. Es decir, $D_2 = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 5\}$. La intersección de estos dominios es:

$$D_1 \cap D_2 = \{x \in \mathbf{R} \mid -3 \leq x \leq 5\} = [-3, 5],$$

(el intervalo compacto $[-3, 5]$). Éste será el dominio de las funciones suma y producto, las cuales son:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x+3} + \sqrt{5-x}$$

y

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = \sqrt{x+3}\sqrt{5-x}.$$

La función cociente $\frac{f}{g}$ es:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{5-x}},$$

cuyo dominio es el intervalo compacto $[-3,4]$ excepto aquellas x que anulan al denominador. El denominador se hace cero en $x = 5$. Así, el dominio de esta función es el intervalo semiabierto $[-3,5)$. De manera análoga obtenemos que la función cociente $\frac{g}{f}$ es

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{x+3}},$$

y que su dominio es el intervalo semiabierto $(-3,5]$.

Otra operación muy importante que se puede realizar entre las funciones es la composición:

Sean $f : D_1 \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ y $g : D_2 \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dos funciones definidas en los subconjuntos de $\mathbf{R}$ D_1 y D_2, tales que $g(D_2) = \{y \in \mathbf{R} \mid y = g(x), x \in D_2\} \subseteq D_1$. Se define la composición de f con g, como la función (llamada función compuesta de f con g) $f \circ g : D \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Observe la restricción que se establece en la definición anterior sobre los dominios de las funciones f y g. Para poder evaluar la función compuesta $f \circ g$ en un punto x, debemos evaluar primero la función g en x, lo cual nos impone de inmediato la restricción de que tal x debe pertenecer al dominio de g. Sin embargo, esta restricción no es suficiente, pues en la siguiente etapa, para obtener la imagen $(f \circ g)(x)$, debemos evaluar la función f en $g(x)$, lo cual es posible solamente si $y = g(x)$ pertenece al dominio de f. Así pues, el dominio de la función compuesta $f \circ g$ está formado por aquellas x que pertenezcan al dominio de g, tales que $y = g(x)$ pertenezca al dominio de f. Es por eso que en la definición anterior se pide que las imágenes de g (el conjunto $g(D_2)$) pertenezcan al dominio de la función f (es decir, que el conjunto $g(D_2)$ sea un subconjunto de D_1).

La operación de componer funciones la podemos pensar como una "sustitución de una función en otra" (o más precisamente, como una sustitución de las imágenes de una función en la variable independiente de otra): la composición de la función $f(x)$ con la función $g(x)$ no es más que "sustituir, en la x de f, a la función $g(x)$". Por ejemplo, si $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x+3$, la función compuesta $f \circ g$ la obtenemos cambiando la x en $f(x)$ por $g(x)$, y entonces resulta que:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x+3) = (2x+3)^2.$$

Esquemáticamente podemos ver a la composición de funciones como se muestra en la figura 1.6.1.

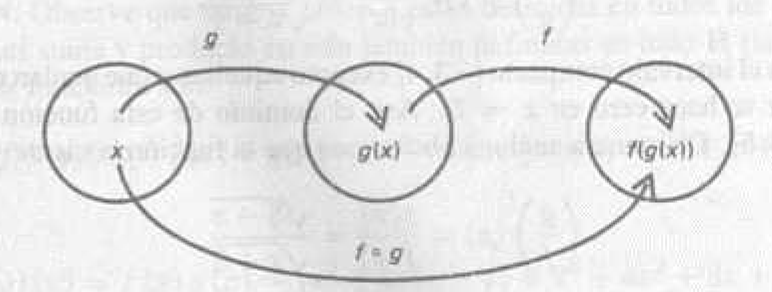


Figura 1.6.1. La composición de la función f con la función g.

Retomando la manera de ver a las funciones como funciones-máquinas, podemos entender la operación de composición como un "enchufar una máquina con otra": con el ejemplo mencionado anteriormente, tenemos la función $f(x) = x^2$, la cual es una máquina que recibe *equis* y las eleva al cuadrado. La función $g(x) = 2x + 3$ es una máquina que recibe *equis*, las multiplica por 2 y luego suma 3. Componer la función f con la función g, no consiste más que en enchufar la máquina de g con la de f: le alimentamos a f la producción de g.

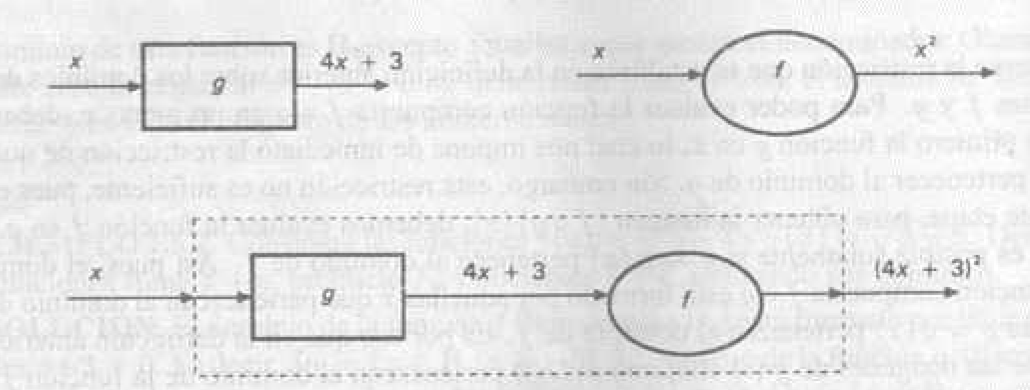


Figura 1.6.2. La composición de funciones consiste en enchufar dos máquinas.

Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 1.6.3. Considere las funciones $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ y $g(x) = x - 2$. Describa las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$, así como los dominios de éstas.

SOLUCIÓN. Tanto f como g tienen por dominio a todos los reales. En este caso no hay restricción alguna para los dominios de las funciones compuestas: será también el conjunto de los reales. Tenemos entonces que:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-2) = 3(x-2)^2 - 2(x-2) + 1 = 3x^2 - 14x + 17$$

y

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x^2 - 2x + 1) = (3x^2 - 2x + 1) - 2 = 3x^2 - 2x - 1.$$

★

En el ejemplo anterior se muestra una de las características que tiene la operación de composición de funciones: es una operación no conmutativa (al contrario de la suma y producto de funciones, las cuales son operaciones conmutativas). Es decir, en general se obtienen resultados distintos al componer la función f con la función g, y al componer la función g con la función f. Más aún, se puede dar el caso de funciones f y g para las cuales la función $f \circ g$ exista, no así la composición $g \circ f$ (considere por ejemplo las funciones $f(x) = -|x| - 3$ y $g(x) = \sqrt{x}$).

La idea de componer dos funciones se puede extender a tres o más funciones. Por ejemplo, si f, g y h son tres funciones dadas, su composición $f \circ g \circ h$ es la función dada por $(f \circ g \circ h)(x) = (fg(h(x)))$ en cuyo dominio se encontrarán las x del dominio de h tales que $h(x)$ se encuentre en el dominio de g, y tales que $g(h(x))$ se encuentre en el dominio de f.

EJEMPLO 1.6.4. Considere las funciones $f(x) = \sqrt{x-1}$ y $g(x) = 3x + 1$. Describa las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$, así como los dominios de éstas.

SOLUCIÓN. La función $f \circ g$ es:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x+1) = \sqrt{(3x+1) - 1} = \sqrt{3x}.$$

De la fórmula que describe a esta función es claro que su dominio son los reales no negativos. En este conjunto se deben encontrar las x del dominio de g (que es todo el conjunto R), tales que $g(x) = 3x + 1$ se encuentra en el dominio de f (que son los reales mayores iguales que 1). Es decir, las x del dominio de la composición $f \circ g$ son las $x \in \mathbf{R}$ tales que $3x + 1 \geq 1$. La solución de esta desigualdad son justamente los reales no negativos.

La composición $g \circ f$ es:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x-1}\right) = 3\sqrt{x-1} + 1,$$

cuyo dominio es el conjunto $\{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 1\}$.

★

EJEMPLO 1.6.5. Considere las funciones $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $g(x) = 1 + x^2$ y $h(x) = x - 3$. Describa las funciones $f \circ f$ y $f \circ g \circ h$.

SOLUCIÓN. Se tiene:

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x}{1+x^2}\right) = \frac{\frac{x}{1+x^2}}{1 + \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2} = \frac{x(1+x^2)}{x^4 + 3x^2 + 1},$$

y

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))) = f(g(x-3))$$

$$= f\left(1+(x-3)^2\right) = \frac{1+(x-3)^2}{1+[1+(x-3)^2]^2} = \frac{x^2-6x+10}{1+[x^2-6x+10]^2}.$$

★

Al operar con funciones definidas de manera distinta para distintos intervalos, es necesario tener un cuidado especial. Los siguientes tres ejemplos muestran situaciones concretas de este tipo.

EJEMPLO 1.6.6. Considere las funciones $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dadas por:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} 4x-2 & \text{si } x < 1 \\ 5x+1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Determine las funciones suma $f+g$ y producto fg.

SOLUCIÓN. Debemos de considerar los intervalos en donde las funciones "cambian de fórmula". Observe que para $x < 0$ se tiene $f(x) = x$ y $g(x) = 4x - 2$. De modo que la función suma es, en este intervalo,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x + 4x - 2 = 5x - 2,$$

y la función producto es:

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = x(4x-2) = 4x^2 - 2x.$$

Cuando $x \geq 0$ y $x < 1$, se tiene $f(x) = x^2$ y $g(x) = 4x - 2$. Entonces, para $0 \leq x < 1$ se tiene:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 4x - 2,$$

y

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = x^2(4x-2) = 4x^3 - 2x^2.$$

Finalmente, para $x \geq 1$ se tiene $f(x) = x^2$ y $g(x) = 5x + 1$, de modo que para tales x se tiene:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 5x + 1,$$

y

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = x^2(5x+1) = 5x^3 + x^2.$$

En resumen, se tiene:

$$(f+g)(x) = \begin{cases} 5x-2 & \text{si } x < 0 \\ x^2+4x-2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x^2+5x+1 & \text{si } x \geq 1, \end{cases}$$

y

$$(fg)(x) = \begin{cases} 4x^2 - 2x & \text{si} \quad x < 0 \\ 4x^3 - 2x^2 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 5x^3 + x^2 & \text{si} \quad x \geq 1. \end{cases}$$

⋆

EJEMPLO 1.6.7. Considere las funciones $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dadas por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x^2 + 3 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = x + 1.$$

Determine la función compuesta $f(g(x))$.

SOLUCIÓN. Según la definición de la función $f(x)$ (y de la operación de composición de funciones), tenemos que:

$$f(g(x)) = \begin{cases} g(x) + 3 & \text{si} \quad g(x) < 0 \\ 2g^2(x) + 3 & \text{si} \quad g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Observe que $g(x) = x + 1 < 0$ para $x < -1$ y $g(x) = x + 1 \geq 0$ para $x \geq -1$. Entonces, la función compuesta $f(g(x))$ nos queda como:

$$f(g(x)) = \begin{cases} x + 4 & \text{si} \quad x < -1 \\ 2(x+1)^2 + 3 & \text{si} \quad x \geq -1. \end{cases}$$

⋆

EJEMPLO 1.6.8. Considere las funciones $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dadas por:

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 4 & \text{si} \quad x < 0 \\ 3x^2 + x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 - 1 & \text{si} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Determine la función compuesta $f(g(x))$.

SOLUCIÓN. Como en el ejemplo anterior, apoyados por las definiciones de $f(x)$, $g(x)$ y de la operación de composición de funciones, procedemos directamente a escribir:

$$f(g(x)) = \begin{cases} 5g(x) + 4 & \text{si} \quad g(x) < 0 \\ 3g^2(x) + g(x) & \text{si} \quad g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Ahora debemos tener mucho cuidado al sustituir la función $g(x)$. La gráfica de ésta nos puede ayudar a ver con más claridad que:

a) $g(x) < 0$ para $x < 1$. En tal caso se tiene $g(x) = x - 1$ si $x < 0$ y $g(x) = x^2 - 1$ si $0 \leq x < 1$.

b) $g(x) \geq 0$ para $x \geq 1$. En tal caso se tiene $g(x) = x^2 - 1$.

Entonces:

$$f(g(x)) = \begin{cases} 5g(x)+4 & \text{si } x<1 \\ 3g^2(x)+g(x) & \text{si } x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 5(x-1)+4 & \text{si } x<0 \\ 5(x^2-1)+4 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 3(x^2-1)+x^2-1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

★

Una operación a la que frecuentemente recurriremos en este curso, cuando estudiemos el cálculo de derivadas de funciones compuestas (en el capítulo 6), será la "descomposición de funciones": al ver una función deberemos ser capaces de identificarla como la composición de funciones más simples. Esta idea se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1.6.9. Considere la función $f(x) = \sqrt[5]{5+(2x+1)^2}$. Determine cinco funciones f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 tales que $f = f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$.

SOLUCIÓN. Al leer la fórmula que define a $f(x)$ vemos que lo primero que ocurre con x para llegar a su imagen bajo f es una multiplicación por 2. Definamos entonces $f_1 = 2x$. La segunda etapa que descubrimos en la fórmula de $f(x)$ es que a $f_1(x) = 2x$ se le suma un 1. Hagamos de este proceso una nueva función (la cual se aplicará sobre $f_1(x)$), es decir, definamos $f_2(x) = x+1$. Tenemos en este momento que $(f_2 \circ f_1)(x) = 2x+1$. Este último resultado lo debemos elevar al cuadrado. Definimos entonces $f_3(x) = x^2$, teniendo ahora que $(f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x) = (2x+1)^2$. Hagamos ahora que $f_4(x) = 5+x$, y finalmente $f_5 = \sqrt[5]{x}$, y obtenemos así el resultado deseado. En resumen, hemos "descompuesto" la función dada $f(x)$ como (la composición de) las cinco funciones simples $f_1(x) = 2x$, $f_2(x) = x+1$, $f_3(x) = x^2$, $f_4(x) = 5+x$, $f_5 = \sqrt[5]{x}$. Observe que el proceso de descomponer la función $f(x)$ en funciones más simples no es único: podríamos haberla descompuesto como $f = g_3 \circ g_2 \circ g_1$, en donde $g_1(x) = 2x+1$, $g_2 = x^2$, $g_3 = \sqrt[5]{5+x}$.

★

EJEMPLO 1.6.10. Considere la función $F(x) = 4 + \sqrt{1+\cos^2(x^6+3)}$. Escriba esta función como una composición de funciones más simples.

SOLUCIÓN. Comenzamos a ver qué es lo que hace la función con x para obtener su imagen $f(x)$: 1) primero la x se eleva a la sexta potencia; definimos entonces $f_1(x) = x^6$; 2) al resultado del paso anterior se le suma tres; definimos entonces $f_2(x) = 3+x$; 3) a la composición de los pasos anteriores se le toma la función coseno; definimos entonces $f_3(x) = \cos x$; 4) la composición de los pasos anteriores se eleva al cuadrado; definimos $f_4(x) = x^2$; 5) a la composición de los pasos anteriores se le suma 1; definimos $f_5(x) = 1+x$; 6) a la composición de los pasos anteriores se le saca raíz cuadrada; definimos $f_6(x) = \sqrt{x}$; 7) a la composición de los pasos anteriores se le suma cuatro; definimos $f_7(x) = 4+x$. Tenemos que las siete funciones $f_1(x) = x^6$, $f_2(x) = x+3$, $f_3(x) = \cos x$, $f_4(x) = x^2$, $f_5(x) = 1+x$, $f_6(x) = \sqrt{x}$ y $f_7(x) = 4+x$, son tales que $F(x) = (f_7 \circ f_6 \circ f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x)$.

★

EJERCICIOS (1.6)

En cada uno de los ejercicios del 1 al 10, suponga que $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ son funciones tales que $f(2) = 3$, $g(2) = -3$ y $h(2) = 4$. Determine en cada caso la imagen indicada.

1. $(f + 2g)(2)$.

2. $f(2)(1 + 2g(2))$.

3. $(1 + f(2))(f + g)(2)$.

4. $(fgh)(2)$.

5. $g(2)(f(x) + h(2))$.

6. $(f + g)(2)(f + g)(x)$.

7. $\left(\dfrac{f}{g + h}\right)(2)$.

8. $(f^2 + g^2 + h^2)(2)$.

9. $\left(\dfrac{2f^2 - 3g}{4g - h^2}\right)(2)$.

10. $\left(\dfrac{(3f + g)(2)}{4h(2)}\right)f(x)$.

Los ejercicios 11 al 25, se refieren a las funciones $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = 2 - x^2$, $h(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$. *Determine en cada caso la imagen indicada.*

11. $(f + 2g)(0)$.

12. $(g^2 + h)(1)$.

13. $(f + g + 2h)(2)$.

14. $(fgh)(-1)h(-1 - x^2)$.

15. $(f^2 + h^2)(0)(g + f)(2x)$.

16. $\left(\dfrac{f + g}{f - g}\right)(h(1))$.

17. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(h(h(1)))$.

18. $f(1 + g(2))$.

19. $g(2 - f(1))$.

20. $f(1 + g(1 + h(1)))$.

21. $f(1 + h(1 + x^2))$.

22. $g(2 - f(1 - h(0)))$.

23. $(3f + 2g)(5g + 3h)(f(1 + f(-1)))$.

24. $\dfrac{f(g(h(1)))}{f(g(h(0)))}$.

25. $\left(\dfrac{f(g(h(-1)))}{g(f(h(0)))}\right)\dfrac{g(h(1 + x^4))}{f(h(-1 - x^4))}$.

Para cada una de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ dadas en los ejercicios 26 al 35, determine:
a) la función suma $(f + g)(x)$,
b) la función producto $(fg)(x)$,
c) la función cociente $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$,
d) la función compuesta $(f \circ g)(x)$,

e) la función compuesta $(g \circ f)(x)$,
así como el dominio de cada una de ellas.

26. $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = x^2 - 4$.

27. $f(x) = x^3$, $g(x) = 2x^2$.

28. $f(x) = x^3$, $g(x) = x^4 - 1$.

29. $f(x) = x + 2$, $g(x) = x + 3$.

30. $f(x) = 3x + 5$, $g(x) = 7x - 2$.

31. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$.

32. $f(x) = \sqrt{x + 4}$, $g(x) = \sqrt{5 - x}$.

33. $f(x) = sgn(x)$, $g(x) = x^2$.

34. $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{2}{x}$.

35. $f(x) = 1 - x^2$, $g(x) = |x|$.

Para cada una de las funciones $f(x)$ *y* $g(x)$ *dadas en los ejercicios 36 al 45, determine:*
a) la función suma $(f + g)(x)$,
b) la función producto $(fg)(x)$,
c) la función compuesta $f(g(x))$.

36. $f(x) = \begin{cases} 4x + 3 & \text{si } x < 1 \\ x^3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, $g(x) = x + 2$.

37. $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = x^2 - 1$.

38. $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ 5x + 4 & \text{si } x > 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ -x + 2 & \text{si } x > 0. \end{cases}$

39. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < -1 \\ 4x + 4 & \text{si } x \geq -1. \end{cases}$

40. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ -x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

41. $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x < -1 \\ 5x & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 4x - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, $g(x) = 5 - 2x$.

42. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x^3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, $g(x) = x^2 + 2$.

43. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x^3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, $g(x) = x^2 - 2$.

44. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < -1 \\ x^3 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

45. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < -1 \\ x^4 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < -1 \\ x^5 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$

46. Sean $f(x) = x^r$, $g(x) = x^s$ y $h(x) = x^t$, en donde $r, s, t \in \mathbf{N}$. Determine las funciones compuestas $(f \circ g \circ h)(x)$, $(g \circ f \circ h)(x)$, $(g \circ h \circ f)(x)$ y $(f \circ h \circ g)(x)$.

47. Sea $f(x) = \frac{1}{x}$. Determine la función compuesta $(f \circ f)(x)$. ¿En dónde está definida esta función? (Nota: la respuesta no es "en todos los reales".)

48. Si $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, determine $(f \circ f \circ f)(x)$. ¿En dónde está definida esta función?

49. Dé un ejemplo de una función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ para la cual $f^2(x) = (f \circ f)(x)$ para toda $x \in \mathbf{R}$.

50. Si $f(x) = c$ (una función constante), y $g(x)$ es una función cualquiera (definida en $\mathbf{R}$), describa las composiciones $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

51. Si $f(x) = x$ (la función identidad), y $g(x)$ es una función cualquiera (definida en $\mathbf{R}$), describa las composiciones $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

En cada uno de los ejercicios del 52 al 60, determine al menos 5 funciones f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 *tales que* $F(x) = (f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4 \circ f_5)(x)$.

52. $F(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}}$.

53. $F(x) = 2\left(1 + \left(4 + \frac{1}{x}\right)^{-1}\right)^{-2}$.

54. $F(x) = 3\sqrt{4 + 2\left(1 + \sqrt{4 + 5x^2}\right)^3}$.

55. $F(x) = \ln\left(2 + \ln^2(1 + x^2)\right)$.

56. $F(x) = 2 + \ln^2\left(1 + \sqrt{4 + 3x^2}\right)$.

57. $F(x) = \ln(1 + \ln(1 + \ln x))$.

58. $F(x) = \sqrt{1 + \sqrt[3]{2 + \sqrt[4]{3 + x}}}$.

59. $F(x) = \left(1 + \left(2 + \sqrt{3 + x^2}\right)^4\right)^5$.

60. $F(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3 + \ln^4(3 + 2x^4)}$.

1.7 ALGUNOS TIPOS DE FUNCIONES

Algunas funciones poseen características especiales comunes que permiten agruparlas y llamarlas de algún modo específico. En esta sección presentamos la nomenclatura con la que trabajaremos en el curso, referente a algunas de las características mencionadas de las funciones.

Una función $f : D \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *se dice que es algebraica, si las operaciones que la función hace con la variable* x*, para obtener su imagen* $f(x)$ *son solamente algebraicas (sumar, restar, multiplicar, dividir, elevar a potencias, extraer raíces). En caso contrario se dice que la función es trascendente.*

Una presentación "matemáticamente decente" de las funciones exponenciales y logarítmicas requiere del manejo de las ideas del Cálculo. En el capítulo 14 (ejercicio 33 de la sección 5) bosquejaremos una de las maneras en que puede hacerse. Sin embargo aunque de manera intuitiva, queremos aprovechar desde un comienzo estas funciones, así como las funciones inversas, para que las ideas del Cálculo que vayamos desarrollando, las veamos en marcha en todos estos tipos de funciones trascendentes que aparecen muy frecuentemente en las aplicaciones. En particular, veremos que las funciones exponenciales aparecerán en las importantes aplicaciones de la integral que se estudian en el capítulo 15.

Atendiendo a las propiedades de simetría que pueda tener la gráfica de una función, éstas se clasifican como funciones pares y funciones impares.

Sea $f : D \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función definida en un subconjunto D de $\mathbf{R}$ simétrico con respecto del cero. Se dice que esta función es par, si $f(-x) = f(x)$ para toda $x \in D$, y se dice que tal función es impar si $f(-x) = -f(x)$ para toda $x \in D$.

Así, una función es par cuando al sustituir en ella x por $-x$ la expresión de la función queda igual. De otro modo, la función es par cuando las imágenes de x y de $-x$ coinciden. Desde el punto de vista geométrico, esta propiedad nos dice que si (a, b) es un punto de la gráfica de una función par, entonces el punto $(-a, b)$ pertenecerá también a la gráfica de la función. Este hecho nos indica que la gráfica presenta una simetría respecto del eje de ordenadas. Un ejemplo típico de función par es $f(x) = x^2$, cuya gráfica es, como sabemos, una parábola que abre hacia arriba con vértice en el origen, la cual, efectivamente, es una curva simétrica respecto del eje de ordenadas.

En el caso de que una función sea impar, el efecto en la fórmula que define a $f(x)$, al sustituir la x por $-x$, es un cambio de signo. Desde el punto de vista geométrico, tal propiedad indica que si (a, b) es un punto de la gráfica de una función impar, entonces también $(-a, -b)$ será un punto de tal gráfica, de donde se desprende que la gráfica de una función impar presenta una simetría respecto del origen de coordenadas en el plano cartesiano. Ejemplos típicos de funciones impares son $f(x) = x^3$ y $f(x) = \frac{1}{x}$ cuyas gráficas son efectivamente simétricas respecto del origen.

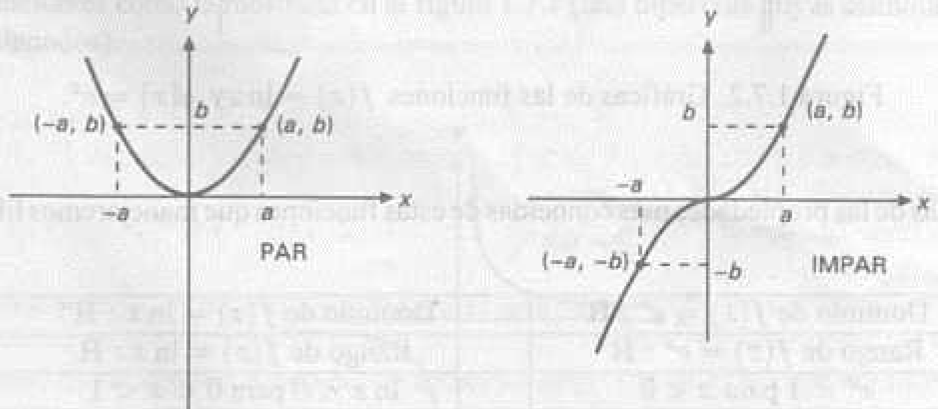


Figura 1.7.3. Una función par y una impar.

EJERCICIOS (1.7)

1. La función $f(x) = x^2$ es ____________ (¿algebraica, trascendente?)

2. La función $f(x) = 2^x$ es ____________ (¿algebraica, trascendente?)

3. ¿Verdadero, falso? Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones algebraicas, entonces su suma $F(x) = f(x) + g(x)$ es una función algebraica.

4. ¿Verdadero, falso? Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones trascendentes, entonces su suma $F(x) = f(x) + g(x)$ es una función trascendente.

5. Determine si la función dada es par, impar o ninguna de las dos.

a) $f(x) = 3x^2 + 4$.

b) $f(x) = 1$.

c) $f(x) = x$.

d) $f(x) = \dfrac{4}{x-2}$.

e) $f(x) = x^3 + x + 2$.

6. Verifique que la función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 0$ (llamada —por razones obvias— *función cero*) es par e impar a la vez.

7. Sea $f : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función cualquiera, definida en el conjunto I de $\mathbf{R}$, simétrico respecto del origen.

a) Demuestre que la función $\varphi(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ es par.

b) Demuestre que la función $\psi(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$ es impar.

c) Verifique que $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$. Concluya que toda función (como la función $f(x)$ dada) se puede escribir como la suma de una función par más una impar.

8. ¿Cómo es la descomposición del inciso c) del ejercicio anterior en el caso de que la función $f(x)$ dada sea par?

9. ¿Cómo es la descomposición del inciso c) del ejercicio 7 en el caso de que la función $f(x)$ dada sea impar?

10. Escriba la función $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 4$ como la suma de una función par más una impar.

11. Escriba la función $f(x) = 2^x$ como la suma de una función par más una impar.

12. Demuestre que si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones pares, entonces su suma $F(x) = f(x) + g(x)$ es una función par.

13. Demuestre que si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones impares, entonces su suma $F(x) = f(x) + g(x)$ es una función impar.

14. Demuestre que si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones pares, entonces su producto $F(x) = f(x)g(x)$ es una función par.

15. Demuestre que si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones impares, entonces su producto $F(x) = f(x)g(x)$ es una función par.

16. Demuestre que si $f(x)$ es una función par y $g(x)$ es una función impar, entonces su producto $F(x) = f(x)g(x)$ es una función impar.

17. Demuestre que si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones pares, entonces su cociente $F(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ es una función par.

18. Demuestre que si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones impares, entonces su cociente $F(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ es una función par.

19. Demuestre que si $g(x)$ es una función par, y $f(x)$ es una función cualquiera (para la cual hace sentido la composición $f \circ g$), entonces la composición $F(x) = (f \circ g)(x)$ es una función par.

1.8 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

En esta sección haremos un breve estudio de las funciones trigonométricas, pues serán muy usadas en todo el libro. Aprovecharemos para obtener algunas de las identidades trigonométricas que más emplearemos en el capítulo de límites y en el de técnicas de integración.

Consideremos el círculo $x^2 + y^2 = 1$ (con centro en el origen y radio 1), llamado círculo unitario, y en él tomemos un punto P. El radio $\overline{OP}$ forma un ángulo t (medido en radianes: recuerde que 360 grados corresponden a 2π radianes), respecto de la parte positiva del eje x. Convenimos en que este ángulo será positivo, si es medido en dirección antihoraria (en sentido contrario a las manecillas del reloj), y negativo, si es medido en dirección horaria (en sentido de las manecillas del reloj).

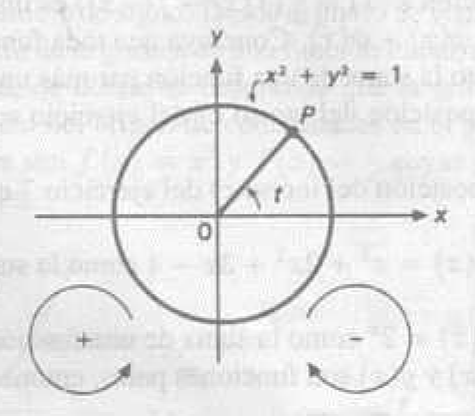


Figura 1.8.1. El ángulo t, el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$, y la convención de signos con el que se mide este ángulo.

Se definen las funciones trigonométricas (o circulares) ***seno y coseno*** *del ángulo t denotadas por* sen *y* cos, *respectivamente, como:*

$$\text{sen} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad \text{sen}\, t = \text{ordenada del punto } P$$

y

$$\cos : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad \cos t = \text{abscisa del punto } P.$$

Es decir, las funciones cos y sen asocian a un ángulo $t \in \mathbb{R}$ (en radianes), las coordenadas (la abscisa y la ordenada, respectivamente) del punto P en el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$, cuyo radio $\overline{OP}$ forma un ángulo t con la parte positiva del eje x. En otras palabras: los puntos P del círculo unitario tienen por coordenadas a $(\cos t, \operatorname{sen} t)$, en donde t es el ángulo que forma el radio $\overline{OP}$ con la parte positiva del eje x.

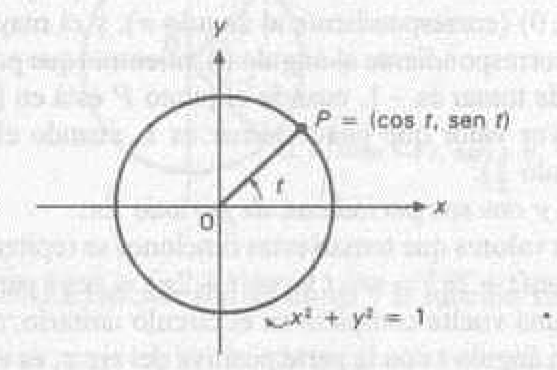


Figura 1.8.2. La definición de las funciones seno y coseno de un ángulo t: las coordenadas de un punto en el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$.

Por ejemplo, poniendo el punto P en cada uno de los cuatro cortes del círculo $x^2 + y^2 = 1$ con los ejes coordenados (como se muestra en la figura 1.8.3), obtenemos directamente que:

Ángulo	Correspondiente al punto P de coordenadas ...	cos	sen
0	$(1, 0)$	1	0
$\frac{\pi}{2}$	$(0, 1)$	0	1
π	$(-1, 0)$	-1	0
$\frac{3\pi}{2}$	$(0, -1)$	0	-1
2π	$(1, 0)$	1	0

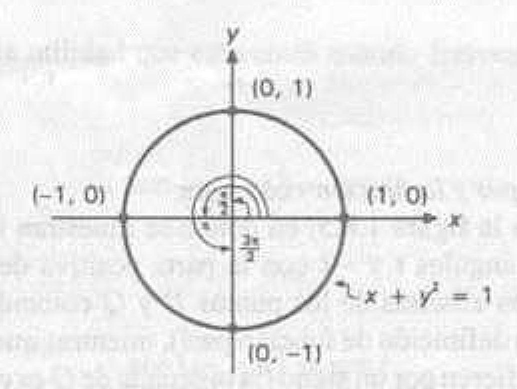


Figura 1.8.3. Las funciones sen y cos para los ángulos de $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$.

De la definición dada de las funciones sen y cos se desprenden inmediatamente tres hechos importantes:

1) *El rango de las funciones* sen *y* cos *es el intervalo* $[-1, 1]$.

En efecto, puesto que estas funciones son las coordenadas de un punto P en el círculo unitario es claro que los valores que pueden tomar (las coordenadas de P) se encuentran entre -1 y 1. De hecho, para la abscisa (el coseno) el menor valor que puede tomar es -1, cuando el punto P está en $(-1, 0)$ (correspondiente al ángulo π), y el mayor valor es 1, cuando el punto P está en $(1, 0)$ (correspondiente al ángulo 0), mientras que para la ordenada (el seno), el menor valor que puede tomar es -1, cuando el punto P está en $(0, -1)$ (correspondiente al ángulo $\frac{3\pi}{2}$), y el mayor valor que puede tomar es 1, cuando el punto P está en $(0, 1)$ (correspondiente al ángulo $\frac{\pi}{2}$).

2) *Las funciones* sen *y* cos *son periódicas, de periodo* 2π.

Esto significa que los valores que toman estas funciones se repiten cada 2π unidades. Más precisamente, se tiene $\operatorname{sen}(t + 2\pi) = \operatorname{sen} t$ y $\cos(t + 2\pi) = \cos t$ para toda $t \in \mathbf{R}$. En efecto, el ángulo de 2π marca una vuelta completa en el círculo unitario, de modo que el punto P cuyo radio $\overline{OP}$ forma un ángulo t con la parte positiva del eje x, **es el mismo punto** P', cuyo radio $\overline{OP'}$ forma un ángulo de $t + 2\pi$ con la parte positiva del eje x.

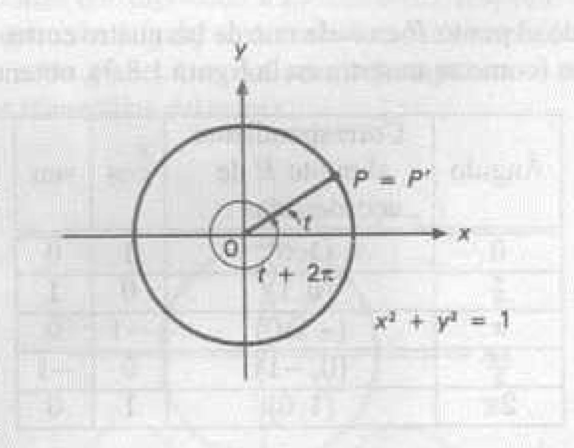


Figura 1.8.4. Las funciones sen y cos son periódicas de periodo 2π.

3) *La función* sen *es impar y la función* cos *es par.*

En efecto, atendiendo a la figura 1.8.5, en donde se muestran los puntos P y Q, cuyos radios $\overline{OP}$ y $\overline{OQ}$ forman ángulos t y $-t$ con la parte positiva del eje x respectivamente, vemos directamente que las abscisas de los puntos P y Q coinciden, lo cual nos dice que $\cos(-t) = \cos t$ (¡ésta es la definición de función par!), mientras que sus ordenadas, teniendo el mismo valor absoluto, difieren por un signo (la ordenada de Q es el negativo de la ordenada de P), lo cual nos dice que $\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$ (que es la definición de función impar). Esto muestra la afirmación hecha en un principio.

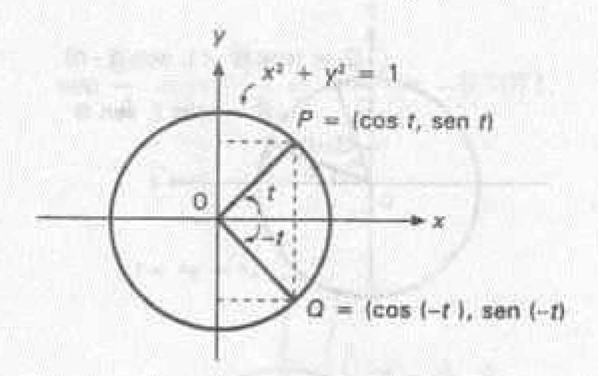


Figura 1.8.5. La función sen es impar y la función cos es par.

A continuación se muestran las gráficas de las funciones $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$. En las gráficas se pueden verificar los tres hechos mencionados anteriormente.

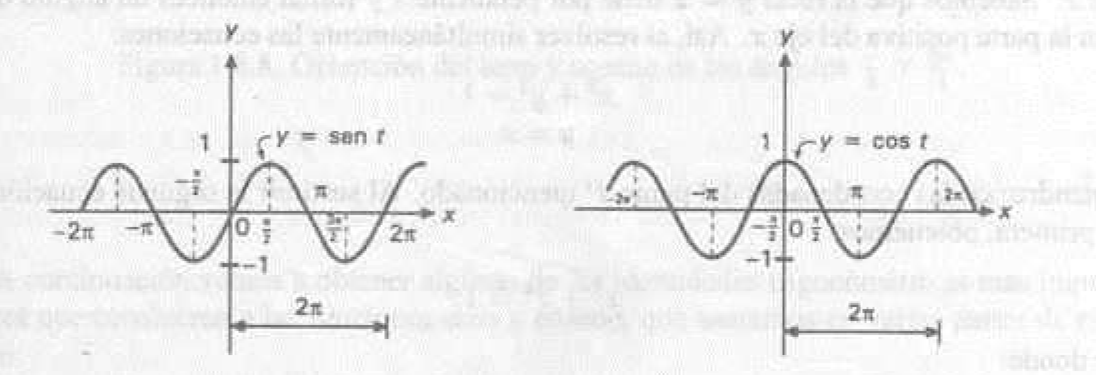


Figura 1.8.6. Gráficas de las funciones $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$.

Otros hechos de mucha utilidad que estaremos usando frecuentemente de las funciones sen y cos son:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$$

y

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \operatorname{sen} t$$

los cuales se visualizan fácilmente de la figura 1.8.7.

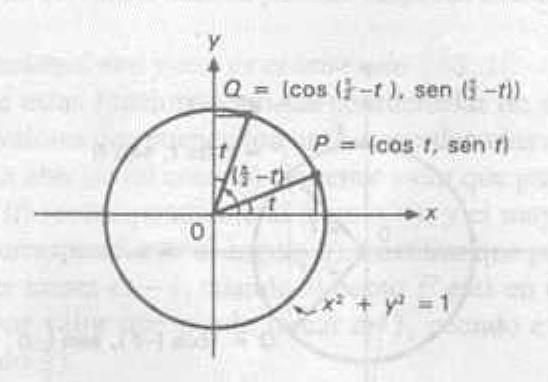


Figura 1.8.7. Relación entre las funciones seno y coseno de los ángulos t y $t - \frac{\pi}{2}$.

EJEMPLO 1.8.1. Use argumentos geométricos para obtener las funciones seno y coseno de $\frac{\pi}{4}$ y de $\frac{5\pi}{4}$.

SOLUCIÓN. Para el ángulo de $\frac{\pi}{4}$ debemos obtener las coordenadas del punto P en el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$, cuyo radio $\overline{OP}$ forme un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ con la parte positiva del eje x. Sabemos que la recta $y = x$ tiene por pendiente 1 y forma entonces un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ con la parte positiva del eje x. Así, al resolver simultáneamente las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 \\ y &= x \end{aligned}$$

obtendremos las coordenadas del punto P mencionado. Al sustituir la segunda ecuación en la primera, obtenemos:

$$x^2 + x^2 = 1,$$

de donde:

$$2x^2 = 1,$$

o bien:

$$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Como $y = x$, las coordenadas de los puntos P y P' en los que se cortan la recta $y = x$ con el círculo unitario, son $P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $P' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. El punto P se encuentra en el primer cuadrante y, por lo tanto, sus coordenadas deben corresponder a las funciones coseno y seno (respectivamente) del ángulo de $\frac{\pi}{4}$, mientras que el punto P' se encuentra en el tercer cuadrante, por lo tanto sus coordenadas deben corresponder al coseno y seno del ángulo de $\frac{5\pi}{4}$. Entonces:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7071$$

y

$$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} = \cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0.7071.$$

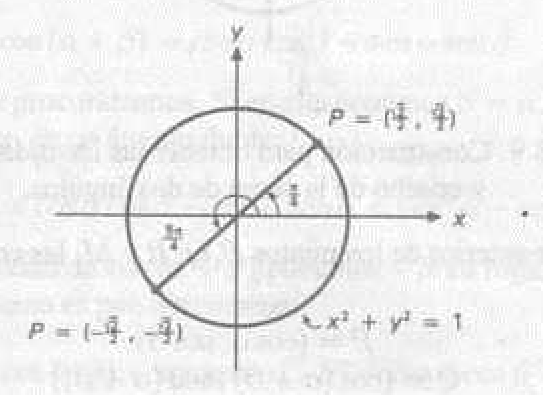


Figura 1.8.8. Obtención del seno y coseno de los ángulos $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{5\pi}{4}$.

★

A continuación vamos a obtener algunas de las identidades trigonométricas más importantes que involucran a las funciones seno y coseno, que usaremos en varias partes de este libro.

Comenzamos por hacer la observación simple de que, siendo el punto $P = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ un punto sobre el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$, las coordenadas de P deben satisfacer la ecuación de la curva sobre la cual se encuentra. Por lo tanto, se deduce que:

$$\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1.$$

Ésta es una de las identidades trigonométricas más sencillas e importantes. Obtengamos ahora las identidades que establecen las relaciones entre el seno y el coseno de la suma de dos ángulos con el seno y el coseno de cada uno de los ángulos. Partamos de la figura 1.8.9, en donde están marcados el punto P, cuyo radio $\overline{OP}$ forma un ángulo α con la parte positiva del eje x, el punto Q, cuyo radio $\overline{OQ}$ forma un ángulo β con el radio $\overline{OP}$, el punto R en el cuarto cuadrante, cuyo radio $\overline{OR}$ forma un ángulo β con el eje x (y que entonces el ángulo asociado a R es $-\beta$), y el punto $M = (1, 0)$.

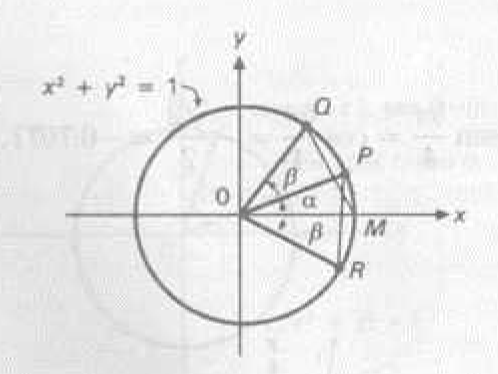


Figura 1.8.9. Construcción para obtener las identidades del seno y coseno de la suma de dos ángulos.

Según la descripción anterior de los puntos P, Q, R y M, las coordenadas de éstos deben ser:

$$\begin{aligned} P &= (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) \\ Q &= (\cos(\alpha+\beta), \operatorname{sen}(\alpha+\beta)) \\ R &= (\cos(-\beta), \operatorname{sen}(-\beta)) = (\cos\beta, -\operatorname{sen}\beta) \\ M &= (1,0). \end{aligned}$$

Observe que la cuerda $\overline{MQ}$ corresponde a un ángulo central de $\alpha+\beta$, al igual que la cuerda $\overline{RP}$. Por lo que, las longitudes de estas cuerdas deben ser iguales. Conociendo las coordenadas de los puntos extremos de estas cuerdas, podemos hacer explícita la longitud de cada una de ellas con la fórmula de la distancia entre dos puntos estudiada en geometría analítica:

$$|\overline{MQ}| = \text{distancia entre } M \text{ y } Q = \sqrt{(\cos(\alpha+\beta)-1)^2 + \operatorname{sen}^2(\alpha+\beta)},$$

De igual manera:

$$|\overline{RP}| = \text{distancia entre } R \text{ y } P = \sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta)^2}.$$

Como estas dos distancias deben ser iguales tenemos:

$$\sqrt{(\cos(\alpha+\beta)-1)^2 + \operatorname{sen}^2(\alpha+\beta)} = \sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta)^2}.$$

Luego de elevar al cuadrado ambos miembros de esta igualdad, y de desarrollar los binomios al cuadrado involucrados, nos queda:

$$\begin{aligned} &\cos^2(\alpha+\beta) - 2\cos(\alpha+\beta) + 1 + \operatorname{sen}^2(\alpha+\beta) = \\ &= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}^2\beta. \end{aligned}$$

Según la primera identidad que obtuvimos ($\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$), tenemos que en el miembro izquierdo de esta expresión $\cos^2(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}^2(\alpha+\beta) = 1$ y en el miembro derecho se tiene $\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = \cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\beta = 1$. Por lo tanto, la expresión anterior se ve como:

$$1-2\cos(\alpha+\beta)+1=1-2\cos\alpha\cos\beta+1+2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta,$$

o bien:

$$2-2\cos(\alpha+\beta)=2-2\cos\alpha\cos\beta+2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta,$$

de donde se obtiene (simplificando los 2 de ambos miembros y dividiendo luego todo por -2):

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

Ésta es la identidad que procurábamos. Si en ella ponemos $\beta=\alpha$, obtenemos la identidad correspondiente del coseno de un ángulo doble:

$$\cos 2\alpha=\cos\alpha\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha.$$

También, si en la identidad de $\cos(\alpha+\beta)$ ponemos $-\beta$ en lugar de β, y usamos que el seno es impar y que el coseno es par, obtenemos:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos(-\beta)-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha(-\operatorname{sen}\beta).$$

Es decir:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

Usemos ahora que $\operatorname{sen} t=\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$ para obtener:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right),$$

expresión que se convierte (con la fórmula del coseno de la diferencia de dos ángulos obtenida previamente) en:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{sen}\beta.$$

Pero $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{sen}\alpha$ y $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$. Nos queda finalmente que:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

Poniendo $-\beta$ en lugar de β, obtenemos:

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

Poniendo $\beta=\alpha$ en la identidad de $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ obtenemos una identidad para el seno del ángulo doble:

$$\operatorname{sen}2\alpha=\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha.$$

A manera de resumen, escribimos las identidades que hemos obtenido y que nos serán de gran utilidad en muchas ocasiones en este libro.

$$
\begin{array}{|lr|}
\hline
\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1 & (1) \\
\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta & (2) \\
\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta & (3) \\
\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta & (4) \\
\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta & (5) \\
\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha & (6) \\
\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha & (7) \\
\hline
\end{array}
$$

EJEMPLO 1.8.2. Sea α un ángulo en el primer cuadrante, tal que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{3}$. Determine $\operatorname{sen} 2\alpha$.

SOLUCIÓN. Con la identidad $\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$, podremos determinar el $\operatorname{sen} 2\alpha$ requerido si llegamos a conocer $\cos\alpha$. Puesto que el ángulo α es agudo, es posible recurrir a un triángulo rectángulo, uno de cuyos ángulos es α, y hacer que en él el seno de α sea $\frac{2}{3}$. Si recordamos que en la trigonometría clásica el seno de este ángulo se define como el cateto opuesto entre la hipotenusa, ponemos en el cateto opuesto de α a 2 y en la hipotenusa a 3 y queda un triángulo como en la figura 1.8.10 (a). Usando el teorema de Pitágoras, calculamos el cateto restante como $\sqrt{(3)^2 - (2)^2} = \sqrt{5}$ y queda el triángulo como en la figura 1.8.10 (b).

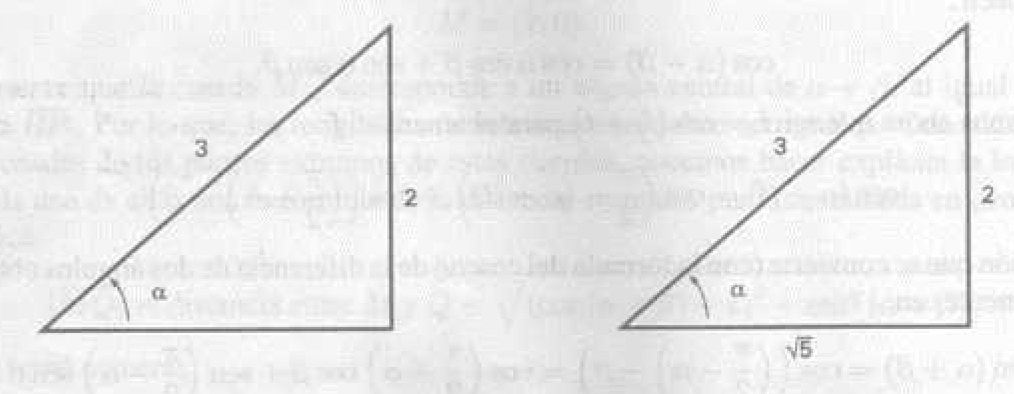


Figura 1.8.10. Triángulos para el ejemplo 1.8.2.

Del triángulo completo (de la figura 1.8.10 (b)), obtenemos que $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Entonces:

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 2\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{4\sqrt{5}}{9}.$$

★

EJEMPLO 1.8.3. Sean α y β ángulos en el primer cuadrante, tales que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{3}$ y $\cos\beta = \frac{4}{7}$. Determine $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$.

SOLUCIÓN. Con la identidad $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$, vemos que es necesario (a partir de $\operatorname{sen}\alpha$) obtener $\cos\alpha$, y (a partir de $\cos\beta$) obtener $\operatorname{sen}\beta$. Podemos proceder como en el ejemplo anterior o bien de la siguiente manera: como los ángulos están

en el primer cuadrante, en donde tanto el seno como el coseno son positivos, se tiene (de la identidad (1)) que:

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3}$$

y

$$\operatorname{sen}\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\left(\frac{4}{7}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{16}{49}} = \frac{\sqrt{33}}{7}.$$

Entonces:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{7}\right) + \left(\frac{\sqrt{8}}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{33}}{7}\right) = \frac{4+\sqrt{264}}{21}.$$

★

A partir de las funciones seno y coseno, se definen las demás funciones trigonométricas tangente (tan), cotangente (cot), secante (sec) y cosecante (csc) como:

$$\tan : D \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad \tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t},$$

en donde el dominio D es el de la función cociente de seno entre coseno, es decir, el dominio D de la tangente es $\mathbf{R}$ (la intersección de los dominios de seno y coseno), excepto aquellos valores $t \in \mathbf{R}$ para los cuales $\cos t = 0$. Esto ocurre cuando $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Es decir, el dominio de la tangente es $\mathbf{R} - \{t \in \mathbf{R} \,|t = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.

La cotangente se define como:

$$\cot : \mathbf{R} - \{t \in \mathbf{R} \,|t = k\pi, k \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}, \qquad \cot t = \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t} = \frac{1}{\tan t}.$$

La secante y cosecante se definen como:

$$\sec : \mathbf{R} - \{t \in \mathbf{R} \,|t = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}, \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t}$$

y

$$\csc : \mathbf{R} - \{t \in \mathbf{R} \,|t = k\pi, k \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}, \qquad \csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t}.$$

Es claro que también estas funciones presentan una periodicidad en sus imágenes cada 2π unidades. Sin embargo, tanto para la tangente como para la cotangente observe que:

$$\tan(t+\pi) = \frac{\operatorname{sen}(t+\pi)}{\cos(t+\pi)} = \frac{\operatorname{sen} t\cos\pi + \cos t\operatorname{sen}\pi}{\cos t\cos\pi - \operatorname{sen} t\operatorname{sen}\pi} = \frac{(\operatorname{sen} t)(-1) + (\cos t)(0)}{(\cos t)(-1) - (\operatorname{sen} t)(0)} =$$

$$= \frac{-\operatorname{sen} t}{-\cos t} = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = \tan t,$$

(operaciones análogas para la cotangente), lo que muestra que existe un periodo menor para estas funciones trigonométricas, a saber, un periodo de π.

El valor de la tangente de un ángulo t puede interpretarse geométricamente atendiendo a la figura 1.8.11.

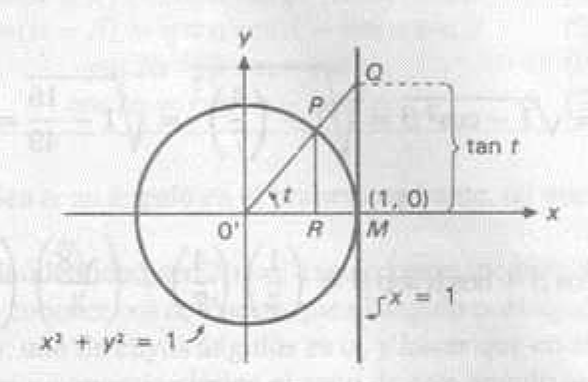


Figura 1.8.11. Construcción para la interpretación geométrica de la tangente de un ángulo t.

Los triángulos OPR y OQM son semejantes, por lo que:

$$\frac{|\overline{PR}|}{|\overline{OR}|} = \frac{|\overline{QM}|}{|\overline{OM}|}.$$

Pero $|\overline{OR}| = \cos t$, $|\overline{PR}| = \operatorname{sen} t$, $|\overline{OM}| = 1$, por lo que:

$$\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = \frac{|\overline{QM}|}{1}.$$

Es decir:

$$|\overline{QM}| = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = \tan t.$$

Así, la tangente del ángulo t es la distancia que existe entre el punto $(1, 0)$ y la intersección de la recta $x = 1$ con la recta que contiene al radio $\overline{OP}$ que forma un ángulo t con la parte positiva del eje x.

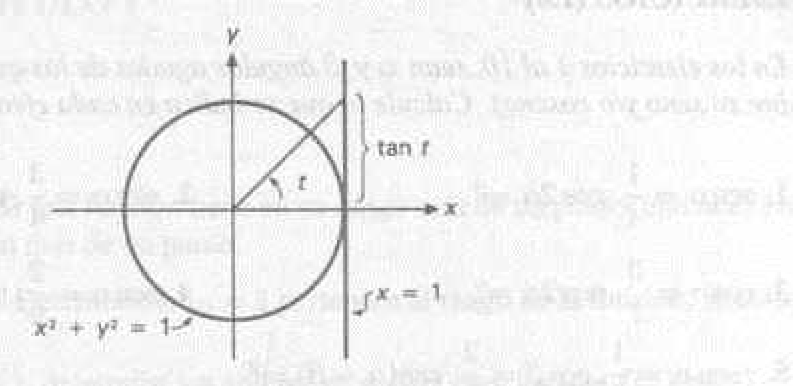


Figura 1.8.12. Interpretación geométrica de la tangente de un ángulo t.

En la figura 1.8.13 se muestran las gráficas de las funciones tangente y cotangente.

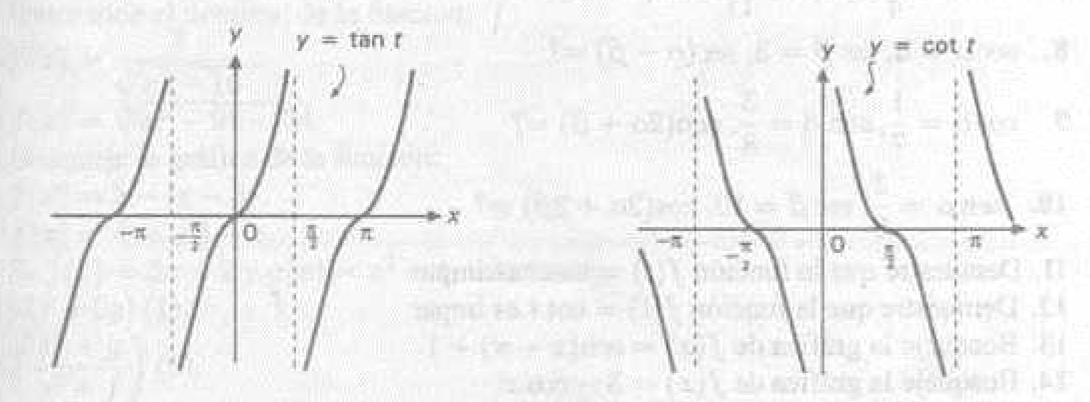


Figura 1.8.13. Gráficas de las funciones tangente y cotangente de un ángulo t.

Para las funciones $\tan t$, $\cot t$, $\sec t$ y $\csc t$ existen también algunas identidades importantes como:

$$1 + \tan^2 t = \sec^2 t \qquad (8)$$

$$1 + \cot^2 t = \csc^2 t \qquad (9)$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \qquad (10)$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} \qquad (11)$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} \qquad (12)$$

Dejamos como ejercicio al estudiante que obtenga estas identidades. Otras identidades más serán consideradas en los ejercicios al final de esta sección.

EJERCICIOS (1.8)

En los ejercicios 1 al 10, sean α y β ángulos agudos de los que se da cierta información (sobre su seno y/o coseno). Calcule lo que se indica en cada ejercicio.

1. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{4}$. $\cos 2\alpha = ?$

2. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{4}$. $\tan\alpha = ?$

3. $\cos\alpha = \frac{3}{7}$. $\operatorname{sen} 2\alpha = ?$

4. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{9}$. $\tan 2\alpha = ?$

5. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{3}, \cos\beta = \frac{2}{5}$. $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = ?$

6. $\cos\alpha = \frac{4}{5}, \cos\beta = \frac{2}{3}$. $\cos(\alpha + \beta) = ?$

7. $\tan\alpha = \frac{1}{4}, \cos\beta = \frac{2}{11}$. $\tan(\alpha + \beta) = ?$

8. $\sec\alpha = 5, \csc\beta = 3$. $\sec(\alpha - \beta) = ?$

9. $\cos\alpha = \frac{1}{7}, \operatorname{sen}\beta = \frac{3}{8}$. $\operatorname{sen}(2\alpha + \beta) = ?$

10. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{9}, \sec\beta = 10$. $\cos(2\alpha + 2\beta) = ?$

11. Demuestre que la función $f(t) = \tan t$ es impar.

12. Demuestre que la función $f(t) = \cot t$ es impar.

13. Bosqueje la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen}(x - \pi) + 1$.

14. Bosqueje la gráfica de $f(x) = 3 - \cos x$.

15. Bosqueje la gráfica de $f(x) = |\cos x|$.

16. Demuestre que $\operatorname{sen} 3\alpha = 3\operatorname{sen}\alpha - 4\operatorname{sen}^3\alpha$.

17. Demuestre que $\operatorname{sen} 4\alpha = \cos\alpha\,(4\operatorname{sen}\alpha - 8\operatorname{sen}^3\alpha)$.

18. Demuestre que $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

19. Demuestre que $\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$.

20. Demuestre que $\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right)$.

21. Demuestre que $\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta)\right)$.

22. Demuestre que $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\right)$.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 1

EXAMEN TIPO (A)

1. ¿Verdadero o falso? Si una función tiene en su rango más de un punto, entonces en su dominio debe tener también más de un punto.

2. Sea $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5}{x^2 - 1}$. Determine si $y_0 = 1$ pertenece al rango de la función. Justifique su respuesta.

3. Si $f(x) = x^2 - 3x + 1$, determine los valores de $x \in \mathbf{R}$ para los que $f(x) = -1$.

4. Sea $f(x) = \begin{cases} 2x^3 & \text{si } \ x < 1 \\ x + 2 & \text{si } \ x \geq 1. \end{cases}$ Calcule $f(0) + f(1) + f(2)$.

5. Si $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 1}$, determine $f\left(\frac{1}{x}\right)$. Simplifique su respuesta.

6. Determine el dominio de la función:

a) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2 - 16}}$.

b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 9x - 24}$.

7. Bosqueje la gráfica de la función:

a) $f(x) = 2 - |x - 3|$.

b) $f(x) = 4 - \sqrt{3 - x}$.

8. Si $f(x) = 3x + 2$ y $g(x) = x^2 - 1$, determine:

a) $(3f + 2g)(1)$.

b) $\left(\dfrac{f^2 + g}{g^2 + f}\right)(0)$.

9. Sea $F(x) = 2 + 3\operatorname{sen}^2\left(1 + 3\sqrt{4 + 7x^3}\right)$. Determine 10 funciones $f_1, f_2, \ldots, f_{10}$, tales que $F(x) = (f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_{10})(x)$.

10. Determine si la función dada es par, impar o ninguna de las dos.

a) $f(x) = \dfrac{3}{2x^2 + 1}$.

b) $f(x) = \dfrac{3x}{2x^2 + 1}$.

EXAMEN TIPO (B)

1. Sea $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función tal que $f(3x + 4) = 5(x - 2)^2 + 4x - 1$. Determine $f(x + 1)$.

2. Sea $f(x) = \dfrac{3x^2 - a}{x^2 - b}$. ¿Qué condición deben satisfacer a y b para que $y_0 = 2$ pertenezca al rango de la función?

3. Si $f(x) = x^3 + 18x^2 + 77x + 3$, determine los valores de $x \in \mathbf{R}$ para los que $f(x) = 3$.

4. Sea $f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 1 & \text{si } \ x < 1 \\ x^2 - 2 & \text{si } \ x \geq 1. \end{cases}$ Calcule $f\left(1 - f\left(2 + f(0)\right)\right)$.

5. Si $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x^2+1}$, determine $f\left(f\left(\frac{1}{x+1}\right)\right)$. Simplifique su respuesta.

6. Determine el dominio de la función:

a) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{4-x-x^2}}$.

b) $f(x) = \dfrac{2x^2+3x-2}{\sqrt[3]{x^4+5x^2+6}}$.

7. Bosqueje la gráfica de la función

a) $f(x) = 1 - |2 - |x-3||$.

b) $f(x) = |\operatorname{sen} x| + 3$.

8. Verifique que la propiedad distributiva de la composición sobre la suma $(f \circ (g+h))(x) = (f \circ g)(x) + (f \circ h)(x)$ es, en general, falsa.

9. Sea $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Determine la función $F(x) = \Bigg(\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{37 \text{ veces}}\Bigg)(x)$.

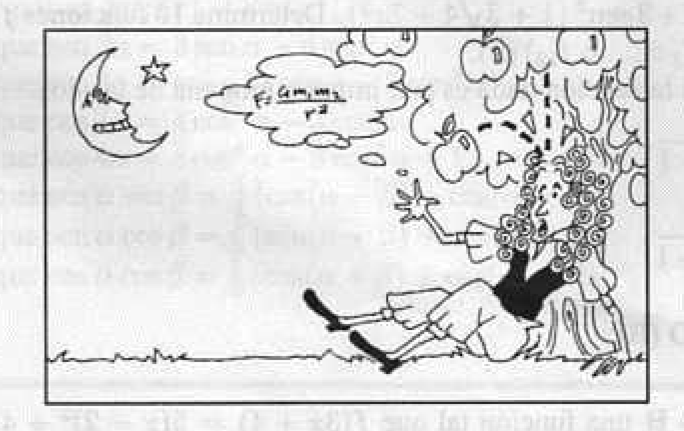
10.

a) Demuestre que la suma de dos funciones pares es una función par.

b) Demuestre que el producto de dos funciones pares es una función par.

c) Demuestre que si $f(x)$ es una función par y $g(x)$ es cualquier función (para la que tiene sentido la composición $(g \circ f)(x)$), entonces la función compuesta $(g \circ f)(x)$ es par.

NOTA HISTÓRICA: NEWTON, EL CÁLCULO, LA LUNA Y LAS MANZANAS.



Aunque el título de esta nota histórica pueda parecer el nombre de algún bolero romántico de nuestros tiempos o el título de un poema de algún poco inspirado y exótico artista, lo que en realidad pretendemos en este comienzo del curso de Cálculo, es mencionar, como cualquier persona sensata lo haría, el nombre de uno de los creadores de esta parte de la Matemática. Decimos uno de los creadores porque en el Cálculo se dio una de esas casi imposibles coincidencias en la historia de la ciencia: habían pasado más de veinte siglos desde la aparición de la Matemática como ciencia formal, antes de que salieran a la luz las ideas del Cálculo. Y éstas surgieron casi simultáneamente en el siglo XVII, con Sir Isaac Newton en Inglaterra y con G. Leibniz en Alemania. El problema sobre quién fue el primero que concibió las ideas del Cálculo, ha sido motivo

de grandes polémicas en los últimos tres siglos. En este momento ese asunto no nos importa mucho. Nos quedamos con la conciencia tranquila pensando que justo la nota histórica del próximo capítulo la dedicaremos a Leibniz.

El Cálculo, como muchas otras ramas de la Matemática, surgió por necesidades prácticas. Newton, quien nació en un día de Navidad de 1642 (el mismo año en que murió Galileo), estaba interesado en problemas relacionados con el movimiento de los planetas y sus órbitas. Cuenta la leyenda que un día, estando Newton descansando debajo de un árbol en Cambridge, vio caer una manzana (algunos dicen que le cayó en la cabeza, pero esto no es relevante para lo que vamos a relatar a continuación). Ese hecho le provocó una serie de cuestionamientos sobre la naturaleza de la fuerza que se ejerce para que la manzana caiga a la tierra, y sobre la fuerza que hace que la Luna gire alrededor de la Tierra, que esta última gire alrededor del Sol, etcétera. Uno de los frutos más grandes que ha dado el cerebro humano en la historia de la humanidad ha sido la conclusión a la que Newton llegó sobre las fuerzas de las manzanas con la tierra, o de la Luna con la Tierra: la llamada Ley de Gravitación Universal, establecida por él. Ésta dice que tales fuerzas son exactamente de la misma naturaleza, lo cual es un hecho asombroso que impulsó el desarrollo de la ciencia de una manera espectacular. Esta conclusión no fue producto de una inspiración. Newton tuvo que CREAR una nueva herramienta matemática para poder establecer tales conclusiones. Las nuevas ideas matemáticas que creó Newton para aventurarse en el estudio de las fuerzas mencionadas anteriormente (la fuerza, en singular, de gravitación), son las que ahora, tres siglos después, constituyen la parte de la Matemática conocida como Cálculo Diferencial e Integral.

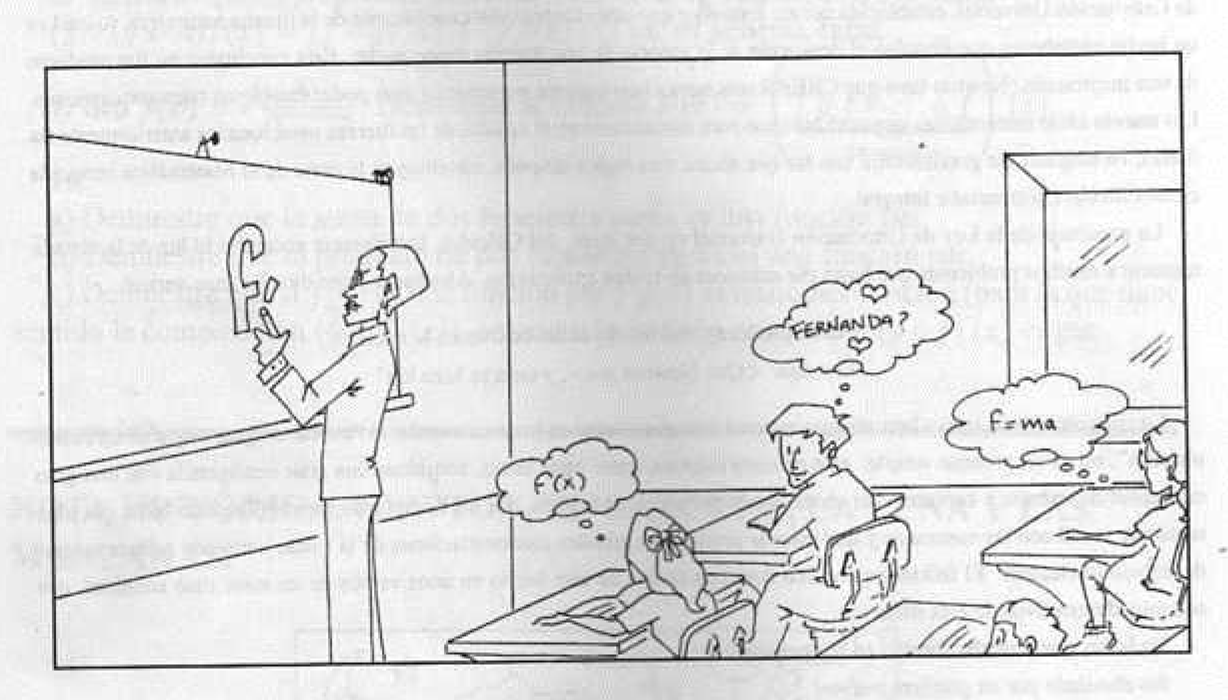
La presencia de la Ley de Gravitación Universal (y, por ende, del Cálculo), literalmente encendió la luz de la ciencia respecto a muchos problemas que hasta ese entonces no tenían explicación. Alexander Pope dice en unos versos:

"... la Naturaleza y sus leyes yacían ocultas en la noche:
Dios dijo: <Que Newton sea>, y todo se hizo luz"

La creación de una nueva herramienta matemática, el explorar en lo desconocido, el "buscar un gato negro en un cuarto obscuro", no es un proceso simple: este proceso implica, entre otras cosas, combinar una gran inteligencia con una gran capacidad de trabajo, y con una vida obsesionada por alcanzar la meta. En los tiempos de Newton la gente sabía que algo tenía que ver él con las manzanas y que éstas le produjeron grandes contemplaciones de la Luna, junto con noches enteras de trabajo intelectual. El folklore científico dejó constancia de este hecho en unos versos de un autor ruso anónimo, que son muy descriptivos de esta situación:

Sir Isaac, que paseaba sumido en sus pensamientos,
fue abordado por un granjero vecino
y, sacado de las leyes de gravedad,
persuadido por el hombre a detenerse
y charlar un rato. A lo largo la brisa
sembraba con las pálidas flores de manzano de los árboles
del hortelano amigo de Newton
la carretera de lado a lado.
El vecino dijo a Newton: "Deténgase.
Me gustaría hablar unas palabras con usted.
Por el pueblo corren rumores
de que usted ha ganado fama
observando la caída de las manzanas.
Dígame, por favor, si se me caerán todas."
"¡Claro que sí!", dijo Newton. "Sí, desde luego,
usted no ve que la misma fuerza
que disminuye como el cuadrado
de r —la distancia hasta ella—

que actúa sobre la fiel Luna
actúa sobre la manzana. Más tarde o más pronto ..."
"Por favor —dijo el vecino—, déjelo
porque eso no es lo que quería saber;
lo único que me interesa
sobre los manzanos florecidos
y todas sus manzanas, una por una,
es que maduren al buen sol
a lo largo de esta carretera tranquila
y cuánto debo cobrarle por la lata."



CAPÍTULO 2
LÍMITES

"La teoría de límites es la base de la verdadera metafísica del Cálculo Diferencial ..."

Jean Le Rond D'Alembert

El concepto de límite de una función es el concepto sobre el cual descansan los dos pilares más importantes del curso de Cálculo que este libro contiene: la Derivada y la Integral de una función $f(x)$. El objetivo de este curso es adentrarnos en el estudio de estos conceptos y sus aplicaciones. En el capítulo 1 presentamos los objetos matemáticos sobre los cuales van a actuar las ideas del Cálculo (las funciones). En este capítulo presentaremos el concepto por medio del cual se define la derivada de una función, que estudiaremos en el capítulo 4.

La Escuela Rusa contemporánea de Matemática concibe una gran división de esta ciencia de la siguiente manera:

$$\textbf{Matemática}\begin{cases}\textbf{Matemática Superior}\\ \text{(en donde se usa la idea de límite)}\\ \\ \textbf{Matemática Elemental}\\ \text{(en donde no se usa la idea de límite)}\end{cases}$$

Los calificativos "superior" y "elemental" no son sinónimos de "fácil" y "difícil", respectivamente. Sólo por dar un ejemplo, en el libro de Lidski, *Problemas de matemáticas elementales* (Editorial Mir, Moscú, 1972), aparece el siguiente problema (número 131): resolver la ecuación

$$\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ax} + \log_x \sqrt[4]{ax}} + \sqrt{\log_a \sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \log_x \sqrt[4]{\frac{a}{x}}} = a.$$

Llegar a establecer que solamente en el caso en que $a > 1$ esta ecuación tiene dos soluciones, a saber $x_1 = a^{a^2}$ y $x_2 = a^{\frac{1}{a^2}}$, requiere de cierto trabajo algebraico no precisamente sencillo. Sin embargo, el problema: "Calcule la derivada de la función $f(x) = 4x^3$", al cual, con toda seguridad podrá dar respuesta correcta en unas cuantas fracciones de segundo cuando finalice el capítulo 4, es considerado como un problema de matemática superior, pues en él está involucrada la idea de límite (¡la derivada es un límite!)

Así pues, en este capítulo (según la Escuela Rusa de Matemáticas) *usted estará entrando al mundo de la Matemática Superior*.

2.1 EL CONCEPTO INTUITIVO DE LÍMITE

Consideremos una función $f : D \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida en el conjunto D de $\mathbf{R}$. Tomemos un punto $x = a \in D$ (o bien, en algunos casos consideraremos valores de a fuera —pero "cerca"— del dominio de la función). El objetivo del estudio de los límites se puede sintetizar en la siguiente idea:

Se quiere estudiar el comportamiento que tienen las imágenes de la función $y = f(x)$ cuando la variable x se encuentra cerca del valor $x = a$.

Para adentrarnos en el tema, consideremos un ejemplo muy simple. Tomemos la función $f(x) = x^2$ e investiguemos lo que sucede con sus imágenes cuando x se encuentra cerca de 2. Las siguientes tablas, en las que consideramos algunos valores de x cercanos de 2 "por la derecha y por la izquierda", junto con los valores de sus imágenes, nos ayudarán a obtener alguna conclusión al respecto.

x	$f(x) = x^2$	x	$f(x) = x^2$
1.5	2.25	2.5	6.25
1.9	3.61	2.1	4.41
1.99	3.9601	2.01	4.0401
1.999	3.996001	2.001	4.004001
1.9999	3.99960001	2.0001	4.00040001

Resulta claro que a medida que la variable x se encuentra más cerca del valor 2, su imagen $f(x) = x^2$ se encuentra más cerca del valor 4. Este hecho lo escribiremos como:

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4,$$

y lo leeremos como "el límite de la función $f(x) = x^2$ cuando x tiende a 2, es igual a 4".

Otra idea que podemos obtener de la tabla anterior es que es posible tener las imágenes $f(x) = x^2$ tan cerca del valor 4 como nosotros queramos (las podemos tener arbitrariamente cerca del valor 4), con sólo tener a x lo suficientemente cerca de 2. Por ejemplo, ¿podríamos tener las imágenes $f(x) = x^2$ a una distancia del valor 4, menor que 0.01? En la tabla anterior podemos ver que bastaría con tener a x entre 1.999 y 2.001 para garantizar que sus imágenes se encontrarán a la distancia deseada de 4.

Con este ejemplo preliminar quizás se sienta un poco decepcionado de lo que anteriormente hemos anunciado que estudiaremos aquí (¿siente que el ejemplo anterior encierra una idea verdaderamente profunda?) No desespere: el concepto que traemos entre manos (el concepto de límite) es en realidad muy emocionante, pero hemos comenzado con un ejemplo

exageradamente simple. El peligro que encierra este ejemplo es que puede provocar razonamientos como el siguiente:

"Como la función $f(x) = x^2$ toma el valor de 4 cuando $x = 2$, es decir, como se tiene que $f(2) = 2^2 = 4$, entonces cuando x se encuentra cerca de 2 también su imagen $f(x)$ debe encontrarse cerca de 4".

Acontece que la función $f(x) = x^2$ es una de esas "buenas funciones" (que llamaremos "funciones continuas" y estudiaremos en el próximo capítulo) en las que el valor del límite $\lim_{x\to a} f(x)$ es justamente igual al valor $f(a)$, es decir, funciones para las cuales si x está cerca de a, entonces $f(x)$ está cerca de $f(a)$. Sin embargo, el razonamiento anterior —lo insistiremos mucho a lo largo de este capítulo ... ¡es erróneo! Ciertamente es verdad que $f(2) = 4$, ¡pero esto no es lo que queremos decir con la expresión $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$!

Insistimos: la expresión $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$ nos debe sugerir que a medida que la x se encuentra más cercana a 2, su imagen $f(x) = x^2$ se encuentra más cercana a 4, o bien, que podemos tener a las imágenes $f(x) = x^2$ tan cercanas a 4 como nosotros queramos, tomando a x suficientemente cerca del valor 2.

Consideremos otro ejemplo. Tomemos la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. Observe que el dominio de esta función es el conjunto de todos los números reales excepto $x = 1$, pues en este punto se tiene $f(1) = \frac{1^2-1}{1-1} = \frac{0}{0}$, expresión que carece de sentido en matemáticas (se dice que este cociente de cero entre cero es una "forma indeterminada"). Queremos estudiar qué pasa con las imágenes de esta función cuando x se encuentra cerca del valor 1. Observe que esta pregunta tiene perfecto sentido, pues la función considerada no existe únicamente en el punto $x = 1$: para todos los demás valores reales de x es posible calcular $f(x)$. Hagamos una tabla similar a la del ejemplo anterior con las imágenes $f(x)$ para distintas x que estén cerca de 1.

x	$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$	x	$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$
0.5	1.5	1.5	2.5
0.9	1.9	1.1	2.1
0.99	1.99	1.01	2.01
0.999	1.999	1.001	2.001
0.9999	1.9999	1.0001	2.0001

No resultará difícil de aceptar que a medida que x se encuentre más cerca del valor 1, su imagen $f(x)$ se encontrará más cerca del valor 2. Es decir que de acuerdo con los valores presentados en la tabla anterior podríamos estimar que:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2.$$

En este ejemplo no podemos caer en la tentación del argumento erróneo del ejemplo anterior, pues en este caso no es posible decir que *como* $f(1) = ?$, *entonces si* x *se encuentra*

cerca de 1, *su imagen* $f(x)$ *debe encontrarse cerca de* 2. Veamos un poco más de cerca lo que sucede en este ejemplo. Observe que la función dada se puede escribir como:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}.$$

Estaríamos muy dispuestos a cancelar inmediatamente el factor $x - 1$ que aparece tanto en el numerador como en el denominador de la fracción anterior. Esto, por supuesto que lo podemos hacer, *siempre y cuando tal factor no sea igual a cero*, pues en tal caso estaríamos realizando una cancelación ilegítima en matemáticas.

[*Nota:* estará de acuerdo en la validez de la igualdad $(0)(1) = (0)(2)$, pues ambos lados de ella son iguales a cero. Si fuera lícito cancelar los ceros, llegaríamos a la conclusión de que $1 = 2$, situación que —esperamos que esté de acuerdo con nosotros— no resulta nada conveniente].

Así pues, nuestra función $f(x)$ la podríamos escribir como $f(x) = x + 1$, *siempre y cuando el valor de* x *no sea* 1 (es decir, siempre y cuando $x - 1$ no sea cero). Ahora bien, recuerde lo que dijimos al principio de este capítulo: nos interesa el comportamiento de las imágenes $f(x)$ *cuando* x *está cerca de* 1, *y no cuando* x *es igual a* 1. En la tabla presentada anteriormente, tenemos valores de x de 0.9999, y podríamos tener también valores de x de 0.9999999999, o con tantos nueves como queramos, pero ninguna de estas x son iguales a 1. Para tales x, podemos entonces calcular su imagen como $f(x) = x + 1$. De hecho, observando la tabla mencionada, se notará que los valores de $f(x)$ son justamente los valores de x sumados a 1. Observe entonces que la tabla anterior *sería la misma imagen si quisiéramos calcular el límite cuando* x *tiende a* 1 *de la función* $f(x) = x + 1$. Y he aquí una de las sutilezas del concepto de límite. No podemos decir que las funciones $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ y $f(x) = x + 1$ sean iguales (pues, por ejemplo, no tienen el mismo dominio, no tienen la misma gráfica, etcétera). Sin embargo, sí podemos decir que el límite cuando x tiende a 1 de ambas funciones es el mismo. Es decir que:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2.$$

Acontece que la función $f(x) = x + 1$ es también una de esas "buenas funciones" para las cuales el límite cuando x tiende a 1, es justamente $f(1) = 2$.

En la figura 2.1.1 se pueden ver las gráficas de las funciones $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ y $f(x) = x+1$. Observe que éstas son iguales excepto en $x = 1$, en donde la primera no existe y la segunda sí (toma el valor de 2). Observe también que para las x que están cerca de 1, las imágenes de ambas funciones son iguales.

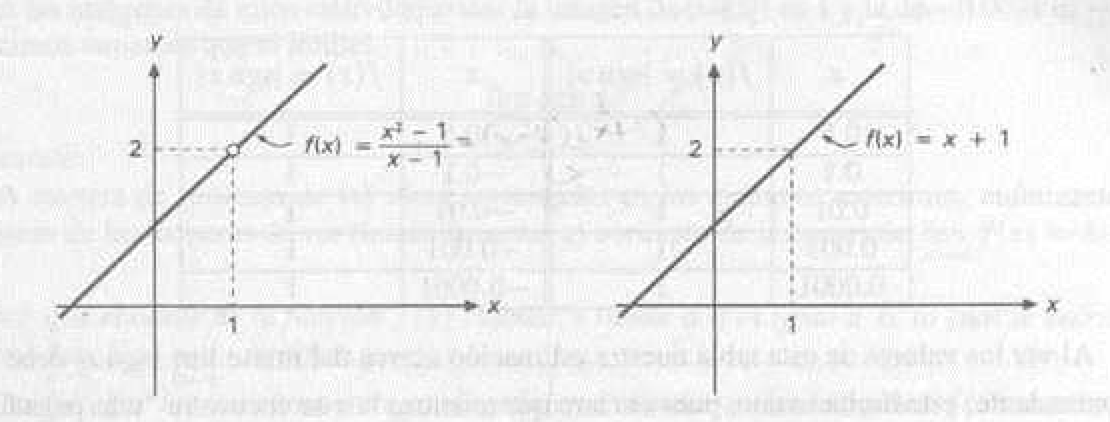


Figura 2.1.1. Las funciones $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ y $f(x) = x+1$ tienen el mismo límite cuando x tiende a 1.

Así pues, la moraleja de este segundo ejemplo analizado es que el estudio del límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a a, *nada tiene que ver con el valor* $f(a)$: se acaba de ver un ejemplo en el que tal valor no existe.

El siguiente ejemplo reforzará aún más la idea anterior. Consideremos la función $f(x) = |\operatorname{sgn} x|$. (Recuerde que la función sgn : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ está definida como: $\operatorname{sgn} x = 1$ si $x > 0$, $\operatorname{sgn} 0 = 0$, y $\operatorname{sgn} x = -1$ si $x < 0$.) Observe que para $x > 0$ se tiene $f(x) = |\operatorname{sgn} x| = |1| = 1$; para $x < 0$ se tiene $f(x) = |\operatorname{sgn} x| = |-1| = 1$, y para $x = 0$ se tiene $f(x) = |\operatorname{sgn} 0| = |0| = 0$. Es decir, esta función es:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

cuya gráfica se muestra en la figura 2.1.2.

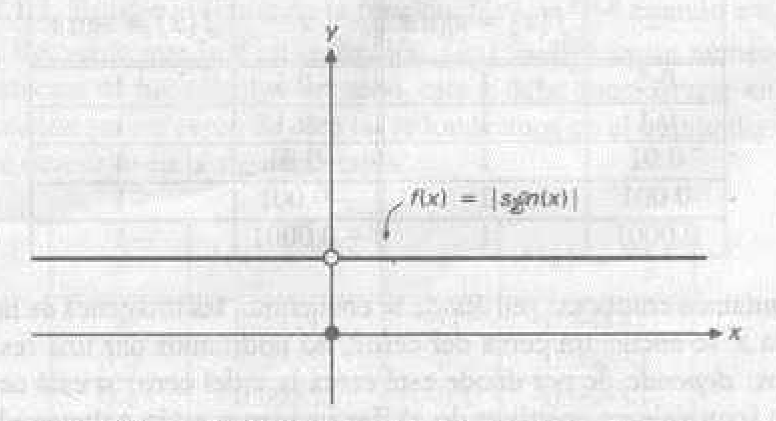


Figura 2.1.2. La función $f(x) = |\operatorname{sgn} x|$.

Queremos estudiar el límite $\lim_{x \to 0} f(x)$. Hagamos una tabla similar a la de los ejemplos anteriores.

x	$f(x) = \lvert \operatorname{sgn} x \rvert$	x	$f(x) = \lvert \operatorname{sgn} x \rvert$
0.5	1	−0.5	1
0.1	1	−0.1	1
0.01	1	−0.01	1
0.001	1	−0.001	1
0.0001	1	−0.0001	1

Al ver los valores de esta tabla nuestra estimación acerca del límite $\lim_{x\to 0} \lvert \operatorname{sgn} x \rvert$ debe ser contundente: este límite es uno, pues es claro que mientras la x se encuentre "más pegadita" al cero, su imagen $f(x)$ estará "bien pegadita" al uno. De hecho estas imágenes estarán tan pegaditas al uno ¡que son siempre iguales a uno! Así pues, tenemos que:

$$\lim_{x\to 0} \lvert \operatorname{sgn} x \rvert = 1.$$

Sin embargo, la función $f(x) = \lvert \operatorname{sgn} x \rvert$ en $x = 0$ es igual a $f(0) = 0$. Éste es un ejemplo entonces de un límite $\lim_{x\to a} f(x)$ para el cual el valor $f(a)$ sí existe (en contraste con el ejemplo anterior), pero tal valor no es igual al valor del límite. Nuevamente la conclusión que queríamos reforzar: el estudio del límite $\lim_{x\to a} f(x)$ nada tiene que ver con el valor de $f(a)$.

Existen funciones $f(x)$ para las cuales el límite $\lim_{x\to a} f(x)$ *no existe* (para alguna a determinada). Esto significa que si las x se encuentran cerca de a, sus imágenes $f(x)$ no presentan un comportamiento definido, es decir, tales imágenes no se aglomeran alrededor (cerca de) algún valor L determinado. Por ejemplo, consideremos la función $f(x) = \operatorname{sgn} x$ y estudiemos qué pasa con las imágenes de esta función cuando x se encuentra cerca del cero. Construimos nuestra tabla como en los ejemplos anteriores.

x	$f(x) = \operatorname{sgn} x$	x	$f(x) = \operatorname{sgn} x$
0.5	1	−0.5	−1
0.1	1	−0.1	−1
0.01	1	−0.01	−1
0.001	1	−0.001	−1
0.0001	1	−0.0001	−1

Si nos preguntamos entonces: ¿en dónde se encuentran las imágenes de la función $f(x) = \operatorname{sgn} x$ cuando la x se encuentra cerca del cero?, no podríamos dar una respuesta absoluta. Quizás diríamos: *depende* de por dónde esté cerca la x del cero: si está cerca del cero a la derecha de éste (con valores positivos de x), las imágenes están aglomeradas alrededor del (son de hecho iguales a) 1, pero si la x está cerca del cero a la izquierda de éste (con valores negativos de x), sus imágenes están aglomeradas alrededor del -1 (ésta es una idea que comentaremos posteriormente: se trata de un caso especial de "límites unilaterales"). Sin embargo, es claro que el número 0.0001 se encuentra tan cerca del cero como el -0.0001,

pero las imágenes de ellos están dispersas: la imagen de 0.0001 es 1 y la de -0.0001 es -1. Decimos entonces que el límite:

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn} x$$

no existe.

A manera de resumen de las ideas presentadas en los ejemplos anteriores, enfatizamos algunas de las maneras de ver (intuitivamente) el concepto de la expresión $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Decir que el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a a es igual a L, lo cual se escribe como $\lim_{x \to a} f(x) = L$, significa que:

A medida que las x se encuentran más próximas al valor a, las imágenes $f(x)$ se encontrarán más próximas al valor L.

O bien que (con un poco más de precisión):

Podemos tener las imágenes $f(x)$ tan cercanas al valor L como nosotros queramos (las podemos tener "arbitrariamente" cerca de L), teniendo a x lo suficientemente cerca del valor a.

Insistimos también en que:

El valor del límite $\lim_{x \to a} f(x)$ no tiene nada que ver con el valor de $f(x)$ en $x = a$ (es decir, con el valor $f(a)$).

La última afirmación ha sido reforzada con los ejemplos vistos en esta sección:

- Puede ser que L sea igual a $f(a)$, como en el caso $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$.
- Puede ser que $f(a)$ no existe, como en el caso $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$.
- Puede ser que, aún existiendo $f(a)$, este valor sea diferente a L, como en el caso $\lim_{x \to 0} |\operatorname{sgn} x| = 1$.

EJEMPLO 2.1.1. Estudie el límite de la función $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ cuando x tiende a cero.

SOLUCIÓN. Recuerde que la x en la función $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ es un número real (distinto de cero), y para efectos de los cálculos del seno, esta x debe considerarse en radianes. Los valores de esta función para x cerca de cero (si redondeamos en el quinto dígito después del punto decimal) se muestran en la siguiente tabla.

x	$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$	x	$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$
1	0.84147	-1	0.84147
0.5	0.95885	-0.5	0.95885
0.1	0.99833	-0.1	0.99833
0.01	0.99998	-0.01	0.99998

De los valores observados, podemos estimar que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

EJERCICIOS (2.1)

1. Complete la siguiente tabla de valores de la función $f(x) = x^2 - 2x + 4$, y a partir de ella sugiera cuánto debe valer el límite $\lim_{x \to 1} f(x)$.

x	$f(x) = x^2 - 2x + 4$	x	$f(x) = x^2 - 2x + 4$
0.5		1.5	
0.9		1.1	
0.99		1.01	
0.999		1.001	
0.9999		1.0001	

(Observe que en este caso $f(1) = (1)^2 - 2(1) + 4 = 3$).

2. Complete la siguiente tabla de valores de la función $f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 1)$, y con base en ella diga si el límite $\lim_{x \to 1} f(x)$ existe.

x	$f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 1)$	x	$f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 1)$
0.5		1.5	
0.9		1.1	
0.99		1.01	
0.999		1.001	
0.9999		1.0001	

(Observe que en este caso $f(1) = \operatorname{sgn}((1)^2 - 1) = \operatorname{sgn} 0 = 0$.)

3. ¿Verdadero o falso? Decir que $\lim_{x \to a} f(x) = L$, significa que $f(a) = L$.

4. ¿Verdadero o falso? Si $f(a)$ no existe, entonces el límite $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe.

5. ¿Verdadero o falso? Si el límite $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe, entonces $f(a)$ tampoco existe.

6. Considere la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$.

a) ¿Existe $f(1)$?

b) Haga una tabla de valores de $f(x)$ con x cercanas a 1, digamos con $x = 1.1, 1.01, 1.001, 0.9, 0.99, 0.999$, y haga una propuesta para el valor del límite $\lim_{x \to 1} f(x)$.

7. Repita el ejercicio anterior con la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1}$.

8. Considere la función $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x}$.

a) ¿Existe $f(0)$?

b) Haga una tabla de valores de $f(x)$ con x cercanas a 0, digamos con ± 0.1, ± 0.01, ± 0.001, y haga una propuesta del valor del límite $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

9. Repita el ejercicio anterior con la función $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

10. Se sabe que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 4$ en donde $f(x)$ es una función definida en $\mathbf{R}$. Considere la función $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dada por $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 1 \\ 7 & \text{si } x = 1. \end{cases}$

a) ¿Puede decir algo del valor $f(1)$?

b) ¿Puede decir algo del valor $g(1)$?

c) ¿Puede decir algo del valor del límite $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$?

d) ¿Cómo es la gráfica de $f(x)$ respecto de la de $g(x)$?

2.2 DEFINICIÓN RIGUROSA DE LÍMITE

En esta sección estudiaremos cómo se precisan matemáticamente las ideas expuestas a nivel intuitivo sobre el concepto de límite establecidas en la sección anterior. En un primer curso de Cálculo (como el presente) no es muy importante familiarizarse con esta definición, ya que a la misma Matemática le costó más de un siglo precisarla como la presentamos ahora. Sin embargo, el trabajo no riguroso que hemos tenido sobre el concepto de límite en la sección anterior nos permitirá, al menos, entender su contenido.

En la siguiente definición veremos entonces cómo se precisa la idea de "tener imágenes $f(x)$ tan cerca de L como nosotros queramos, tomando a x suficientemente cerca de a", encerrada en la expresión $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

DEFINICIÓN RIGUROSA DE LÍMITE.

Sea $f : D \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función con dominio un intervalo abierto D, el cual contiene al punto $x = a$ (aceptamos que el punto $x = a$ no pertenezca a D). Se dice que el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a a, es igual a L, lo cual se escribe como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, si dado cualquier número $\varepsilon > 0$ (por pequeño que sea) existe siempre un número $\delta > 0$ tal que:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Recuerde las desigualdades del tipo $|x - x_0| < r$: éstas representaban *vecindades* con centro en x_0 y radio r, y en ellas están contenidas aquellas x cuya distancia a x_0 es menor

que r. Podemos decir que esta desigualdad es una manera de escribir a las *x que son vecinas de x_0 en menos que r*. En la definición aparece una desigualdad del tipo $0 < |x - a| < \delta$. Se trata de una vecindad con centro en a y radio δ, en la cual hemos quitado la posibilidad de que $x = a$ (puesto que $x \neq a \Leftrightarrow x - a \neq 0 \Leftrightarrow |x - a| > 0$). Es decir, hemos retirado el centro de la vecindad $|x - a| < \delta$. Se hace de esta manera porque en la definición no se quiere comprometer el valor de la función $f(x)$ en $x = a$. A una vecindad del tipo $0 < |x - a| < \delta$ se le llama "vecindad con centro en a y radio δ, agujereada en a".

En la definición de límite se establece entonces que la expresión $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ significa que "podemos tener a $f(x)$ tan cerca de L como queramos, siempre que tengamos a x suficientemente cerca de a", o bien, en término de vecindades, "podemos hacer que $f(x)$ esté en una vecindad de centro en L y radio $\varepsilon > 0$ —que podemos hacer tan pequeño como queramos—, tomando a x en una vecindad de centro en a y radio $\delta > 0$ adecuado —y anulando la posibilidad de que $x = a$—". Por eso en tal definición se establece:

- Dado $\varepsilon > 0 \ldots$ esto significa que damos el valor que queremos que las imágenes $f(x)$ disten de L. Esta distancia la podemos dar arbitrariamente: de 10^{-10} si se nos antoja, o más pequeña aún.

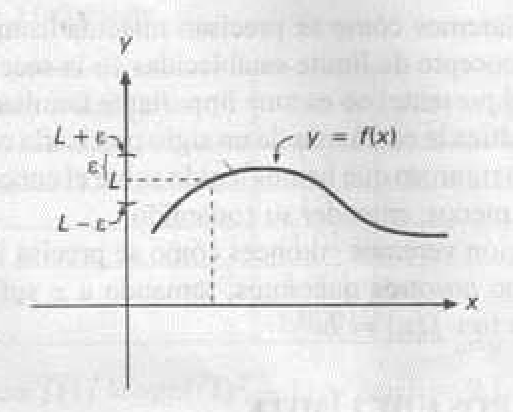


Figura 2.2.1. Dado $\varepsilon > 0 \ldots$

- $\ldots$ existe $\delta > 0 \ldots$ este número es el tamaño de la vecindad que tendrá su centro en a, y que, en general, dependerá del tamaño que dimos de la vecindad con centro en L y radio $\varepsilon > 0$.

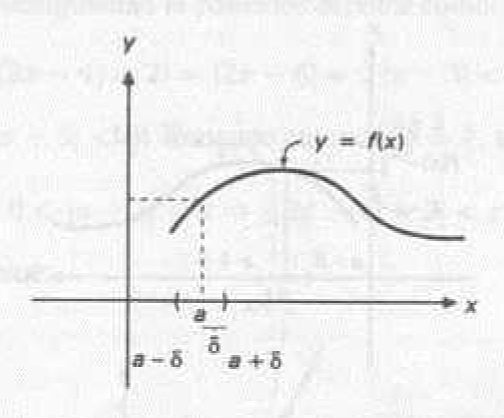


Figura 2.2.2. ... existe $\delta > 0$ ...

- ... tal que cualquier x que diste de a en menos que $\delta > 0$ (es decir, tal que si la x está en la vecindad que se determinó en la etapa anterior), entonces su imagen $f(x)$ estará cerca de L en menos que $\varepsilon > 0$ (es decir, su imagen $f(x)$ estará en la vecindad con centro en L y radio $\varepsilon > 0$ que inicialmente dimos).

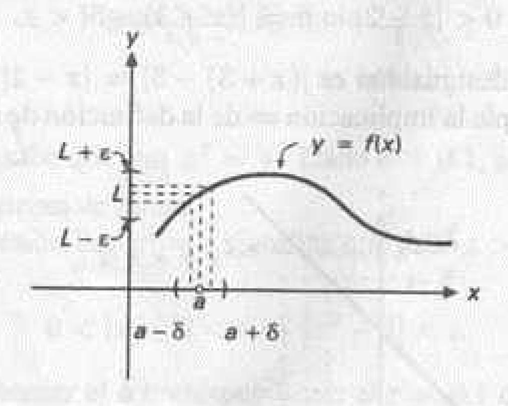


Figura 2.2.3. ... tal que todas las $x$de la vecindad de la figura 2.2.2 tienen su imagen $f(x)$ dentro de la vecindad de la figura 2.2.1.

Con símbolos: la expresión $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ significa que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$0 < \lvert x - a\rvert < \delta$	$\Rightarrow$	$\lvert f(x) - L\rvert < \varepsilon$
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
si x está en una vecindad con centro en a y radio δ, $x \neq a$	entonces	la imagen $f(x)$ se encontrará en una vecindad con centro en L y radio ε

Gráficamente esta definición se muestra en la figura 2.2.4.

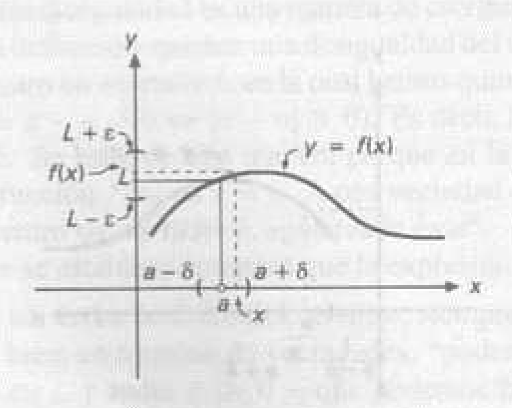


Figura 2.2.4. El concepto de $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

EJEMPLO 2.2.1. Establezca el significado preciso de la expresión $\lim_{x\to 2} (x+3) = 5$. Dado un $\varepsilon > 0$, obtenga el $\delta > 0$ tal que se satisfaga la definición rigurosa de límite.

SOLUCIÓN. La expresión $\lim_{x\to 2} (x+3) = 5$ significa que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |(x+3)-5| < \varepsilon.$$

Observe que la última desigualdad es $|(x+3)-5| = |x-2| < \varepsilon$. Tomando entonces $\delta = \varepsilon$, es claro que se cumple la implicación $\Rightarrow$ de la definición de límite. Geométricamente:

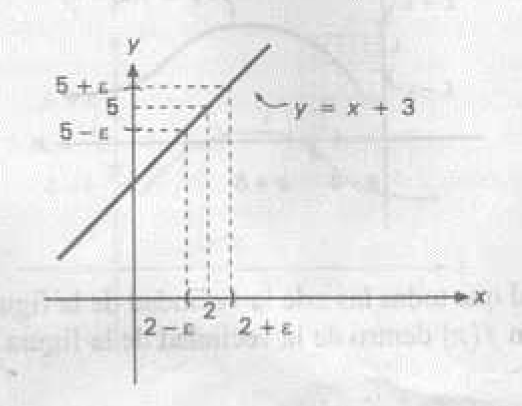


Figura 2.2.5. Ejemplo 2.2.1.

★

EJEMPLO 2.2.2. Se sabe que $\lim_{x\to 3} (2x-4) = 2$. Dado un $\varepsilon > 0$, obtenga el $\delta > 0$ tal que se satisfaga la definición rigurosa de límite.

SOLUCIÓN. La expresión $\lim_{x\to 3} (2x-4) = 2$ significa que dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |(2x-4)-2| < \varepsilon.$$

Observe que la última desigualdad la podemos escribir como:

$$|(2x-4)-2| = |2x-6| = 2|x-3| < \varepsilon,$$

de donde se obtiene que $|x-3| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tomando entonces $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, se satisface la implicación:

$$0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |(2x-4)-2| < \varepsilon.$$

Geométricamente se tiene:

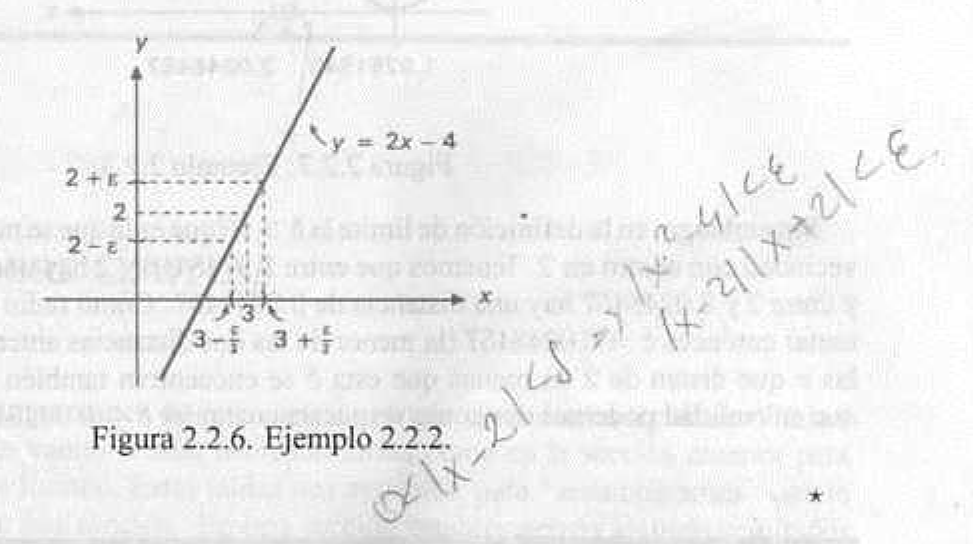


Figura 2.2.6. Ejemplo 2.2.2.

★

EJEMPLO 2.2.3. Se sabe que $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$. Dado $\varepsilon = 0.1$, obtenga el $\delta > 0$ tal que se satisfaga la definición rigurosa de límite.

SOLUCIÓN. La expresión $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$ significa que dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |x^2-4| < \varepsilon.$$

El ejemplo nos pide obtener el δ correspondiente al $\varepsilon = 0.1$ dado. Es decir, puesto que $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$ sabemos que podemos tener las imágenes x^2 tan cerca de 4 como queramos, tomando a x suficientemente cerca de 2. El ejemplo nos dice: se quieren tener las imágenes x^2 cerca de 4 en menos de 0.1 (o bien, se quieren tener las imágenes x^2 entre 3.9 y 4.1); diga qué tan cerca debemos tomar las x de 2 para lograr esto (es decir, qué tan cerca deben estar las x de 2 para que x^2 esté entre 3.9 y 4.1). Nos piden un radio $\delta > 0$ de una vecindad con centro en 2, tal que todas las x de esta vecindad tengan su imagen x^2 entre 3.9 y 4.1. Podemos proceder con argumentos geométricos: sabemos que la función $y = x^2$ es una parábola con vértice en el origen que abre hacia arriba, y que pasa por el punto $(2, 4)$. Veamos cuáles son las x tales que $x^2 = 3.9$ y $x^2 = 4.1$. Hay, de hecho, dos opciones al despejar la x de estas expresiones, pero, por el contexto del ejemplo, es claro que estamos trabajando en el primer cuadrante. Por lo tanto $x_1 = \sqrt{3.9} \approx 1.9748418$ es la x cuya imagen x^2 es 3.9, y $x_2 = \sqrt{4.1} \approx 2.0248457$ es la x cuya imagen x^2 es 4.1. Así, podemos afirmar que todas las x que se encuentren entre $x_1 = 1.9748418$ y $x_2 = 2.0248457$ tendrán su imagen entre 3.9 y 4.1 (en la vecindad deseada).

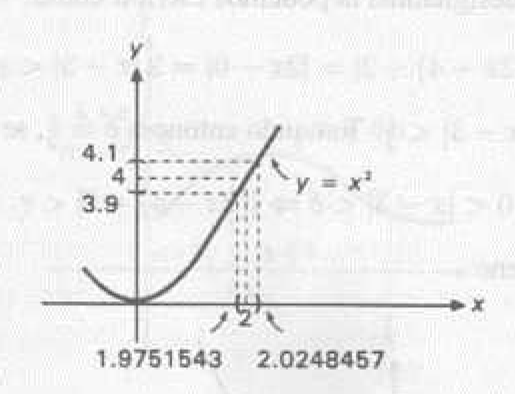


Figura 2.2.7. Ejemplo 2.2.3.

Sin embargo, en la definición de límite la $\delta > 0$ (que es la que se nos pide) es el radio de una vecindad con centro en 2. Tenemos que entre 1.9748418 y 2 hay una distancia de 0.0251582 y entre 2 y 2.0248457 hay una distancia de 0.0248457. Como radio de la vecindad podemos tomar entonces $\delta = 0.0248457$ (la menor de las dos distancias anteriores), pues es claro que las x que distan de 2 en menos que esta δ se encuentran también entre x_1 y x_2. Observe que en realidad podemos dar como respuesta cualquier $\delta \leq 0.0248457$.

⋆

EJERCICIOS (2.2)

En cada uno de los ejercicios 1 al 15, se da una expresión del tipo $\lim_{x\to a} f(x) = L$. *Dado el* $\varepsilon > 0$ *indicado, determine una correspondiente* $\delta > 0$ *tal que se cumpla la implicación* $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

1. $\lim_{x\to 2} (3) = 3, \varepsilon = 0.1.$
2. $\lim_{x\to 2} (3) = 3, \varepsilon = 0.0000001.$
3. $\lim_{x\to 2} (3x) = 6, \varepsilon = 0.02.$
4. $\lim_{x\to 2} (2x) = 4, \varepsilon = 0.02.$
5. $\lim_{x\to -2} (x+4) = 2, \varepsilon = 0.2.$
6. $\lim_{x\to 1} (3x+1) = 4, \varepsilon = 0.02.$
7. $\lim_{x\to -1} (2x+3) = 1, \varepsilon = 0.03.$
8. $\lim_{x\to 0} (4-5x) = 4, \varepsilon = 0.1.$
9. $\lim_{x\to 2} (x^2+1) = 5, \varepsilon = 0.1.$
10. $\lim_{x\to -1} (2x^2+1) = 3, \varepsilon = 0.02.$
11. $\lim_{x\to -2} (3x^2-5) = 7, \varepsilon = 0.3.$
12. $\lim_{x\to -1} x^3 = -1, \varepsilon = 0.2.$
13. $\lim_{x\to 2} (3x^3) = 24, \varepsilon = 0.1.$
14. $\lim_{x\to 1} (2x^3+4) = 6, \varepsilon = 0.4.$
15. $\lim_{x\to 1} (x^4+1) = 2, \varepsilon = 0.2.$

16. Se sabe que $\lim_{x\to a} (mx+b) = ma+b$ (en donde $m \neq 0$). Dado un $\varepsilon > 0$ determine el $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |(mx+b) - (ma+b)| < \varepsilon.$$

17. Sea a un número real positivo. Se sabe que $\lim_{x\to a} x^2 = a^2$. Dado un $\varepsilon > 0$ determine el $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left|x^2 - a^2\right| < \varepsilon.$$

2.3 TEOREMAS SOBRE LÍMITES

Uno de los objetivos importantes de este capítulo es que aprendamos a calcular límites de algunas funciones. No vamos a estar haciendo tablas como en la sección anterior para estimar los valores de los límites. Estas tablas nos ayudaron para "sensibilizarnos" con la idea intuitiva de límite de una función. En esta sección estableceremos algunos resultados generales (que en matemáticas se llaman "teoremas"), que nos servirán para hacer cálculos con límites de manera eficiente. Cada uno de estos teoremas tiene una demostración que lo valida, y solamente de algunos de ellos la daremos en el texto (las restantes se pueden consultar en textos sobre la materia un poco más avanzados). En algunos casos, daremos argumentos geométricos e intuitivos que hagan "creíble" el contenido del teorema.

TEOREMA 2.3.1. *Si $f(x) = c$ (una función constante), entonces el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es igual a c. Es decir,*

$$\lim_{x\to a} c = c.$$

Éste es un resultado hasta cierto punto trivial: la función constante $f(x) = c$ manda a **toda** x real al valor c. Si nos preguntamos, ¿en dónde se encuentran las imágenes $f(x)$ si x está cerca de a?, la respuesta debe ser inmediata: donde quiera que estén las x, las imágenes $f(x)$ son siempre iguales a a. De ahí que el límite de la función $f(x) = c$, cuando x tiende a a, sin importar quién es este número, es justamente c.

Desde el punto de vista de la definición rigurosa de límite, es claro que si damos un $\varepsilon > 0$, y tomamos **cualquier** $\delta > 0$, todas las x que disten de a en menos que δ, tendrán su imagen (¡que es igual a c para todas!) distando de c en menos que ε (de hecho, tal distancia entre las imágenes de las x en la vecindad $0 < |x-a| < \delta$ y el valor c, es igual a cero: es decir, todas las imágenes de tales x irán a dar al centro de la vecindad con centro en c y radio ε).

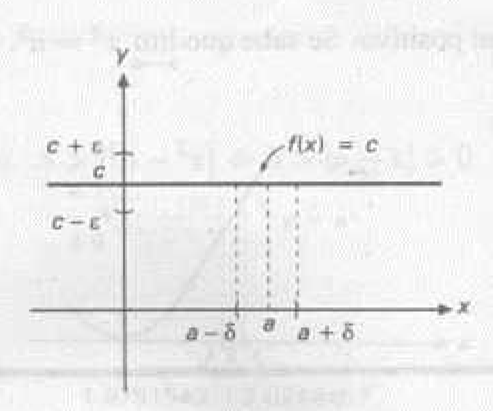


Figura 2.3.1. El límite de una función constante $\lim_{x\to a} c = c$.

Por ejemplo, $\lim_{x\to 4} 8 = 8$, $\lim_{x\to -2343} 12 = 12$, $\lim_{x\to 5\pi^2} 10 = 10$, etcétera.

TEOREMA 2.3.2. *Si $f(x) = x$ (la función identidad), entonces el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es igual a a. Es decir,*

$$\lim_{x\to a} x = a.$$

También este teorema resulta muy fácil de aceptar. La función identidad $f(x) = x$ deja intacta a la x y le asocia el mismo valor como imagen. Así, si las x se encuentran cerca de a, las imágenes $f(x) = x$ se encontrarán también cerca de a.

Desde el punto de vista de la definición rigurosa, para ver que $\lim_{x\to a} x = a$, si se da un $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \varepsilon$, y se cumplirá la definición de límite (¡verifique!)

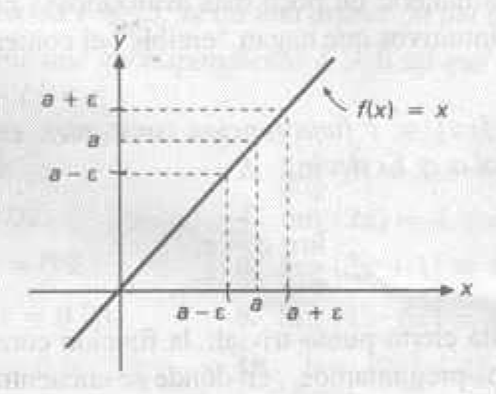


Figura 2.3.2. El límite de la función identidad $\lim_{x\to a} x = a$.

TEOREMA 2.3.3. *Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones para las cuales $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$, entonces el límite de la función suma $(f + g)(x)$ cuando x tiende a a es igual a $L + M$ (la suma de los límites de cada una de las funciones). Es decir,*

$$\lim_{x\to a} (f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L + M.$$

[Demostración rigurosa opcional: se quiere demostrar que dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |(f(x)+g(x))-(L+M)| < \varepsilon.$$

Sabemos que dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta_1 > 0$ tal que:

$$0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-L| < \frac{\varepsilon}{2},$$

y que dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta_2 > 0$ tal que:

$$0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x)-M| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Usando la desigualdad triangular, obtenemos que:

$$|(f(x)+g(x))-(L+M)| = |(f(x)-L)-(g(x)-M)| \leq |f(x)-L|+|g(x)-M| < \varepsilon,$$

lo cual ocurre si $0 < |x-a| < \delta_1$ y $0 < |x-a| < \delta_2$. Entonces, si tomamos $\delta \leq \min(\delta_1, \delta_2)$, obtenemos la implicación deseada].

Lo que establece este teorema es que "el límite de una suma de funciones es igual a la suma de los límites de cada una de las funciones" (suponiendo que los límites de cada una de las funciones dadas existe). Ésta es una propiedad muy interesante de los límites de funciones que explotaremos mucho en lo que sigue. Con ella podemos empezar a hacer algunos pinitos para calcular límites sencillos: supongamos que queremos calcular el límite $\lim_{x\to 3}(x+5)$. Usando los tres teoremas anteriores tenemos que:

$$\lim_{x\to 3}(x+5) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{teorema 3}}}{=} \lim_{x\to 3} x + \lim_{x\to 3} 5 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{teoremas 1 y 2}}}{=} 3+5 = 8$$

El teorema 3 se generaliza de manera natural para k funciones: si $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ son k funciones tales que $\lim_{x\to a} f_1(x) = L_1$, $\lim_{x\to a} f_2(x) = L_2, \ldots, \lim_{x\to a} f_k(x) = L_k$, entonces:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}(f_1+f_2+\ldots+f_k)(x) &= \lim_{x\to a} f_1(x) + \lim_{x\to a} f_2(x) + \ldots + \lim_{x\to a} f_k(x) \\ &= L_1+L_2+\ldots+L_k.\end{aligned}$$

TEOREMA 2.3.4. *Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones para las cuales $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$, entonces el límite de la función producto $(fg)(x)$ cuando x tiende a a es igual a LM (el producto de los límites de cada una de las funciones). Es decir,*

$$\lim_{x\to a}(fg)(x) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = LM.$$

Lo que se establece en este teorema es que "el límite de un producto de funciones es el producto de los límites de cada una de las funciones" (suponiendo que estos últimos límites existan). También ésta es una propiedad que explotaremos mucho en los cálculos de límites.

y que se generaliza de manera natural como en el caso de la suma: si $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ son k funciones tales que $\lim_{x\to a} f_1(x) = L_1, \lim_{x\to a} f_2(x) = L_2, \ldots, \lim_{x\to a} f_k(x) = L_k$, entonces:

$$\lim_{x\to a}(f_1 f_2 \ldots f_k)(x) = \left(\lim_{x\to a} f_1(x)\right)\left(\lim_{x\to a} f_2(x)\right)\ldots\left(\lim_{x\to a} f_k(x)\right) = (L_1)(L_2)\ldots(L_k).$$

Los siguientes corolarios son un par de resultados útiles que se deducen inmediatamente del teorema anterior y de los teoremas 1 y 2.

COROLARIO 1. *Si $f(x)$ es una función tal que $\lim_{x\to a} f(x) = L$, y c es cualquier constante, entonces:*

$$\lim_{x\to a}(cf(x)) = c\lim_{x\to a} f(x) = cL.$$

En efecto,

$$\lim_{x\to a}(cf(x)) \underset{\text{teorema 3}}{=} \left(\lim_{x\to a} c\right)\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) \underset{\text{teorema 1}}{=} c\lim_{x\to a} f(x) = cL$$

COROLARIO 2. *Si $f(x) = x^n$, en donde n es un número natural, entonces:*

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n.$$

En efecto, usando la generalización del teorema 4 y el teorema 2, tenemos:

$$\lim_{x\to a} x^n = \lim_{x\to a}\left(\underbrace{xx\ldots x}_{n \text{ veces}}\right) = \underbrace{\left(\lim_{x\to a} x\right)\left(\lim_{x\to a} x\right)\ldots\left(\lim_{x\to a} x\right)}_{n \text{ veces}} = \underbrace{aa\ldots a}_{n \text{ veces}} = a^n.$$

A su vez, una consecuencia muy importante de los dos corolarios anteriores es el siguiente resultado que escribimos como teorema.

TEOREMA 2.3.5. *Si $f(x)$ es una función polinomial de grado n, entonces:*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

En efecto, digamos que $f(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$, entonces, usando la generalización del teorema 3, el corolario 1 y el corolario 2 (en este orden), podemos escribir:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0\right)$$

$$= \lim_{x\to a} b_n x^n + \lim_{x\to a} b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \lim_{x\to a} b_1 x + \lim_{x\to a} b_0$$

$$= b_n \lim_{x\to a} x^n + b_{n-1}\lim_{x\to a} x^{n-1} + \ldots + b_1 \lim_{x\to a} x + \lim_{x\to a} b_0$$

$$= b_n a^n + b_{n-1}a^{n-1} + \dots + b_1 a + b_0 = f(a).$$

Con la ayuda de este teorema ya podemos calcular los límites de todas las funciones polinomiales. Se trata de aquellas "buenas funciones" que mencionábamos en la primera sección, para las cuales el valor del límite cuando x tiende a a es igual a $f(a)$.

Por ejemplo,

$$\lim_{x\to 2}(3x^2 + 2x - 4) = 3(2)^2 + 2(2) - 4 = 12,$$

$$\lim_{x\to -1}(x^3 - x^2 + 3) = (-1)^3 - (-1)^2 + 3 = 1,$$

etcétera.

En el caso de un cociente de funciones, la operación de tomar el límite del cociente se porta tan bien como lo hace con la suma y con el producto.

TEOREMA 2.3.6. *Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones para las cuales $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$, y $M \neq 0$, entonces el límite de la función cociente $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ cuando x tiende a a es igual a $\frac{L}{M}$ (el cociente de los límites de cada una de las funciones). Es decir,*

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{M}.$$

Este teorema establece que "el límite de un cociente de funciones es igual al cociente de los límites de las funciones" (suponiendo que estos límites existan y que el límite de la función del denominador es diferente de cero). Con este teorema podemos ampliar considerablemente el tipo de funciones para las cuales es muy fácil calcular el límite.

TEOREMA 2.3.7. *Si $f(x)$ es una función racional y a es un punto del dominio de la función, entonces:*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

En efecto, al ser $f(x)$ una función racional es el cociente de dos funciones polinomiales, digamos que $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, en donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinomiales. El dominio de esta función es el conjunto de todos los números reales (la intersección de los dominios de $p(x)$ y $q(x)$, ambos iguales a todos los reales), excepto aquellos puntos en que el denominador es cero. Es decir, el dominio de $f(x)$ es el conjunto $\mathbf{R} - \{x \in \mathbf{R} \mid q(x) = 0\}$. Así, el punto $x = a$, al estar en el dominio de la función $f(x)$ es un punto para el cual $q(x) \neq 0$. Como, por el teorema 5, tenemos que $\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$ y $\lim_{x\to a} q(x) = q(a) \neq 0$, usando el teorema 6 obtenemos que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to a} p(x)}{\lim_{x\to a} q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)} = f(a).$$

Así pues, las funciones racionales son también "buenas funciones", pues el cálculo de sus límites, cuando la x tiende a algún número del dominio de la función, es muy sencillo. (En ocasiones nos referiremos al teorema 2.3.7 como **teorema de la sustitución.**)

Por ejemplo:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3}{2x+5}=\frac{(2)^2+3}{2(2)+5}=\frac{7}{9},$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{3x^3+2x^2-4x+5}{2x^5+3x^3-9x-10}=\frac{3(-3)^3+2(-3)^2-4(-3)+5}{2(-3)^5+3(-3)^3-9(-3)-10}=\frac{23}{275},$$

etcétera.

Veamos un teorema más.

TEOREMA 2.3.8. *Si $f(x)$ es una función tal que $\lim_{x\to a} f(x)=L$, y n es un entero positivo impar, entonces:*

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{L}.$$

Si n es un entero positivo par, la fórmula anterior vale también cuando $L\geq 0$.

Con este teorema podremos calcular los límites de muchas más funciones (además de las racionales). Terminamos la sección con cinco ejemplos sencillos.

EJEMPLO 2.3.1. Calcular el límite $\lim_{x\to 1}\left[(x^2-2x)(x+4)\right]$.

SOLUCIÓN. La función $f(x)=(x^2-2x)(x+4)$ es una función polinomial, de modo que podemos usar el teorema 2.3.5 para escribir:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\left[(x^2-2x)(x+4)\right]=f(1)=\left((1)^2-2\right)(1+4)=(-1)(5)=-5.$$

Insistimos en que el resultado -5 del límite $\lim_{x\to 1}\left[(x^2-2x)(x+4)\right]$ *no significa que la función $f(x)=(x^2-2x)(x+4)$ tome el valor de -5 cuando x es igual a* 1. Esto es efectivamente cierto y lo hemos usado para calcular el valor del límite. Pero el significado del resultado obtenido $\lim_{x\to 1}\left[(x^2-2x)(x+4)\right]=-5$ es que los valores que toma la función $f(x)=(x^2-2x)(x+4)$ pueden estar tan cerca de -5 como nosotros queramos, si se toma a x suficientemente cerca de 1.

★

EJEMPLO 2.3.2. Calcular el límite $\lim_{x\to -1}\frac{(3x+2)(x+1)+(x^2+2)(2x+3)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

SOLUCIÓN. La función $f(x)=\frac{(3x+2)(x+1)+(x^2+2)(2x+3)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ es una función racional cuyo dominio son todos los números reales excepto los ceros del denominador: $x=1$, $x=2$ y $x=3$. Como $x=-1$ se encuentra entonces dentro del dominio de la función, podemos usar el teorema 2.3.7 para calcular el límite, el cual es:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{(3x+2)(x+1)+(x^2+2)(2x+3)}{(x-1)(x-2)(x-3)} = f(-1)$$

$$= \frac{(3(-1)+2)(-1+1)+((-1)^2+2)(2(-1)+3)}{(-1-1)(-1-2)(-1-3)} = \frac{(-1)(0)+(3)(1)}{(-2)(-3)(-4)} = -\frac{1}{8},$$

lo que significa, entonces, que las imágenes de la función $f(x) = \frac{(3x+2)(x+1)+(x^2+2)(2x+3)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ pueden estar tan cerca de $-\frac{1}{8}$ como nosotros queramos, tomando a x suficientemente cerca del valor -1.

★

EJEMPLO 2.3.3. Calcular el límite $\lim_{x\to 2} \frac{5x+2+\sqrt{x^2+5}}{3x^2-1-\sqrt[3]{3x^3+3}}$ y dar el significado del valor calculado.

SOLUCIÓN. Es una aplicación de varios de los teoremas sobre límites vistos en la sección 2 (sobre el cociente, la suma y la raíz de una función polinomial). Paso a paso podemos escribir:

$$\lim_{x\to 2} \frac{5x+2+\sqrt{x^2+5}}{3x^2-1-\sqrt[3]{3x^3+3}} = \frac{\lim_{x\to 2}\left(5x+2+\sqrt{x^2+5}\right)}{\lim_{x\to 2}\left(3x^2-1-\sqrt[3]{3x^3+3}\right)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 2}(5x+2)+\sqrt{\lim_{x\to 2}(x^2+5)}}{\lim_{x\to 2}(3x^2-1)-\sqrt[3]{\lim_{x\to 2}(3x^3+3)}} = \frac{5(2)+2+\sqrt{(2)^2+5}}{3(2)^2-1-\sqrt[3]{3(2)^3+3}} = \frac{12+3}{11-3} = \frac{15}{8}.$$

Este valor que encontramos significa que dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow \left| \frac{5x+2+\sqrt{x^2+5}}{3x^2-1-\sqrt[3]{3x^3+3}} - \frac{15}{8} \right| < \varepsilon.$$

★

EJEMPLO 2.3.4. Calcular el límite $\lim_{x\to 1} \sqrt{2x^2+4x+1}$.

SOLUCIÓN. Como $\lim_{x\to 1}(2x^2+4x+1) = 2(1)^2+4(1)+1 = 7 \geq 0$, el teorema 2.3.8 nos dice que $\lim_{x\to 1} \sqrt{2x^2+4x+1} = \sqrt{7}$.

★

EJEMPLO 2.3.5. Calcular el límite $\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{\frac{5x+16}{3x-2}}$.

SOLUCIÓN. Por el teorema 2.3.8 se tiene

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{\frac{5x+16}{3x-2}} = \sqrt[3]{\frac{5(0)+16}{3(0)-2}} = \sqrt[3]{-8} = -2.$$

EJERCICIOS (2.3)

En los ejercicios 1 al 15, calcule el límite indicado. Escriba el significado del valor calculado en cada caso.

1. $\lim\limits_{x\to 3} (3x^2 - 2x - 2).$

2. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+x+1}{2x+5}.$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1+x^2}.$

4. $\lim\limits_{x\to 2} (x-2)^2.$

5. $\lim\limits_{x\to 1} (3x^2 - x - 1)^3.$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{2 + (2x^2+3x+1)^4}.$

7. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-3)(x-2)(x-1)}{(x+3)(x+2)(x+1)}.$

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)(1+4x)}{(1-x)(1-2x)(1-3x)(1-4x)}.$

9. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x}.$

10. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{1+\sqrt{1-\sqrt{2-\sqrt{1+x}}}}.$

11. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x^2-1)(x^2-2)(x^2-3)(x^2-4)}{(x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)(x^2+4)}.$

12. $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+\left(2+\left(3+(4+x)^4\right)^3\right)^2\right).$

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)(2+x)(3+x)(4+x)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}.$

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)+(2+x)+(3+x)+(4+x)}{(1-x)+(1-x^2)+(1-x^3)+(1-x^4)}.$

15. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1+\frac{2+\frac{3+\frac{1}{x}}{4}}{1+\frac{3+\frac{2}{x}}{2}}}{5+\frac{4+\frac{3+\frac{2}{x}}{2}}{5}}.$

16. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones tales que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$ y $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = -2$.

a) ¿Qué puede decir de $f(1)$ y de $g(1)$?

b) Calcule el límite $\lim\limits_{x\to 1} (f+g)(x)$.

c) Calcule el límite $\lim\limits_{x\to 1} (fg)(x)$.

d) Calcule el límite $\lim_{x\to 1}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

17. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones tales que $\lim_{x\to -1} f(x) = 2$ y $\lim_{x\to -1} g(x) = 0$. Calcule el límite

$$\lim_{x\to -1} \frac{(f^2 + 2g^2 + 3fg)(x)}{(g^3 + 2fg + f^3)(x)}.$$

18. Suponga que $g(x)$ es una función tal que $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. Si $f(x)$ es una función cualquiera, ¿qué puede decir del valor del límite $\lim_{x\to 0}(fg)(x)$? (Sugerencia: si casi no resiste la tentación de responder que el límite del producto fg es igual a cero, piense en el caso en que $g(x) = x$ y $f(x) = \frac{1}{x}$.)

19. Considere las funciones

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < -1 \\ 2 & \text{si } x = -1 \\ 5 & \text{si } -1 < x \le 1 \\ x+6 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+1} & \text{si } x < -2 \\ 3x+2 & \text{si } -2 \le x < 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \\ 2x-1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Calcule $(f+g)(1)$.
b) Calcule $\lim_{x\to 0}(f+g)(x)$.
c) Calcule $(fg)(2)$.
d) Calcule $\lim_{x\to -3}(fg)(x)$.
e) Calcule $\lim_{x\to 3}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

2.4 ALGUNAS FORMAS INDETERMINADAS $\frac{0}{0}$ (FUNCIONES ALGEBRAICAS)

Ahora vamos a estudiar el problema de calcular límites $\lim_{x\to a} f(x)$, cuando $f(a)$ no existe. En particular, en el caso de que $f(a)$ sea una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$. Por ejemplo, cuando $f(x)$ es una función racional y $x = a$ es raíz de las dos funciones polinomiales que aparecen en el cociente de $f(x)$ (es decir, al sustituir $x = a$ en tales funciones polinomiales obtenemos como resultado 0). Sabemos, por la experiencia de los ejemplos presentados en la sección 1, que el hecho de que $f(a)$ no exista, no tiene relación alguna con el límite $\lim_{x\to a} f(x)$.

Vamos a comenzar por estudiar el caso de funciones racionales $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ (con $p(x)$ y $q(x)$ funciones polinomiales) en las que $p(a) = q(a) = 0$.

Tomemos por ejemplo la función $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}$. El dominio de esta función son todos los números reales excepto $x = 1$, pues $f(1) = \frac{0}{0}$. Si quisiéramos calcular el límite $\lim_{x\to 2} f(x)$, podemos aplicar directamente el teorema 7 de la sección anterior, pues $x = 2$ pertenece al dominio de $f(x)$, y nos queda

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = \frac{(2)^3-1}{(2)^2-1} = \frac{7}{3}.$$

Sin embargo, para calcular el límite $\lim_{x\to 1} f(x)$, ya no es posible usar el teorema 7, ya que $x = 1$ no pertenece al dominio de $f(x)$. La idea que trabajaremos en esta sección es:

Promover un intercambio de la función dada $f(x)$ por otra función idéntica a $f(x)$ (excepto en $x = 1$), a la que sí podamos aplicar el teorema 7 (de Sustitución) para calcular el límite.

¿Cómo saber por cuál función debemos intercambiar a $f(x)$? Observe que:

$$f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+x+1}{x+1}, \text{ si } x \neq 1.$$

El numerador x^3-1 se anula cuando $x = 1$. Lo hemos factorizado como $(x-1)(x^2+x+1)$. Al ver esta factorización, podemos exclamar: ¡Aja!, el causante de que x^3-1 se volviera cero cuando $x = 1$ es el factor $x-1$ que aparece en su factorización, pues al sustituir $x = 1$ en x^3-1 los cálculos se ven como $(1)^3-1 = (1-1)\left((1)^2+1+1\right) = (0)(3) = 0$. De la misma manera, al ver que $x^2-1 = (x-1)(x+1)$, notamos que el causante de que x^2-1 se vuelva cero cuando $x = 1$ es el factor $x-1$ que aparece en su factorización. Lo que queremos hacer es *eliminar* estas causas de cero del numerador y del denominador de $f(x)$. Así, la función $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1}$ es idéntica a la función original, excepto en $x = 1$. Recuerde que en este tema de límites no nos interesa qué pasa con la función original $f(x)$ en $x = 1$. Lo que en realidad nos interesa es *a dónde se aproximan los valores de $f(x)$ cuando x se encuentra cerca de* 1, y el teorema 7 nos dice que para funciones racionales se puede calcular el límite de una manera muy sencilla cuando el punto a donde tiende la x pertenece al dominio de la función racional $f(x)$. Ésta es justamente la situación a la que le queremos sacar provecho.

En resumen, nuestros cálculos se verían como:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{(1)^2+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}.$$

Es decir, hemos obtenido que las imágenes de la función $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}$ se encuentran cerca de $L = \frac{3}{2}$ cuando las x se encuentran cerca de 1.

Veamos un ejemplo más. Queremos calcular el límite:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4x-12}{x^4-16}.$$

Nuevamente observamos que la función $f(x) = \frac{x^2+4x-12}{x^4-16}$ no existe en $x = 2$, pues $f(2) = \frac{(2)^2+4(2)-12}{(2)^4-16} = \frac{0}{0}$. Hagamos la factorización del numerador y del denominador como en el ejemplo anterior, para poder eliminar las causas de los ceros en estos términos. El numerador es un trinomio que se factoriza como $x^2 + 4x - 12 = (x-2)(x+6)$ (ahí está el causante del cero del numerador: el factor $x - 2$). El denominador lo podemos ver inicialmente como una diferencia de cuadrados $x^4 - 16 = (x^2)^2 - (4)^2 = (x^2-4)(x^2+4)$. A su vez, el primer factor es también una diferencia de cuadrados $x^2 - 4 = x^2 - (2)^2 = (x-2)(x+2)$, de modo que $x^4 - 16 = (x-2)(x+2)(x^2+4)$ (ahí está el causante del cero del denominador: el factor $x - 2$). Entonces, las operaciones para calcular el límite se verían como:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+4x-12}{x^4-16} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+6)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+6}{(x+2)(x^2+4)} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}.$$

Es decir, las imágenes de la función $f(x) = \frac{x^2+4x-12}{x^4-16}$ se encuentran cerca de $L = \frac{1}{4}$, cuando x se encuentra cerca de $x = 2$.

A manera de resumen, destacamos la idea central para calcular límites $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ de funciones racionales $f(x)$ en el caso de que $f(a) = \frac{0}{0}$ (no exista):

Factorizar los polinomios del numerador y denominador de la fracción $f(x)$ para eliminar los factores que sean los causantes de los ceros en tales polinomios.

Existen, sin embargo, problemas que presentan dificultades adicionales. Consideremos, por ejemplo, el cálculo del límite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^3-3x^2+2x-1}{x^4+3x^2+x-5}.$$

La función racional $f(x) = \frac{2x^3-3x^2+2x-1}{x^4+3x^2+x-5}$ no existe en $x = 1$, pues $f(1) = \frac{0}{0}$. Al aplicar la idea enfatizada anteriormente, nos encontramos con una dificultad técnica: ¿cómo factorizar los polinomios del numerador y denominador de esta función? Esta dificultad la podemos resolver usando el teorema del factor: puesto que el polinomio (del numerador de $f(x)$) $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ tiene a $x = 1$ por raíz (es decir, como $p(1) = 0$), entonces $p(x)$ se puede factorizar como $p(x) = (x-1)\widetilde{p}(x)$, en donde $\widetilde{p}(x)$ es un polinomio de grado dos. Similarmente, como el polinomio (del denominador de $f(x)$) $q(x) = x^4 + 3x^2 + x - 5$ tiene a $x = 1$ por raíz (pues $q(1) = 0$), entonces podemos factorizarlo como $q(x) = (x-1)\widetilde{q}(x)$, en donde $\widetilde{q}(x)$ es un polinomio de grado tres. Los polinomios $\widetilde{p}(x)$ y $\widetilde{q}(x)$ se pueden determinar con la técnica de la división sintética. Más concretamente, puesto que $p(x) = (x-1)\widetilde{p}(x)$ entonces $\widetilde{p}(x) = \frac{p(x)}{x-1} = \frac{2x^3-3x^2+2x-1}{x-1}$. Esta división de polinomios la podemos efectuar de manera abreviada con división sintética y nos queda:

$$\begin{array}{cccc|l} 2 & -3 & 2 & -1 & \underline{|1} \\ & + & + & + & \uparrow \\ & 2 & -1 & 1 & \text{éste es el } 1 \text{ de } x-1 \\ \hline \| & \| & \| & \| & \\ 2 & -1 & 1 & \lfloor 0 & \leftarrow \text{ residuo} \end{array}$$

La presencia del residuo igual a cero indica que la división es exacta (como debía de ocurrir) y que el resultado es:

$$\widetilde{p}(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{x - 1} = 2x^2 - x + 1,$$

o bien:

$$2x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = (x - 1)(2x^2 - x + 1),$$

que es la factorización deseada de $p(x)$. Análogamente, el polinomio $\widetilde{q}(x)$ lo obtenemos con división sintética:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & 0 & 3 & 1 & -5 & \underline{1} \\ & 1 & 1 & 4 & 5 & \\ \hline 1 & 1 & 4 & 5 & 0 & \end{array}$$

de modo que:

$$\frac{x^4 + 3x^2 + x - 5}{x - 1} = x^3 + x^2 + 4x + 5,$$

o bien:

$$x^4 + 3x^2 + x - 5 = (x - 1)(x^3 + x^2 + 4x + 5),$$

que es la factorización deseada de $q(x)$.

Al retomar el límite que planteamos anteriormente, las operaciones para resolverlo se ven como:

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{x^4 + 3x^2 + x - 5} = \lim_{x\to 1} \frac{(x - 1)(2x^2 - x + 1)}{(x - 1)(x^3 + x^2 + 4x + 5)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{2x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 + 4x + 5} = \frac{2(1)^2 - 1 + 1}{(1)^3 + (1)^2 + 4(1) + 5} = \frac{2}{11}.$$

Es decir, los valores de la función $f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{x^4 + 3x^2 + x - 5}$ se encuentran muy cerca del valor $\frac{2}{11}$ cuando la x se encuentra muy cerca del valor 1.

Vamos ahora a discutir otro tipo de límites que producen formas indeterminadas $\frac{0}{0}$ pero que no provienen de funciones racionales. Las funciones que vamos a considerar ahora son algebraicas, pero tendrán en alguna parte de ellas, alguna raíz.

Consideremos el sencillo ejemplo de calcular el límite

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}.$$

Es claro que la función $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ no existe en $x = 1$, pues $f(1) = \frac{0}{0}$. Ahora no podemos pensar en la factorización de numerador y denominador, puesto que este último no es un polinomio. La estrategia que seguiremos en estos casos es *racionalizar la expresión de $f(x)$ con objeto de eliminar de ella los radicales que aparezcan.*

Teniendo en mente que:

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2,$$

podemos ver el numerador $\sqrt{x}-1$ de la función $f(x)$ como un factor del tipo $a-b$, de tal modo que si lo multiplicamos por $a+b=\sqrt{x}+1$, el resultado sería $a^2-b^2=\left(\sqrt{x}\right)^2-(1)^2=x-1$, término en el que ya no aparecen radicales. Así pues, la estrategia para calcular el límite anterior será multiplicar y dividir la función (para que ésta no se altere) por el factor $\sqrt{x}+1$, quedándonos:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left[\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right)\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\right)\right]=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}.$$

Terminamos esta sección con algunos ejemplos adicionales.

EJEMPLO 2.4.1. Calcular el límite $\lim_{x\to 1}\frac{x^4+x-2}{x^3-1}$.

SOLUCIÓN. Se verifica fácilmente que la función $f(x)=\frac{x^4+x-2}{x^3-1}$ no existe en $x=1$. Buscamos entonces la factorización del numerador y denominador como sigue: $x^4+x-2=(x-1)p_1(x)$ y $x^3-1=(x-1)q_1(x)$. Para el numerador tenemos la división sintética como:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & \lfloor 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 2 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & \end{array}$$

de modo que $x^4+x-2=(x-1)(x^3+x^2+x+2)$. El denominador x^3-1 es una diferencia de cubos, que sabemos que se factoriza como $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$. Este resultado también lo podemos obtener con división sintética:

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 0 & 0 & -1 & \lfloor 1 \\ & 1 & 1 & 1 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & \end{array}$$

Entonces:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4+x-2}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^3+x^2+x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2+x+2}{x^2+x+1}=\frac{5}{3}.$$

EJEMPLO 2.4.2. Calcular el límite $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-2x^2-2x-3}{x^4-2x^3-27}$.

SOLUCIÓN. Se verifica fácilmente que la función $f(x)=\frac{x^3-2x^2-2x-3}{x^4-2x^3-27}$ no existe en $x=3$. Procuramos entonces factores del tipo $x-3$ tanto en el polinomio del numerador como en el del denominador. Para el polinomio x^3-2x^2-2x-3 tenemos que:

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -2 & -2 & -3 & \lfloor 3 \\ & 3 & 3 & 3 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & \end{array}$$

de modo que:

$$x^3 - 2x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x^2 + x + 1).$$

Análogamente para el denominador se tiene:

$$\begin{array}{rrrrrl} 1 & -2 & 0 & 0 & -27 & \lfloor 3 \\ & 3 & 3 & 9 & 27 & \\ \hline 1 & 1 & 3 & 9 & & \end{array}$$

de modo que:

$$x^4 - 2x^3 - 27 = (x-3)(x^3 + x^2 + 3x + 9).$$

Entonces el cálculo del límite se ve como:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 2x - 3}{x^4 - 2x^3 - 27} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x^2+x+1)}{(x-3)(x^3+x^2+3x+9)} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2+x+1}{x^3+x^2+3x+9} = \frac{13}{54}.$$

★

EJEMPLO 2.4.3. Calcular el límite $\lim_{x \to 2} \frac{x^4-2x^3-7x^2+20x-12}{x^5-2x^4-4x^3+9x^2-4x+4}$.

SOLUCIÓN. La función $f(x) = \frac{x^4-2x^3-7x^2+20x-12}{x^5-2x^4-4x^3+9x^2-4x+4}$ no existe en $x = 2$. Factoricemos el numerador como el producto de $x - 2$ por algún polinomio de grado 3. Al hacer la división sintética obtenemos:

$$\begin{array}{rrrrrl} 1 & -2 & -7 & 20 & -12 & \lfloor 2 \\ & 2 & 0 & -14 & 12 & \\ \hline 1 & 0 & -7 & 6 & 0 & \end{array}$$

de modo que:

$$x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12 = (x-2)(x^3 - 7x + 6).$$

Similarmente para el denominador se tiene:

$$\begin{array}{rrrrrrl} 1 & -2 & -4 & 9 & -4 & 4 & \lfloor 2 \\ & 2 & 0 & -8 & 2 & -4 & \\ \hline 1 & 0 & -4 & 1 & -2 & 0 & \end{array}$$

de modo que:

$$x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 4 = (x-2)(x^4 - 4x^2 + x - 2).$$

Los cálculos del límite dado se ven como:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12}{x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^3 - 7x + 6)}{(x-2)(x^4 - 4x^2 + x - 2)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 7x + 6}{x^4 - 4x^2 + x - 2}.$$

Observe que este último límite no lo podemos evaluar con el teorema 2.3.7, ya que la nueva función $f(x)=\frac{x^3-7x+6}{x^4-4x^2+x-2}$ tampoco existe en $x=2$ (se tiene $f(2)=\frac{(2)^3-7(2)+6}{(2)^4-4(2)^2+2-2}=\frac{0}{0}$). Nos encontramos entonces con un problema análogo al original, que ya sabemos cómo atacar. Para la factorización del nuevo numerador hacemos de nuevo la división sintética correspondiente:

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 0 & -7 & 6 & \underline{2} \\ & 2 & 4 & -6 & \\ \hline 1 & 2 & -3 & 0 & \end{array}$$

de modo que:

$$x^3-7x+6=(x-2)(x^2+2x-3).$$

Similarmente para el denominador tenemos:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & 0 & -4 & 1 & -2 & \underline{2} \\ & 2 & 4 & 0 & 2 & \\ \hline 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & \end{array}$$

y entonces el denominador queda factorizado como:

$$x^4-4x^2+x-2=(x-2)(x^3+2x^2+1),$$

de tal modo que el cálculo del límite $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-7x+6}{x^4-4x^2+x-2}$ (que es igual al original), se ve como:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-7x+6}{x^4-4x^2+x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x-3)}{(x-2)(x^3+2x^2+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-3}{x^3+2x^2+1}=\frac{5}{17}.$$

Concluimos que mientras más cerca estén las x del valor 2, las imágenes de la función $f(x)=\frac{x^4-2x^3-7x^2+20x-12}{x^5-2x^4-4x^3+9x^2-4x+4}$ se encuentran más cerca de $\frac{5}{17}$.

★

EJEMPLO 2.4.4. Calcular el límite $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$.

SOLUCIÓN. Se trata ciertamente de una forma indeterminada, pues la función $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$ en $x=2$ produce $f(2)=\frac{0}{0}$. Racionalizamos el numerador, multiplicando y dividiendo la función $f(x)$ por $\sqrt{x^2+5}+3$, con el objeto de provocar una diferencia de cuadrados. Los cálculos se ven como:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left[\left(\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2+5}+3}{\sqrt{x^2+5}+3}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2+5)-9}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

★

EJEMPLO 2.4.5. Calcular el límite $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{\sqrt{10-x}-3}$.

SOLUCIÓN. Es claro que se trata de una forma indeterminada, pues la función $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{\sqrt{10-x}-3}$ en $x=1$ se ve como $f(1) = \frac{\sqrt{1+3}-2}{\sqrt{10-1}-3} = \frac{2-2}{3-3} = \frac{0}{0}$. En este caso tanto numerador como denominador tienen raíces cuadradas. Racionalizamos multiplicando y dividiendo entre $\sqrt{x^2+3}+2$ y también por $\sqrt{10-x}+3$. Nos queda:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{\sqrt{10-x}-3} = \lim_{x\to 1} \left[\left(\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{\sqrt{10-x}-3}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2+3}+2}{\sqrt{x^2+3}+2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{10-x}+3}{\sqrt{10-x}+3}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\left((\sqrt{x^2+3})^2-(2)^2\right)\left(\sqrt{10-x}+3\right)}{\left((\sqrt{10-x})^2-(3)^2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2+3-4)\left(\sqrt{10-x}+3\right)}{(10-x-9)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x^2-1)\left(\sqrt{10-x}+3\right)}{(1-x)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{10-x}+3\right)}{-(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)\left(\sqrt{10-x}+3\right)}{-\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} = -\frac{(1+1)\left(\sqrt{10-1}+3\right)}{\sqrt{1+3}+2} = -\frac{12}{4} = -3.$$

Es decir, mientras más cerca se encuentran las x de 1, las imágenes $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{\sqrt{10-x}-3}$ se encuentran más cerca de -3.

★

EJEMPLO 2.4.6. Calcular el límite $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x^3-1}$.

SOLUCIÓN. Se ve claramente que la función $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x^3-1}$ no existe en $x=1$, pues $f(1) = \frac{\sqrt[3]{1+7}-2}{(1)^3-1} = \frac{2-2}{1-1} = \frac{0}{0}$. En este caso la idea sigue siendo la misma que en los ejemplos anteriores, sólo que ahora de nada nos serviría multiplicar numerador y denominador por $\sqrt[3]{x+7}+2$, pues esto produciría una diferencia de cuadrados, y nos complicaría más la expresión original. Debemos multiplicar y dividir la función dada por algo que produzca *una diferencia de cubos*. Recuerde que:

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3,$$

de modo que viendo el numerador de $f(x)$ como $a-b$, lo conveniente es multiplicar y dividir entre $a^2+ab+b^2 = \left(\sqrt[3]{x+7}\right)^2 + 2\sqrt[3]{x+7}+4$ para producir, al multiplicarse por

$a-b=\sqrt[3]{x+7}-2$, la diferencia de cubos $\left(\sqrt[3]{x+7}\right)^3-(2)^3=x+7-8=x-1$. Entonces las cuentas se ven como:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\left[\left(\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x^3-1}\right)\left(\frac{\left(\sqrt[3]{x+7}\right)^2+2\sqrt[3]{x+7}+4}{\left(\sqrt[3]{x+7}\right)^2+2\sqrt[3]{x+7}+4}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x^3-1)\left(\left(\sqrt[3]{x+7}\right)^2+2\sqrt[3]{x+7}+4\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)\left(\left(\sqrt[3]{x+7}\right)^2+2\sqrt[3]{x+7}+4\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x^2+x+1)\left(\left(\sqrt[3]{x+7}\right)^2+2\sqrt[3]{x+7}+4\right)}=\frac{1}{(1+1+1)\left((2)^2+2(2)+4\right)}=\frac{1}{36}.$$

Es decir, entre más cerca se encuentran las x del valor 1, más cerca se encuentran las imágenes $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x^3-1}$ del valor $\frac{1}{36}$.

EJERCICIOS (2.4)

En los ejercicios 1 al 40 calcule el límite indicado.

1. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$.

2. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}$.

3. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-9x+8}{x^2-1}$.

4. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2+3x-10}$.

5. $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$.

6. $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+3x+2}{x^2-2x-8}$.

7. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+10x-11}{x^2+3x-4}$.

8. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^4-1}$.

9. $\lim_{x\to -1}\frac{x^4-1}{x^3+1}$.

10. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-x-1}{x^2-1}$.

11. $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x-4}{x^3-8}$.

12. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+4x^2-3x-2}{x^2+13x-14}$.

13. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+12x^2-10x-3}{x^3+9x^2-6x-4}$.

14. $\lim_{x\to -1}\frac{x^3-5x^2-3x+3}{3x^3-6x^2-9x}$.

15. $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-2x-21}{x^4-27x}$.

16. $\lim_{x\to 1}\frac{x^4+3x^3+7x^2-5x-6}{x^4+2x-3}$.

17. $\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)^4+3(x-4)^2+x^2-16}{x^3-64}$.

18. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^5+3x^4-4x^3+8x^2-2x-6}{x^4+5x^3-2x^2-2x-2}$.

19. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x}{3x^7+4x^6-7x^5+5x^4-2x^3-2x-1}$.

20. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^8+7x^7-4x^6-4x^5+3x^4+7x^2-5x-5}{x^{10}+7x^9-4x^8-3x^7-x^6+4x^5+11x^4-7x^3-3x^2-4x-1}$.

21. $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^{14}+x^2-2}{x^{12}+4x^8+x^2-6}$.

22. $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^{21}+4x^{15}+5}{x^{24}+x^{12}+x^4-3}$.

23. $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^{34}-1}{x^{27}+1}$.

24. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^{49}-1}{x^{50}-1}$.

25. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^{101}-x^{50}+x^{23}-1}{x^{99}-3x^{49}+2}$.

26. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}$.

27. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+16}-4}{x^2}$.

28. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{\sqrt{x+3}-2}$.

29. $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{x-2}$.

30. $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{10-x}-\sqrt{8+x}}{x^3-1}$.

31. $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{15+x}-\sqrt{17-x}}{\sqrt{3+x}-2}$.

32. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{25-x}-\sqrt{x^2+x+25}}{x^2+2x}$.

33. $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+7}-\sqrt{2x^2+10x-3}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{3x^2-1}}$.

34. $\lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{13+x}-\sqrt{10+2x}}{\sqrt{19+2x}-5}$.

35. $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$.

36. $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$.

37. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+27}-3}{x}$.

38. $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{15+6x}-\sqrt[3]{25+x}}{x^4+2x-20}$.

39. $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+3x-3}-\sqrt[3]{4x^2+5x-8}}{\sqrt{x^2+9x+6}-\sqrt{x^2+5x+10}}$.

40. $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x+26}-\sqrt[4]{80+x}}{\sqrt{x+8}-3}$.

(Sugerencia: $\dfrac{\sqrt[3]{x+26}-\sqrt[4]{80+x}}{\sqrt{x+8}-3}=\dfrac{\sqrt[3]{x+26}-3}{\sqrt{x+8}-3}-\dfrac{\sqrt[4]{80+x}-3}{\sqrt{x+8}-3}$).

En los ejercicios 41 al 50, se da una función $f(x)$ y un punto a de su dominio. Calcule en cada caso el límite:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

41. $f(x) = x^2 + 3x + 2, a = 4.$

42. $f(x) = (x+2)^3, a = 1.$

43. $f(x) = x^4 + x, a = 3.$

44. $f(x) = 5, a = x_0.$

45. $f(x) = \dfrac{3}{x}, a = 2.$

46. $f(x) = \dfrac{1}{x+5}, a = -2.$

47. $f(x) = \dfrac{2}{x^2}, a = 1.$

48. $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+2x+3)^2}, a = 0.$

49. $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}, a = 0.$

50. $f(x) = \sqrt[3]{3 + \dfrac{2}{x}}, a = 1.$

2.5 ALGUNAS FORMAS INDETERMINADAS $\frac{0}{0}$ (FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS)

Cuando se estudia el problema de calcular límites de funciones trigonométricas, se consideran de los siguientes hechos:

$$\lim_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$$

y

$$\lim_{x \to a} \cos x = \cos a,$$

para cualquier número real a. Es decir, en el caso de las funciones trigonométricas es válida la "sustitución", como el teorema 7 de las funciones racionales en la sección 2. Por ejemplo, $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 0 = 0$, $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \cos x = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x = \cos \frac{\pi}{2} = 0$, etcétera.

Esto nos permite calcular algunos límites sencillos como:

$$\lim_{x \to 0} \frac{3\cos^2 x + 2\cos x + 7}{1 + \cos x} = \frac{3(\cos 0)^2 + 2\cos 0 + 7}{1 + \cos 0} = \frac{3(1)^2 + 2(1) + 7}{1+1} = \frac{12}{2} = 6.$$

Sin embargo, en esta sección nos enfrentaremos con algunos límites de funciones que producen formas indeterminadas $\frac{0}{0}$ en las cuales están involucradas funciones trigonométricas. En general, estos problemas son más difíciles de atacar que el caso de funciones algebraicas, aunque hay en realidad una sola función que produce una forma indeterminada, que usaremos prácticamente en todos los ejercicios de esta sección. Se trata de la función:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x},$$

la cual, en $x = 0$, da por resultado $f(0) = \frac{\operatorname{sen} 0}{0} = \frac{0}{0}$. En el ejemplo 2.1.1 vimos, al hacer algunas cuentas con las imágenes de esta función, al tomar x cerca del cero, que tales imágenes hacían suponer que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Este resultado es verdadero y, haremos un argumento muy simple que hace plausible su validez. Recuerde que el seno del ángulo t se define como la ordenada de un punto P sobre el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$, en donde t es el ángulo que forma, con la parte positiva del eje x, el segmento que une el origen de coordenadas con P.

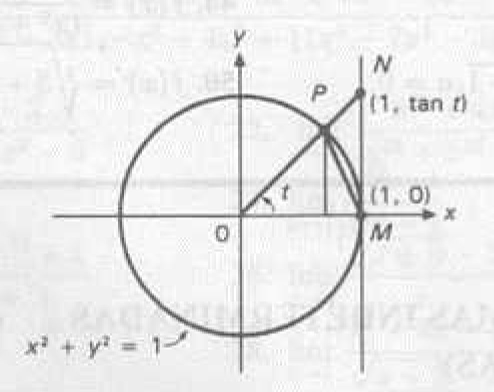


Figura 2.5.1. Construcción para probar que $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

Sea M el punto de coordenadas $(1, 0)$ y N el punto de coordenadas $(1, \tan t)$. Vamos a considerar ángulos t que estén cerca de cero, de modo que podemos suponer que $\operatorname{sen} t > 0$ (lo cual es cierto para $0 < t < \frac{\pi}{2}$). Según la figura resulta claro que:

Área del triángulo OPM (a)	$<$	Área del sector circular OPM (b)	$<$	Área del triángulo ONM (c)

El triángulo OPM tiene como base el segmento $\overline{OM}$, que es el radio del círculo (igual a uno), y tiene como altura la ordenada del punto p, que es (por definición) $\operatorname{sen} t$. Entonces el área de este triángulo es $\frac{1}{2}(1)\operatorname{sen} t = \frac{\operatorname{sen} t}{2}$. El sector circular OPM tiene un área de $\frac{1}{2}t(1)^2 = \frac{t}{2}$ (recuerde que el área de un sector circular en un círculo de radio r, con ángulo central θ, es igual a $\frac{1}{2}\theta r^2$). Finalmente, el área del triángulo ONM es $\frac{1}{2}$(base)(altura)$=\frac{1}{2}$(longitud del segmento $\overline{OM}$)(altura)$= \frac{1}{2}(1)(\tan t) = \frac{\tan t}{2}$. Entonces la desigualdad $(a) < (b) < (c)$ anteriormente planteada se ve como:

$$\frac{\operatorname{sen} t}{2} < \frac{t}{2} < \frac{\tan t}{2},$$

o bien, si multiplicamos por 2, dividimos entre $\operatorname{sen} t$ (que, como es positivo, no altera el sentido de las desigualdades) y finalmente tomamos los recíprocos (recuerde que $0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$), nos queda como:

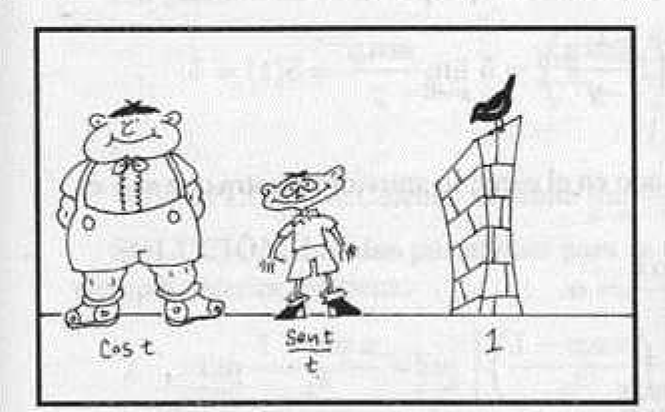
$$\cos t < \frac{\operatorname{sen} t}{t} < 1.$$

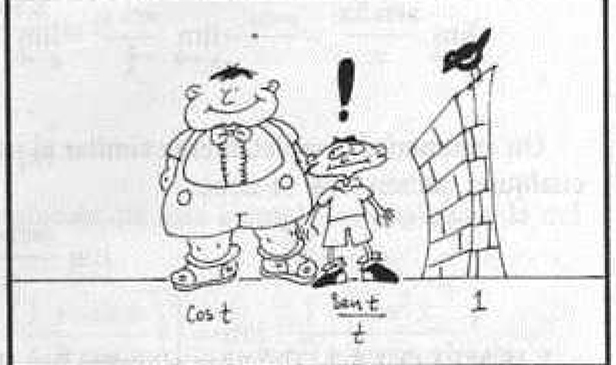
Ésta es la desigualdad fundamental en la que se basa el argumento de que el límite $\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t}$ es igual a uno. En ella se establece que el valor de $\frac{\operatorname{sen} t}{t}$ de cualquier ángulo $0 < t < \frac{\pi}{2}$ *se encuentra siempre entre* $\cos t$ *y uno.* Hagamos entonces tender t a cero. Sabemos que

cuando $t \to 0$, se tiene $\cos t \to 1$. Un teorema técnico al que se recurre en este momento del argumento es el llamado "teorema del *sandwich*", el cual dice que "si el jamón se encuentra siempre entre las dos rebanadas de pan y se aplasta el *sandwich* contra la pared, al jamón no le queda otra salida más que aplastarse contra la pared". En nuestro caso, el jamón es $\frac{\operatorname{sen} t}{t}$ y los panes del *sandwich* son $\cos t$ y 1. ¿Qué pasa cuando t tiende a cero? En este caso, el 1 de la derecha de la desigualdad se queda como si nada, pero el otro pan $\cos t$ *tiende a* 1, es decir, se aplasta contra la pared del 1. Como el jamón siempre está entre los dos, a éste no le queda más remedio que tender a 1. Éstas son las ideas que prueban que:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1.$$

Esquemáticamente el teorema del *sandwich* (como lo acabamos de emplear) se ve como:





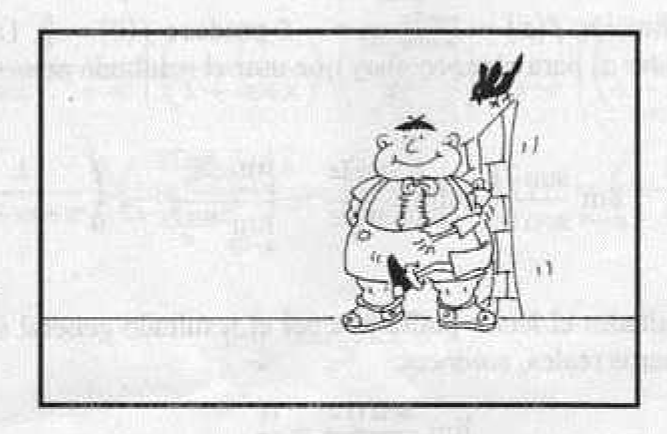


Figura 2.5.2. El teorema del *sandwich*: puesto que $\frac{\operatorname{sen} t}{t}$ se mantiene siempre entre $\cos t$ y 1, y estos últimos tienden a 1 cuando t tiende a 0, a $\frac{\operatorname{sen} t}{t}$ no le queda otro remedio que tender también a 1.

Éste es el resultado más importante de esta sección y es conveniente que lo recordemos con palabras:
El límite del seno de un ángulo dividido entre el ángulo, cuando el ángulo tiende a cero, es igual a uno.

Éste es el límite más importante cuando se calculan límites de funciones trigonométricas que producen formas indeterminadas $\frac{0}{0}$. La estrategia general en este tipo de problemas es "reacomodar" la función usando identidades trigonométricas, de tal manera que se produzca el límite anteriormente mencionado, cuyo valor ya conocemos. Los "trucos" específicos que surgen en algunos de estos límites, se mostrarán en algunos ejemplos concretos.

EJEMPLO 2.5.1. Calcular el límite $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x}$.

SOLUCIÓN. Se trata ciertamente de una forma indeterminada, pues $\frac{\operatorname{sen} 5(0)}{0} = \frac{\operatorname{sen} 0}{0} = \frac{0}{0}$. Una idea muy socorrida en este tipo de problemas es hacer un "cambio de variable" en el límite por calcular. Hagamos $y = 5x$. Con esto logramos tener ya el seno del ángulo y en el numerador de la función. Se tiene entonces que $x = \frac{y}{5}$. Observe que si x tiende a cero, la nueva variable $y = 5x$ también tenderá a cero, de tal modo que podemos escribir:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x} \overset{y=5x}{=\!=\!=} \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{\frac{y}{5}} = \lim_{y\to 0} \left(5\frac{\operatorname{sen} y}{y}\right) = 5 \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 5(1) = 5.$$

★

Un argumento completamente similar al usado en el ejemplo anterior muestra que si α es cualquier número real se tiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{x} = \alpha.$$

EJEMPLO 2.5.2. Calcular el límite $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 7x}{\operatorname{sen} 9x}$.

SOLUCIÓN. La función $f(x) = \frac{\operatorname{sen} 7x}{\operatorname{sen} 9x}$ en $x = 0$ produce $f(0) = \frac{0}{0}$. Dividamos numerador y denominador entre x, para obtener: (hay que usar el resultado presentado antes de este ejemplo)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 7x}{\operatorname{sen} 9x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} 7x}{x}}{\frac{\operatorname{sen} 9x}{x}} = \frac{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 7x}{x}}{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 9x}{x}} = \frac{7}{9}.$$

★

Sin mayores dificultades el lector podrá obtener el resultado general siguiente: si α y β son cualesquiera números reales, entonces:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{\operatorname{sen} \beta x} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

EJEMPLO 2.5.3. Calcular el límite $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$.

SOLUCIÓN. Observe que se trata de una forma indeterminada, pues $\frac{1-\cos 0}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$. La idea para calcular este límite es provocar, de alguna manera, la aparición de la función seno de x, pues sabemos de ella que al dividirse entre x el límite es igual a uno cuando x tiende a cero. Recordemos la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, la cual vemos como:

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x = (1)^2 - (\cos x)^2 = (1 - \cos x)(1 + \cos x).$$

Si multiplicamos y dividimos la función $f(x) = \frac{1-\cos x}{x}$ por $1 + \cos x$, se producirá, según la fórmula anterior, un seno cuadrado de x en el numerador. Así, nos queda:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \left[\left(\frac{1-\cos x}{x}\right)\left(\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right)\right] = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \left[\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\right)\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\right] = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$$

$$= \left(\frac{\operatorname{sen} 0}{1+\cos 0}\right)(1) = \left(\frac{0}{1+1}\right)(1) = (0)(1) = 0.$$

Así pues:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0.$$

★

EJEMPLO 2.5.4. Calcular el límite $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

SOLUCIÓN. La idea por aplicar para la solución de este ejemplo es análoga a la del ejemplo anterior. Se tiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left[\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)\left(\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right)\right] = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \left[\left(\frac{1}{1+\cos x}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\right)\right] = \lim_{x\to 0} \left[\left(\frac{1}{1+\cos x}\right)\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2\right]$$

$$= \left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{1+\cos 0}\right)(1)^2 = \left(\frac{1}{1+1}\right)(1) = \frac{1}{2}.$$

Así pues,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

★

EJEMPLO 2.5.5. Calcular el límite $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(a+x)-\operatorname{sen} a}{x}$.

SOLUCIÓN. La función $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(a+x)-\operatorname{sen} a}{x}$ en $x = 0$ produce $f(0) = \frac{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} a}{0} = \frac{0}{0}$. La estrategia para calcular este límite es desarrollar primeramente el seno de la suma de dos ángulos que aparece en el numerador de la función, y luego agrupar convenientemente los términos obtenidos. Las cuentas se ven de la siguiente forma: (usaremos que $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(a+x)-\operatorname{sen} a}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} a\cos x + \cos a \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos a \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a(1-\cos x)}{x} = \lim_{x\to 0} \left[(\cos a)\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) - (\operatorname{sen} a)\left(\frac{1-\cos x}{x}\right)\right]$$

$$= (\cos a) \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} - (\operatorname{sen} a) \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = (\cos a)(1) - (\operatorname{sen} a)(0) = \cos a,$$

en donde usamos que $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$, según obtuvimos en el ejemplo 2.5.3.

★

EJEMPLO 2.5.6. Calcular el límite $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(a+x)-\tan a}{x}$.

SOLUCIÓN. La función $f(x) = \frac{\tan(a+x)-\tan x}{x}$ produce una forma indeterminada para $x = 0$, pues $f(0) = \frac{\tan a - \tan a}{0} = \frac{0}{0}$. Como en el ejemplo anterior, la estrategia es desarrollar primeramente la tangente de la suma de dos ángulos, y luego agrupar de manera conveniente los términos obtenidos. Las cuentas se ven a continuación: (usaremos que $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(a+x)-\tan a}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\tan a + \tan x}{1-\tan a \tan x} - \tan a}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\tan a + \tan x) - (\tan a)(1-\tan a \tan x)}{x(1-\tan a\tan x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\tan a + \tan x - \tan a + \tan^2 a \tan x}{x(1-\tan a \tan x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x(1+\tan^2 a)}{x(1-\tan a\tan x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\tan x \sec^2 a}{x(1-\tan a \tan x)} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 a}{1-\tan a\tan x}\right)$$

$$= (1)\left(\frac{\sec^2 a}{1-(\tan a)(0)}\right) = \sec^2 a,$$

en donde usamos que $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\left(\frac{1}{\cos x}\right) = (1)(1) = 1.$

★

EJERCICIOS (2.5)

En los ejercicios 1 al 25 calcule el límite indicado.

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}$.
2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(6x)}{8x}$.
3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen}(9x)}$.
4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan(2x)}{\operatorname{sen}(2x)}$.
5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan(7x)}{3x}$.
6. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\operatorname{sen}^2 x}$.
7. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3}{\tan^3(3x)}$.
8. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(3x)}{\operatorname{sen}^2(2x)}$.
9. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan^2(4x)}{1-\cos(5x)}$.
10. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x \cos^3(4x)}{\tan(4x)\sec^2(7x)}$.
11. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - \tan x}{1-\cos x}$.
12. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - \tan x}{1-\cos(3x)}$.
13. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(2x)-\tan(2x)}{\operatorname{sen}(3x)-\tan(3x)}$.
14. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(3x)}{1-\cos(5x)}$.
15. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x\,(1-\sec(4x))}{\operatorname{sen}(4x)\,(1-\sec(3x))}$.
16. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^3 x}{4x^2}$. (Sugerencia: en el numerador hay una diferencia de cubos.)
17. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$. (Sugerencia: si declara una nueva variable z como $z = x - \dfrac{\pi}{2}$, el límite se transforma en $\lim_{z\to 0} \dfrac{\cos\left(z+\frac{\pi}{2}\right)}{z}$; simplifique el numerador y continúe ...)
18. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\operatorname{sen} x}{x-\frac{\pi}{2}}$.
19. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1+\operatorname{sen}(3x)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}$.
20. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{sen}^2(2x)}{1-\operatorname{sen} x}$.
21. $\lim_{x\to \pi} \dfrac{(x-\pi)^2}{\operatorname{sen}^2 x}$.
22. $\lim_{x\to \pi} \dfrac{1+\cos x}{\operatorname{sen} x}$.
23. $\lim_{x\to \pi} \dfrac{1+\cos^3 x}{\operatorname{sen}^2 x}$.
24. $\lim_{x\to \pi} \dfrac{\tan^2 x}{1+\cos x}$.
25. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos(2x)}$.

En los ejercicios 26 al 40, se da una función $f(x)$ y un punto a de su dominio. Calcule en cada caso el límite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

26. $f(x) = 3\,\mathrm{sen}\,2x, a = 0.$
27. $f(x) = 2\cos 3x, a = 0.$
28. $f(x) = \mathrm{sen}\,x + \cos x, a = \pi.$
29. $f(x) = \mathrm{sen}\,2, a = x_0.$
30. $f(x) = \mathrm{sen}^2\,x, a = 0.$
31. $f(x) = \mathrm{sen}\,x^2, a = 0.$
32. $f(x) = \cos^2 x, a = 0.$
33. $f(x) = \mathrm{sen}\,x\cos x, a = 0.$
34. $f(x) = \mathrm{sen}^2\,x\cos x, a = 0.$
35. $f(x) = \tan 4x, a = 0.$
36. $f(x) = x\tan x, a = \frac{\pi}{4}.$
37. $f(x) = x\cos x, a = \pi.$
38. $f(x) = \tan^2 x, a = \frac{\pi}{4}.$
39. $f(x) = \cot^2 x, a = \frac{\pi}{2}.$
40. $f(x) = \frac{\tan x}{x}, a = \frac{\pi}{4}.$

2.6 LÍMITES INFINITOS

Consideremos la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e investiguemos qué sucede con sus imágenes cuando la x se encuentra cerca del cero. Algunos valores de $f(x)$ con algunas x concretas cerca de cero nos ayudarán a ver el comportamiento de estas imágenes.

x	$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	x	$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
1	1	−1	1
0.5	4	−0.5	4
0.1	100	−0.1	100
0.01	10000	−0.01	10000
0.001	1000000	−0.001	1000000

Resulta claro que a medida que la x se encuentre más próxima al cero, su imagen $f(x)$ será mayor. Generalizamos los valores de la tabla anterior: si $x = 10^{-n}$, en donde n es un número natural, entonces $f(x) = f(10^{-n}) = \frac{1}{(10^{-n})^2} = \frac{1}{10^{-2n}} = 10^{2n}$, de modo que si x es un número con ceros en los primeros $n-1$ dígitos después del punto decimal, seguidos de un uno, su imagen será un uno seguido de $2n$ ceros.

Para referirse a este comportamiento que presenta la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$, diremos que esta función *tiende a infinito cuando x tiende a cero*, y escribimos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = \infty.$$

La gráfica de $f(x) = \frac{1}{x^2}$ puede ayudar a entender el comportamiento de esta función alrededor del cero.

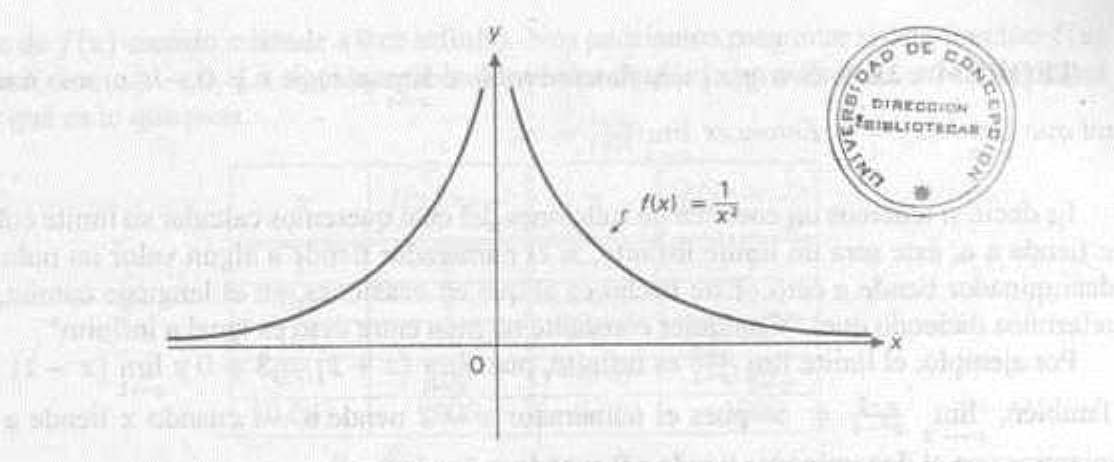


Figura 2.6.1. La función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ tiende a infinito cuando x tiende a cero.

En general, diremos que la función $y = f(x)$ tiende a infinito cuando x tiende a a, lo cual se escribe como $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ (el cual diremos que es un "límite infinito"), si a medida que x se encuentra más cerca de a, los valores de la función crecen "al infinito". Con un poco más de precisión, esta idea se establece como:

La función $f(x)$ tiende a infinito cuando x tiende a a, lo cual se escribe como $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, si (los valores absolutos de) las imágenes $|f(x)|$ pueden hacerse tan grandes como nosotros queramos, tomando a x suficientemente cerca de a.

De manera rigurosa, esta idea queda escrita como: la función $f(x)$ tiende a infinito cuando x tiende a a, lo cual se escribe como $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, si dado cualquier $M > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M.$$

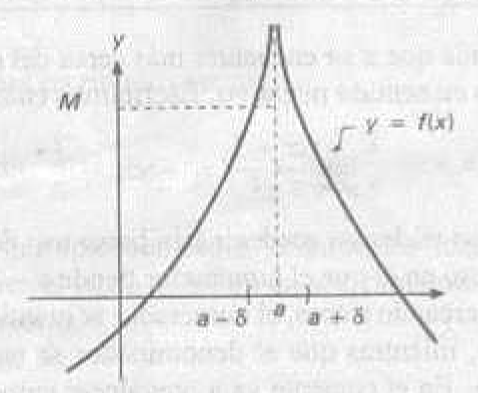


Figura 2.6.2. La función $f(x)$ tiende a infinito cuando x tiende a a.

¿En qué tipo de funciones nos podemos encontrar límites infinitos? La situación más común que se presenta está dada por el siguiente resultado de carácter general.

TEOREMA 2.6.1. *Sea $g(x)$ una función tal que $\lim_{x \to a} g(x) = k \neq 0$ y $h(x)$ una función tal que $\lim_{x \to a} h(x) = 0$. Entonces $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{h(x)} = \infty$.*

Es decir, si tenemos un cociente de funciones del cual queremos calcular su límite cuando x tiende a a, éste será un límite infinito, si el numerador tiende a algún valor no nulo y el denominador tiende a cero. Este hecho es al que en ocasiones, en el lenguaje común, nos referimos diciendo que: "Cualquier constante no nula entre cero es igual a infinito".

Por ejemplo, el límite $\lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x-1}$ es infinito, pues $\lim_{x \to 1} (x+2) = 3 \neq 0$ y $\lim_{x \to 1} (x-1) = 0$. También, $\lim_{x \to -2} \frac{x-2}{x^2-4} = \infty$ pues el numerador $x-2$ tiende a -4 cuando x tiende a -2, mientras que el denominador tiende a 0 cuando x tiende a -2.

Algunas veces es necesario ser más precisos con "el signo" del infinito: se indica con $+\infty$ el resultado de un límite infinito en el cual la función $f(x)$ toma valores cada vez más grandes (positivos) cuando x tiende a a, y se indica con $-\infty$ el resultado de un límite infinito en el cual la función $f(x)$ toma valores *negativos* cada vez más grandes *en valor absoluto*. La función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ comentada al principio de la sección es tal que

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Sin embargo, observemos la función $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$ y veamos qué sucede con sus imágenes cuando x se encuentra cerca del cero.

x	$f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$	x	$f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$
1	0	-1	-2
0.5	-2	-0.5	-6
0.1	-90	-0.1	-110
0.01	-9900	-0.01	-10100
0.001	-999000	-0.001	-1001000

Vemos, pues, que a medida que x se encuentra más cerca del cero las imágenes $f(x)$ son cada vez más grandes, pero en sentido negativo. Escribimos entonces:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x-1}{x^2} = -\infty.$$

Este tipo de resultados los podemos predecir (sin hacer uso de la tabla anterior) de la siguiente manera: en el proceso en el que el numerador tiende a -1 y el denominador a 0, observe que cuando x se va acercando a cero, el numerador se mantiene con signo negativo (cada vez más cercano a -1), mientras que el denominador se mantiene con signo positivo (cada vez más cercano a 0). En el cociente va a prevalecer entonces el signo negativo (cociente de negativo entre positivo), y de ahí podemos concluir que la función tenderá a $-\infty$.

Más aún, veamos el fenómeno que se presenta con la función $f(x) = \frac{1}{x}$. Ciertamente cuando x tiende a cero el numerador de esta función tiende a 1 (es una función constante) y el denominador tiende a cero, por lo que no hay duda (según el teorema 2.6.1) de que el

límite de $f(x)$ cuando x tiende a 0 es infinito. Nos podríamos preguntar si esta función $f(x)$ tiende a $+\infty$ o a $-\infty$. La siguiente tabla de valores de $f(x)$ con x cercana a 0 nos ayudará a ver qué es lo que pasa.

x	$f(x) = \frac{1}{x}$	x	$f(x) = \frac{1}{x}$
1	1	-1	-1
0.5	2	-0.5	-2
0.1	10	-0.1	-10
0.01	100	-0.01	-100
0.001	1000	-0.001	-1000

Entonces observe que si x se aproxima a cero con valores positivos (a la derecha del cero), la función $f(x) = \frac{1}{x}$ tiende a $+\infty$, mientras que si la x se aproxima a cero con valores negativos (a la izquierda del cero), la función $f(x)$ tiende a $-\infty$ (éste es un caso de límites unilaterales distintos que veremos en la sección 8). La gráfica de esta función nos ayuda a entender este fenómeno.

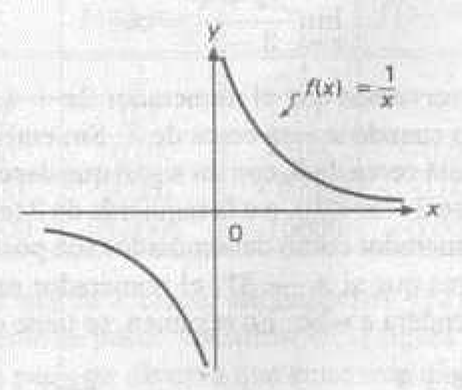


Figura 2.6.3. La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Este tipo de precisiones las escribimos como:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty,$$

en donde los signos $-$ y $+$ que aparecen como "exponentes" del cero indican por qué lado se está acercando la x al cero: el signo $-$ indica un acercamiento por la izquierda y el signo $+$ un acercamiento por la derecha.

Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 2.6.1. Calcular el límite $\lim_{x\to 2} \frac{x-4}{(x-2)^2}$.

SOLUCIÓN. Como el numerador $x-4$ tiende a $-2 \neq 0$ cuando $x \to 2$, y el denominador $(x-2)^2$ tiende a 0 cuando $x \to 2$, según el teorema 2.6.1, el límite es infinito. Es decir,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-4}{(x-2)^2}=\infty.$$

Si quisiéramos ser más precisos acerca de si este límite es $+\infty$ o $-\infty$, observamos que cuando x se encuentra cerca de 2, el numerador se mantendrá (cerca de -2) con signo negativo, mientras que el denominador estará cerca de 0 siempre con signo positivo, ya que $(x-2)^2\geq 0$. Por tanto, podemos decir que:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-4}{(x-2)^2}=-\infty.$$

⋆

EJEMPLO 2.6.2. Calcular el límite $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x+4}{3-x}$.

SOLUCIÓN. Como $\lim\limits_{x\to 3}(2x+4)=10$ y $\lim\limits_{x\to 3}(3-x)=0$, según el teorema 2.6.1, tenemos que:

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x+4}{3-x}=\infty.$$

Siendo más precisos, observamos que el numerador $2x+4$ se mantiene siempre (cerca de 10) con valores positivos cuando x está cerca de 3. Sin embargo, el denominador $3-x$ estará cerca de 0 cuando x está cerca de 3, con un signo que depende de si la x se encuentra a la derecha del 3 (en cuyo caso $3-x<0$), o a la izquierda de 3 (en cuyo caso $3-x>0$). Por lo cual, si $x\to 3^-$, tanto numerador como denominador son positivos, y entonces la función $f(x)$ tenderá a $+\infty$, mientras que si $x\to 3^+$, el numerador es positivo y el denominador negativo, y entonces $f(x)$ tenderá a $-\infty$. En resumen, se tiene que:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{2x+4}{3-x}=+\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 3^+}\frac{2x+4}{3-x}=-\infty.$$

⋆

EJERCICIOS (2.6)

En los ejercicios 1 al 10, calcule el límite indicado.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3}{|x-2|}$.

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^4}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(3x)}{\operatorname{sen}(2x)}$.

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+8x-9}{x^2-2x+1}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^3+2x^2+9x}{x^2}$.

6. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+3x^2-2x-2}{x^3-3x^2+3x-1}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{sen}^2(3x)}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{1-\cos(2x)}$.

9. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-x^3+2x^2+5x-7}{3x^3-4x^2-x+2}$.

10. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^5-2x^4+3x^2-7x+2}{3x^3-11x^2+8x+4}$.



2.7 LÍMITES AL INFINITO

Consideremos la función $f(x) = \frac{1}{x}$. Ahora estamos interesados en el comportamiento de las imágenes $f(x)$ cuando x toma valores muy grandes, ya sea en sentido positivo, como en sentido negativo. Algunos de estos valores se muestran en la siguiente tabla.

x	$f(x) = \dfrac{1}{x}$	x	$f(x) = \dfrac{1}{x}$
1	1	−1	−1
10	0.1	−10	−0.1
100	0.01	−100	−0.01
1000	0.001	−1000	−0.001
10000	0.0001	−10000	−0.0001

Se observa que a medida que la x crece, las imágenes $f(x)$ se vuelven cada vez más pequeñas. Este comportamiento se puede visualizar en la figura 2.6.3, en donde se muestra la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$: se observa que entre más alejada esté la x del origen de coordenadas, su imagen $f(x)$ se encuentra "más pegada" al eje x (es decir, el valor de $f(x)$ es más pequeño). Por ejemplo, generalizando los valores mostrados en la tabla anterior, si $x = 10^n$ en donde n es un número natural, su imagen $f(x)$ será $f(10^n) = \frac{1}{10^n} = 10^{-n}$. Es decir, si x es un número de la forma $x = \underbrace{100\ldots0}_{n \text{ dígitos}}$ entonces su imagen será $f(x) = 0.\underbrace{00\ldots01}_{n-1 \text{ dígitos}}$. Este hecho lo referimos diciendo que si x tiende a infinito, entonces la función $f(x) = \frac{1}{x}$ tiende a cero, y lo escribimos como:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

(Se dice que éste es "un límite al infinito".) En general, decimos que la función $f(x)$ tiende al límite L cuando x tiende a infinito, si a medida que la x se hace más grande, las imágenes $f(x)$ se encuentran más próximas a L. Con un poco de más precisión se tiene:

La función $f(x)$ tiende al límite L cuando x tiende a infinito, lo cual se escribe como $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$, si podemos tener las imágenes $f(x)$ tan cerca de L como nosotros queramos, tomando a x suficientemente grande (suficientemente lejos del cero).

De manera rigurosa podemos establecer la idea anterior diciendo que $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, si dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $M > 0$ tal que:

$$x > M \text{ (o } x < -M) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Desde el punto de vista geométrico, decir que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a infinito es L, significa que la gráfica de la función $f(x)$ "se va pegando cada vez más a la recta $y = L$ a medida que x se vuelve más grande". Es decir, a medida que nos alejamos del origen de coordenadas, la gráfica de la función se encuentra más cerca de la recta horizontal $y = L$.

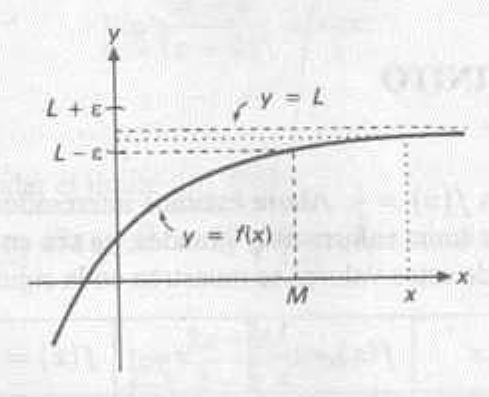


Figura 2.7.1. El límite cuando x tiende a infinito de la función $f(x)$ es igual a L.

El siguiente teorema nos habla de un tipo muy importante de funciones que tiene límite igual a cero cuando x tiende a infinito.

TEOREMA 2.7.1. *Sea n un número natural y sea k una constante. Entonces la función $f(x) = \frac{k}{x^n}$ tiende a cero cuando x tiende a infinito. Es decir,*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{k}{x^n} = 0.$$

El hecho establecido en el teorema anterior lo podemos entender fácilmente si pensamos en que en el cociente $\frac{k}{x^n}$ el numerador es una constante mientras que el denominador es una cantidad que está volviéndose cada vez más grande (pues x está creciendo). Cuando dividimos dos números, el resultado es más pequeño mientras más grande sea el valor del denominador (si se mantiene el numerador constante); es decir, el término x^n en el cociente $\frac{k}{x^n}$ "se come" a k, cuando x se vuelve cada vez más grande. El resultado final: (en términos de límites) es *cero*. En ocasiones uno se refiere a este hecho en lenguaje coloquial diciendo que "cualquier número entre infinito es igual a cero".

Por ejemplo, la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ que habíamos considerado en la sección anterior es del tipo de funciones de las que habla el teorema 2.7.1. Se tiene:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0,$$

lo cual se puede ver también en la gráfica mostrada en la figura 2.6.1.

Puede ocurrir que un límite al infinito (como los que estamos estudiando en esta sección) sea un límite infinito (como los que estudiamos en la sección anterior). Es decir, existen funciones $f(x)$ para las cuales:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,$$

lo cual simplemente significa que a medida que x se aleja del origen, sus imágenes $f(x)$ se vuelven cada vez más grandes (en valor absoluto). Esto ocurre, por ejemplo, con la función $f(x) = 2x^2$ cuya gráfica, como sabemos, es una parábola que abre hacia arriba con vértice en el origen. Más generalmente, éste es un hecho que se presenta con cualquier función polinomial.

Veamos cómo calcular algunos límites al infinito para funciones racionales. El truco más popular empleado en estos límites consiste en dividir numerador y denominador (que son funciones polinomiales) entre x^k en donde k es la potencia mayor de x que aparece en la función racional $f(x)$, y emplear luego el teorema 2.7.1.

Estudiaremos tres ejemplos significativos, para luego ver un resultado de carácter general.

EJEMPLO 2.7.1. Calcular el límite $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+7x^2-11x+12}{x^2+4x+8}$.

SOLUCIÓN. En este ejemplo la potencia más grande de la x que aparece en la función $f(x) = \frac{2x^3+7x^2-11x+12}{x^2+4x+8}$ es 3. Dividamos entonces numerador y denominador por x^3 para obtener:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+7x^2-11x+12}{x^2+4x+8} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^3+7x^2-11x+12}{x^3}}{\frac{x^2+4x+8}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{7}{x}-\frac{11}{x^2}+\frac{12}{x^3}}{\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{8}{x^3}}.$$

Usando el teorema 2.7.1, el límite al infinito de la función del numerador queda como:

$$\lim_{x\to\infty} \left(2+\frac{7}{x}-\frac{11}{x^2}+\frac{12}{x^3}\right) = 2+0-0-0 = 2,$$

mientras que para el denominador se tiene:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{8}{x^3}\right) = 0+0+0 = 0.$$

Así pues, en el límite que queremos calcular se nos presenta una situación de las que contempla el teorema 2.6.1: se trata de un límite de un cociente de funciones, en el cual el numerador tiende a 2 (una constante no nula) y el denominador tiende a cero. Este límite es entonces infinito. Es decir:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+7x^2-11x+12}{x^2+4x+8} = \infty.$$

★

EJEMPLO 2.7.2. Calcular el límite $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+x^3-x+9}{5x^6+4x^3+3x-2}$.

SOLUCIÓN. De nuevo, la potencia más grande de la x que aparece en la función $f(x) = \frac{x^4+x^3-x+9}{5x^6+4x^3+3x-2}$ es 6. Dividiendo numerador y denominador entre x^6, y aplicando nuevamente el teorema 2.7.1 para calcular los límites de las funciones individuales que aparecerán después de la división mencionada, obtenemos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+x^3-x+9}{5x^6+4x^3+3x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^4+x^3-x+9}{x^6}}{\frac{5x^6+4x^3+3x-2}{x^6}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^5}+\frac{9}{x^6}}{5+\frac{4}{x^3}+\frac{3}{x^5}-\frac{2}{x^6}} = \frac{0}{5} = 0.$$

⋆

EJEMPLO 2.7.3. Calcular el límite $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3+23x^2+3x-12}{7x^3-8x+17}$.

SOLUCIÓN. La potencia mayor de la x que aparece en la función $f(x) = \frac{2x^3+23x^2+3x-12}{7x^3-8x+17}$ es 3. Como en los ejemplos anteriores, dividimos numerador y denominador entre x^3 para obtener:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+23x^2+3x-12}{7x^3-8x+17} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^3+23x^2+3x-12}{x^3}}{\frac{7x^3-8x+17}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{23}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{12}{x^3}}{7-\frac{8}{x^2}+\frac{17}{x^3}} = \frac{2}{7}.$$

⋆

Los ejemplos anteriores son muestras representativas de las tres situaciones típicas que se pueden presentar en el cálculo de un límite al infinito de una función racional. El resultado obtenido en el ejemplo 2.7.1 habría sido el mismo (es decir, el límite sería infinito) con cualquier función racional $f(x)$ en la que la potencia más grande de la x se encontrara en el numerador, el resultado del ejemplo 2.7.2 hubiera sido el mismo (es decir, el límite sería cero) con cualquier función racional en la que la potencia más grande de la x se encontrara en el denominador. El caso del ejemplo 2.7.3, se tiene una función racional en la que la potencia más grande de la x aparece tanto en el numerador como en el denominador de $f(x)$. En este caso el resultado del límite es el cociente de los coeficientes de las máximas potencias de los polinomios del numerador y del denominador de $f(x)$.

En resumen, los resultados del cálculo de límites al infinito de funciones racionales son:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \infty & \text{si } n > m \\ 0 & \text{si } n < m \\ \frac{a_n}{b_n} & \text{si } n = m. \end{cases}$$

EJEMPLO 2.7.4. Calcular el límite $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^4+27x^2+35x-21}{2x^5+3x-2}$.

SOLUCIÓN. La potencia mayor de la x se encuentra en el denominador de la función $f(x) = \frac{x^4+27x^2+35x-21}{2x^5+3x-2}$. Entonces:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+27x^2+35x-21}{2x^5+3x-2} = 0.$$

⋆

EJEMPLO 2.7.5. Calcular el límite $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^6+2x^3+5x^2-2x+4}{8x^6+x^5+20x+7}$.

SOLUCIÓN. La potencia mayor de la x en la función $f(x) = \frac{x^6+2x^3+5x^2-2x+4}{8x^6+x^5+20x+7}$ es 6 y se encuentra tanto en el numerador como en el denominador de esta función. El resultado del límite es entonces el cociente del coeficiente de la x^6 del numerador (que es igual a 1) entre el coeficiente de la x^6 del denominador (que es igual a 8). Se tiene, pues, que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^6 + 2x^3 + 5x^2 - 2x + 4}{8x^6 + x^5 + 20x + 7} = \frac{1}{8}.$$

EJEMPLO 2.7.6. Calcular el límite $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x^2+x+1)^4+(x^2+x+2)^4+(x^2+x+3)^4}{(2x^4+4x^3+5x^2+6x+7)^2}$.

SOLUCIÓN. Al tratar con límites al infinito de funciones racionales, lo único que importa es detectar las potencias mayores del numerador y denominador de la función. En este ejemplo en el numerador aparecen algunas operaciones indicadas, las cuales, si se desarrollaran, producirían un polinomio de grado 8 (¡después de una muy considerable cantidad de operaciones!). Lo que importa de este polinomio es solamente su grado: es 8 y el coeficiente de la x^8 es 3 (pues en cada trinomio a la cuarta hay un x^8, y existen tres de estos trinomios sumándose en el numerador). De igual manera, el desarrollo del polinomio del denominador involucra una gran cantidad de operaciones, pero lo que importa de él es cuál es la mayor portencia de la x que aparece (es decir, el grado del polinomio). Es claro que al desarrollar el cuadrado aparecerá (el primer término) $(2x^4)^2 = 4x^8$ y éste es el término que tendrá la potencia mayor de la x. Podemos entonces escribir:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+x+1)^4 + (x^2+x+2)^4 + (x^2+x+3)^4}{(2x^4+4x^3+5x^2+6x+7)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^8+\dots}{4x^8+\dots} = \frac{3}{4}.$$

Al tratar con límites infinitos, debemos ser cautelosos cuando obtengamos expresiones del tipo $\infty - \infty$, las cuales, al igual que $\frac{0}{0}$, no están definidas en matemáticas (son también formas indeterminadas). Por ejemplo, consideremos el límite:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{ax^2+bx+c}{x+2} - \frac{dx^2+ex+f}{x+1} \right),$$

en donde a, b, c, d, e y f son constantes no nulas.

Si empleáramos de inmediato el resultado que permite separar este límite como suma de dos límites, obtendríamos:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty} \left(\frac{ax^2+bx+c}{x+2} - \frac{dx^2+ex+f}{x+1} \right) \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+bx+c}{x+2} - \lim_{x\to\infty} \frac{dx^2+ex+f}{x+1} = \infty - \infty \end{aligned}$$

(pues en ambos límites tenemos funciones racionales en las que la mayor potencia de la x se encuentra en el numerador). Observe que si primeramente hacemos la suma de fracciones en la función involucrada en el límite, obtenemos:

$$\frac{ax^2+bx+c}{x+2} - \frac{dx^2+ex+f}{x+1} = \frac{(ax^2+bx+c)(x+1) - (dx^2+ex+f)(x+2)}{x^2+3x+2}$$

$$= \frac{(a-d)x^3 + (a+b-2d-e)x^2 + (b+c-2e-f)x + c - 2f}{x^2+3x+2},$$

de modo que nuestro límite al infinito original es:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax^2+bx+c}{x+2} - \frac{dx^2+ex+f}{x+1}\right)$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(a-d)x^3 + (a+b-2d-e)x^2 + (b+c-2e-f)x + c - 2f}{x^2+3x+2}.$$

Pongamos algunos valores concretos a las constantes $a, b, ..., f$ para ver qué posibilidades de resultados podemos esperar con este límite.

- Si $a = 2$, $d = 1$, el límite sería:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+bx+c}{x+2} - \frac{x^2+ex+f}{x+1}\right)$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^3 + (b-e)x^2 + (b+c-2e-f)x + c - 2f}{x^2+3x+2} = \infty,$$

pues sin importar los valores de las demás constantes, el grado del numerador es mayor que el del denominador.

- Si $a = d = 1$, $b = 3$, $e = 1$, el límite sería:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+c}{x+2} - \frac{x^2+x+f}{x+1}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2 + (1+c-f)x + c - 2f}{x^2+3x+2} = 1.$$

- Si $a = d = 1$, $b = 2$, $e = 1$, el límite sería:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+c}{x+2} - \frac{x^2+x+f}{x+1}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{(c-f)x + c - 2f}{x^2+3x+2} = 0.$$

Así pues, en el límite original pueden aparecer los tres resultados típicos de un límite al infinito. Cuando se presente entonces una situación como la anterior (una resta de funciones racionales, en donde ambas tienden a infinito), primeramente se deben hacer las operaciones correspondientes en la función, para dejarla expresada como una sola función racional, y sobre ella decidir el valor del límite (dependiendo de dónde se encuentre la mayor potencia de la x).

EJEMPLO 2.7.7. Calcular el límite $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+x+2}{x^2+1} - \frac{2x^2+3x+1}{2x-3}\right)$.

SOLUCIÓN. Tanto $f(x) = \frac{x^3+x+2}{x^2+1}$ como $g(x) = \frac{2x^2+3x+1}{2x-3}$ tienden a infinito cuando x tiende a infinito, de modo que el límite del ejemplo es una forma indeterminada $\infty - \infty$. Hacemos primeramente la suma de fracciones en la función involucrada en el límite:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+x+2}{x^2+1} - \frac{2x^2+3x+1}{2x-3}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x^3+x+2)(2x-3)-(2x^2+3x+1)(x^2+1)}{(x^2+1)(2x-3)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-6x^3-x^2-2x-7}{2x^3-3x^2+2x-3} = \frac{-6}{2} = -3.$$

⋆

Las ideas manejadas anteriormente para calcular límites al infinito de funciones racionales, se pueden usar también en el caso de límites al infito de funciones algebraicas más generales: se trata de decidir solamente en dónde se encuentra la potencia más grande (la potencia dominante) de la x. Si está en el numerador, el límite es infinito; si está en el denominador, el límite es cero y, si se encuentra tanto en el numerador como en el denominador, el límite es igual al cociente de los coeficientes de las potencias máximas de la x del numerador y del denominador.

EJEMPLO 2.7.8. Calcular el límite $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}+3x}{\sqrt[3]{x^4+x+1}+\sqrt{x^2+x+1}}$.

SOLUCIÓN. La mayor potencia de la x en el numerador es 1. En el primer sumando del denominador tenemos una $x^{\frac{4}{3}}$ en el primer sumando (como potencia dominante) y una x en el segundo sumando. Por tanto, la potencia mayor que aparece en el denominador es $\frac{4}{3}$ y es más grande que la máxima potencia del numerador. Así:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}+3x}{\sqrt[3]{x^4+x+1}+\sqrt{x^2+x+1}} = 0.$$

⋆

EJERCICIOS (2.7)

En los ejercicios 1 al 25, calcule el límite indicado.

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2x+2}{x^2+3x+1}$.

2. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+3x^2+2x+1}{x^4+3x+1}$.

3. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2x+2}{x^3+x^2+3x+1}$.

4. $\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)^2(x+3)^2}{3x^4+2x^3+5x^2+10x-21}$.

5. $\lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+3x+1)^5}{(x^5+2x^2+3x+2)(2x+1)^5}$.

6. $\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}{(x^2+4x+3)^2}$.

7. $\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)+(x+2)^2+(x+3)^3}{(x^2+4x+3)^2}$.

8. $\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)+(2x+1)^2+(3x+1)^3}{(x-1)+(2x-1)^2+(3x-1)^3}$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3(x+4)^4}{(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)^2}$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x-1)(x-2)^2\dots(x-20)^{20}}{(x+1)(x+2)\dots(x+210)}$.

11. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x^2+3x+2)^2(x^3+x+1)^3}{(x^7+x^2+3x+12)^2}$.

12. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^4+(x+2)^4+\dots+(x+100)^4}{(3x^2+90x+101)(10x^2+2x+13)}$.

13. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3+1}{x^2+3x+1}-\dfrac{x^3+x+2}{x^2+6x+1}\right)$.

14. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^5+2x^4+3x+2}{x^2+3x+1}-\dfrac{x^4+x+1}{x+2}\right)$.

15. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x+2}-\dfrac{x^2+10}{x+1}\right)$.

16. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+3x+1}{x+2}-\dfrac{x^2+3x+10}{x+1}\right)$.

17. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^4+x+2}+\sqrt[5]{x^3+3x^2+x+1}}{\sqrt[4]{x^6+3x+2}+\sqrt[5]{x^2+4x+7}}$.

18. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^5+2x^3+x+7}\sqrt[5]{x^2+x+1}}{\sqrt[4]{(x^5+3x+2)(x^2+1)}+\sqrt[5]{x^{25}+4x^{20}+1}}$.

19. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{3+x+2x^2}\right)$. (Sugerencia: multiplique por $\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{3+x+2x^2}}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{3+x+2x^2}}$).

20. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

21. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{2x+3}-\sqrt{3x+2}\right)$.

22. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}\right)$.

23. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$.

24. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+3}\right)$.

25. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+2}\right)$.

2.8 LÍMITES UNILATERALES

Al estudiar el concepto de límite de una función, nos hemos referido al comportamiento de la función $f(x)$ cuando x se encuentra cerca de a. Si las imágenes $f(x)$ se "aglomeran" alrededor de algún valor L, mientras la x se encuentra en una vecindad de a, es cuando decimos que el límite de la función cuando x tiende a a es L. Al decir que x se encuentra *cerca* de a, estamos pensando en las x cuya distancia a a es pequeña. Y esto ocurre tanto con las x un poco mayores que a, como con las x un poco menores que a: todas ellas se encuentran en una vecindad de a (todas ellas son vecinas de a).

En ocasiones nos interesa conocer el comportamiento de una función $f(x)$ cuando la x se encuentra cerca de *a por un lado concreto de este punto*: (pensando como si los puntos de la recta real tuvieran dos lados: el derecho y el izquierdo):

- por la izquierda, con valores menores que a, o
- por la derecha, con valores mayores que a.

Surgen así los conceptos de *límites unilaterales* de la función $f(x)$.

Se dice que el límite de la función $f(x)$ *cuando* x *tiende a* a *por la derecha (o bien, por la izquierda), es* L*, lo cual se escribe como* $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$*, (o bien,* $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$*) si podemos tener las imágenes* $f(x)$ *tan cerca de* L *como queramos teniendo a* x *suficientemente cerca de* a *con valores mayores (o bien, menores, respectivamente) que* a.

De manera rigurosa, estos conceptos se establecen como:

(1) $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$, si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

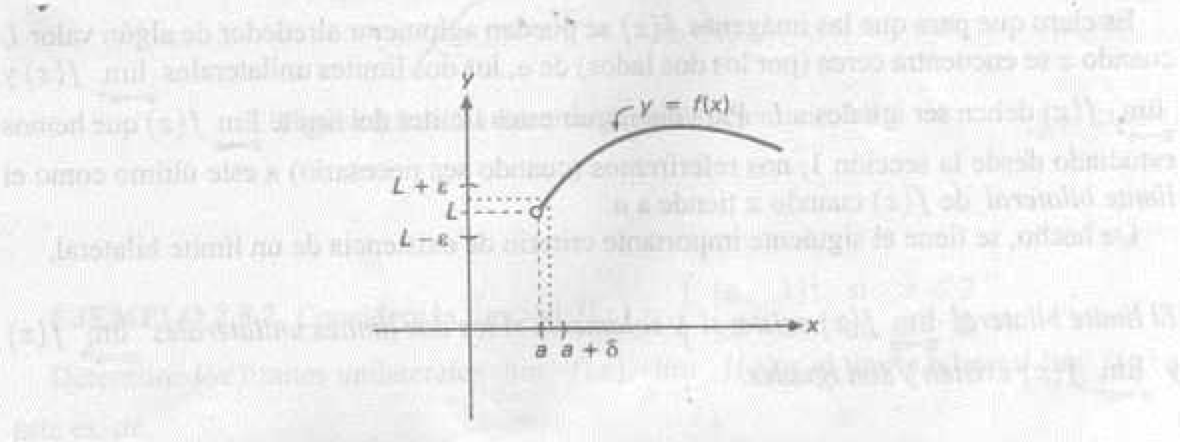


Figura 2.8.1. La función $f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a por la derecha.

(2) $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$, si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

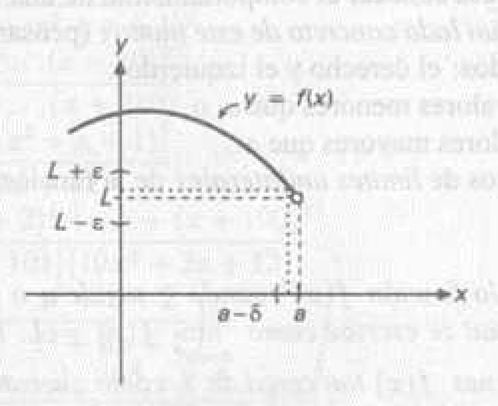


Figura 2.8.2. La función $f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a por la izquierda.

El ejemplo más típico que muestra estos conceptos es el caso de la función $f(x) = \operatorname{sgn} x$ (que habíamos ya considerado en la sección 1), cuando $x \to 0$. Si x se encuentra cerca de 0 por la derecha, los valores de x (por pequeños que éstos sean) serán positivos, en cuyo caso $\operatorname{sgn} x = 1$. Sin embargo, si x se encuentra cerca de 0 por la izquierda, los valores de x (por pequeños que sean) serán negativos, y por lo tanto $\operatorname{sgn} x = -1$. Así, tenemos que:

$$\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x = +1.$$

Es claro que para que las imágenes $f(x)$ se puedan aglomerar alrededor de algún valor L cuando x se encuentra cerca (por los dos lados) de a, los dos límites unilaterales $\lim_{x \to a^+} f(x)$ y $\lim_{x \to a^-} f(x)$ deben ser iguales a L. Para distinguir estos límites del límite $\lim_{x \to a} f(x)$ que hemos estudiado desde la sección 1, nos referiremos (cuando sea necesario) a este último como el *límite bilateral* de $f(x)$ cuando x tiende a a.

De hecho, se tiene el siguiente importante criterio de existencia de un límite bilateral.

El límite bilateral $\lim_{x \to a} f(x)$ *existe, si y solamente si los dos límites unilaterales* $\lim_{x \to a^+} f(x)$ *y* $\lim_{x \to a^-} f(x)$ *existen y son iguales.*

En tal caso (cuando los límites unilaterales son iguales), se tiene:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a} f(x).$$

Por ejemplo, puesto que $\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1 \neq 1 = \lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x$, concluimos, según el criterio anterior, que el límite $\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn} x$ no existe, como ya habíamos dicho en la sección 1.

Veamos algunos ejemplos más.

EJEMPLO 2.8.1. Considere la función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ -x^2 + 3 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$

Determine los límites unilaterales $\lim_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ y el límite bilateral $\lim_{x\to 1} f(x)$ si éste existe.

SOLUCIÓN. Se tiene:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1, x>1} f(x) = \lim_{x\to 1, x>1} (-x^2+3) = -(1)^2+3 = 2$$

y

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1, x<1} f(x) = \lim_{x\to 1, x<1} (x) = 1.$$

Puesto que los límites unilaterales son diferentes, concluimos que el límite bilateral $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe. La gráfica de la función $f(x)$ se muestra en la figura 2.8.3.

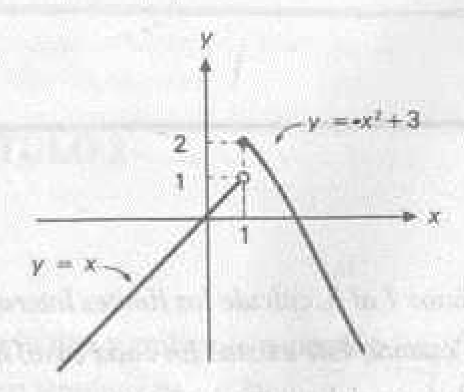


Figura 2.8.3. La función $f(x)$ del ejercicio 2.8.1.

EJEMPLO 2.8.2. Considere la función $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x < 2 \\ 3-x & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$

Determine los límites unilaterales $\lim_{x\to 2^+} f(x)$, $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ y el límite bilateral $\lim_{x\to 2} f(x)$ si éste existe.

SOLUCIÓN. Se tiene:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2, x>2} f(x) = \lim_{x\to 2, x>2} (3-x) = 3-2 = 1$$

y

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2, x<2} f(x) = \lim_{x\to 2, x<2} (x-1)^2 = (2-1)^2 = 1.$$

Puesto que los límites unilaterales son iguales, concluimos que el límite bilateral $\lim_{x\to 2} f(x)$ existe y vale 1. La gráfica de la función $f(x)$ se muestra en la figura 2.8.4.

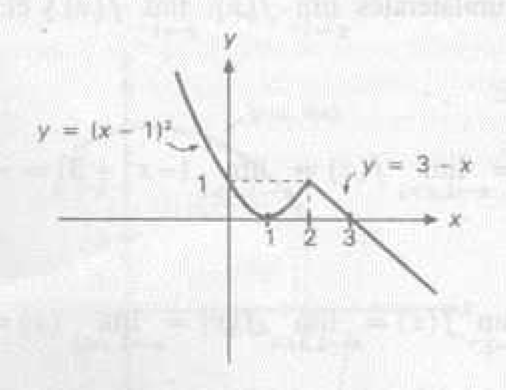


Figura 2.8.4. La función $f(x)$ del ejercicio 2.8.2.

★

EJERCICIOS (2.8)

En cada uno de los ejercicios 1 al 5, calcule los límites laterales $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ *y el límite bilateral* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *cuando éste exista. En cada caso, haga una gráfica mostrando la función* $f(x)$ *en los alrededores del punto* a.

1. $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x<3 \\ 3x-1 & \text{si } x>3 \end{cases}$, $a = 3$.

2. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x<0 \\ 3x & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$, $a = 0$.

3. $f(x) = \begin{cases} x^2+2x-3 & \text{si } x\leq 1 \\ x^2-1 & \text{si } x>1 \end{cases}$, $a = 1$.

4. $f(x) = \begin{cases} 4x+2 & \text{si } x<-1 \\ -2 & \text{si } x>-1 \end{cases}$, $a = -1$.

5. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x<-2 \\ 5 & \text{si } x=-2 \\ -4x & \text{si } x>-2 \end{cases}$, $a = -2$.

En cada uno de los ejercicios del 6 al 10, calcule los límites laterales $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ *y el límite bilateral* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *cuando éste exista, para cada uno de los valores de* a *indicados. En cada caso haga una gráfica en que muestre la función* $f(x)$ *en los alrededores de los puntos* a_1 *y* a_2.

6. $f(x) = \begin{cases} 5x+2 & \text{si } x<1 \\ 3x+4 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$, $a_1 = 0, a_2 = 1$.

7. $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 2x+3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$. $a_1 = -1, a_2 = 1$.

8. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^4-1}{x^2-1} & \text{si } x \neq -1, 1 \\ 3 & \text{si } x = -1 \\ 9 & \text{si } x = 1 \end{cases}$. $a_1 = -1, a_2 = 1$.

9. $f(x) = \begin{cases} 3x+5 & \text{si } x < -1 \\ x+3 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 4x & \text{si } x > 1 \end{cases}$. $a_1 = -1, a_2 = 1$.

10. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -\frac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen} x & \text{si } |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{si } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ $a_1 = -\frac{\pi}{2}, a_2 = \frac{\pi}{2}$.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 2

EXAMEN TIPO (A)

1. Explique con palabras lo que significa la expresión $\lim_{x\to 2} (3x^2 + 2x + 1) = 6$. Dé el significado preciso de ella (en términos de ε y δ).

2. Calcule el límite $\lim_{x\to 1} \left[\frac{4x-3}{2x-1} + \sqrt{x^2+x+1} + (x^2-4)^4 (x^3-1)^5\right]$.

3. Calcule el límite $\lim_{x\to 1} \sqrt{\frac{3x+5}{x+3} + \frac{5x-3}{x^2+x-1} + \frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$.

4. Calcule el límite $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2+17x-18}$.

5. Calcule el límite $\lim_{x\to 1} \frac{x^3+3x^2-5x+1}{x^2+8x-9}$.

6. Calcule el límite $\lim_{x\to 1} \frac{x^4+2x^3-3x^2+4x-4}{x^4+2x-3}$.

7. Calcule el límite $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+x+4} - \sqrt{x^2-x+4}}{\sqrt{x+9}-3}$.

8. Calcule el límite $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(5x)}{8x}$.

9. Calcule el límite $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\cos(3x)}$.

10. Calcule el límite $\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)^2+(x+2)^2+(x+3)^2}{3x^2+8x+9}$.

EXAMEN TIPO (B)

1. Explique con palabras lo que significa la expresión $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}=3$. Dé el significado preciso de ella (en términos de ε y δ).

2. Las siguientes afirmaciones son falsas. En cada caso, dé un ejemplo concreto en el que no se cumpla la afirmación dada:

a) Si $f(a)$ existe, entonces $\lim_{x\to a} f(x)$ existe.

b) Si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, entonces $f(a)$ existe.

c) Si los límites unilaterales $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existen, entonces el límite bilateral $\lim_{x\to a} f(x)$ existe.

d) Si $\lim_{x\to a} g(x)=0$ y $f(x)$ es cualquier función definida en $\mathbb{R}$, entonces $\lim_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=0$.

e) Si $\lim_{x\to a} g(x)=0$ y $f(x)$ es cualquier función definida en $\mathbb{R}$, entonces $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$.

3. Calcule el límite $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^4+2x^3-3x^2+4x-4}{x^4+2x-3}$.

4. Calcule el límite $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^4-x^3-7x^2+8x+4}{x^4-2x^3-x^2-4x+12}$.

5. Calcule el límite $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+3x+4}-\sqrt{x^2-3x+4}}{\sqrt{x+16}-4}$.

6. Calcule el límite $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{26+x}-3}{\sqrt[4]{15+x}-4}$.

7. Calcule el límite $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(4x)}{2-2\cos(6x)}$.

8. Calcule el límite $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}^2(7x)}{1-\cos^3(5x)}$.

9. Calcule el límite $\lim_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^2+(3x+2)^2+(4x+3)^2}{(x-1)^2+(x-2)^2+(x-3)^2}$.

10. Calcule el límite (si existe) $\lim_{x\to 0} f(x)$, en donde $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos(3x)}{x} & \text{si } x<0\\ 5 & \text{si } x=0\\ \frac{\operatorname{sen} x-\tan x}{\operatorname{sen}(2x)} & \text{si } x>0.\end{cases}$

NOTA HISTÓRICA: LEIBNIZ, UN PENSADOR UNIVERSAL.



Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) nació en Leipzig, en cuya universidad ingresó a los quince años y a los diecisiete obtuvo su bachillerato en artes. En la misma universidad estudió teología, derecho, filosofía y matemáticas. Obtuvo su doctorado en derecho en la universidad de Altdorf, en Nuremburg, y luego se dedicó a la carrera diplomática, lo que le permitió hacer una gran cantidad de viajes. En uno de sus viajes a París se encontró con Huygens, quien le recomendó penetrar más en el mundo de la Matemática leyendo los tratados de Pascal. En 1673, en un viaje a Londres adquirió las *Lecciones geométricas* de Isaac Barrow, el profesor de Newton, obra que estudió profundamente. Éstos y otros viajes, sus entrevistas con los científicos de la época, y el estudio cuidadoso de los tratados matemáticos más importantes hasta el siglo XVI, le permitieron empezar a concebir las ideas de un método general para encontrar tangentes a curvas, ya sea racionales o irracionales, algebraicas o trascendentes (lo que luego se convertiría en el Cálculo). Uno de los grandes aciertos de Leibniz, cuando empezó a escribir sus ideas sobre el Cálculo, fue el darse cuenta de que una notación adecuada para aquellos nuevos conceptos que comenzaba a concebir podría conducir a una mejor comprensión de los canales de interconexión que tales conceptos tenían. A él se debe la notación $\frac{dy}{dx}$ para la derivada de una función, la cual se podía manejar libremente como un cociente (de dy entre dx), mientras que Newton usó la notación $\dot{y}$ para denotar la misma idea. Aparentemente la manera de denotar las cosas en matemáticas solamente consiste en ponerse de acuerdo en cómo escribir las ideas. Por ejemplo, a partir de este momento podríamos decir que el producto de a por b lo denotaremos como $a * b$. Esta notación es un poco más incómoda que la que conocemos ab (para el producto de a por b), pero... si es nuestro capricho, basta que seamos consistentes con ella y podremos usarla como tal siempre que queramos. Sin embargo, el ejemplo de lo que sucedió con el nacimiento y desarrollo del cálculo muestra que la notación de las ideas matemáticas es mucho más que un capricho: la notación usada por Leibniz para la derivada le permitió descubrir, entender y usar de manera natural muchos resultados del Cálculo (por ejemplo, la derivada de una función compuesta y la derivada de una función inversa, temas que estudiaremos en el capítulo 6), mientras que las mismas ideas fueron escritas por Newton con una notación menos afortunada que la de Leibniz. El resultado de esta aparentemente insignificante diferencia en la notación fue un retraso notable de la matemática de Inglaterra respecto de la matemática del continente durante los siglos XVII y XVIII.

Así como en cualquier libro de Cálculo siempre se le rinde tributo a Leibniz (al igual que a Newton) por sus aportaciones en el descubrimiento de esta parte de la Matemática, es importante mencionar que la trascendencia de su trabajo en Matemática es tan grande como lo es en Filosofía. Leibniz fue, con todo, uno de los grandes pensadores universales de todos los tiempos.

CAPÍTULO 3
CONTINUIDAD

"La teoría de la continuidad es una importante y hermosa ficción matemática."

James R. Newman

Con el concepto de límite presentado en el capítulo anterior, vamos ahora a construir un nuevo concepto previo al de derivada, que tiene que ver con una propiedad geométrica de la gráfica de la función, llamado continuidad. Con este concepto lograremos tener una gran división de las funciones en funciones continuas y en funciones discontinuas. En este curso, vamos a trabajar principalmente con funciones continuas. De hecho, veremos en el próximo capítulo que *algunas* de esas funciones son a las que podremos calcularles derivada.

3.1 CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

El concepto intuitivo de continuidad de una función en un punto está muy relacionado con el aspecto gráfico de la función en los alrededores del punto. Daremos, de manera provisional, la siguiente definición de continuidad, para posteriormente precisarla en términos matemáticos.

Una función $y = f(x)$ es continua en un punto $x = a$ de su dominio, si en ese punto la gráfica de la función no se rompe.

Por ejemplo, veamos las siguientes tres gráficas de funciones (figura 3.1.1), las cuales serán, en cierto sentido que veremos más adelante, el prototipo de funciones que no poseen la propiedad de continuidad en algún punto de su dominio.

Un ejemplo concreto de esta situación lo proporciona la función $f(x) = |\text{sgn}\, x|$, que ya fue considerada en la sección 1 del capítulo 2. Esta función es, de manera explícita:

$$f(x) = |\text{sgn}\, x| = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

En este caso se tiene $f(0) = |\text{sgn}\, 0| = 0$ (la función existe en el punto problema, cosa que no ocurría en el primer caso), y $\lim_{x\to 0} |\text{sgn}\, x| = 1$ (el límite bilateral de la función sí existe cuando x tiende al punto en donde es discontinua, cosa que no ocurría en el segundo caso). El problema por el cual también decimos que esta función *no es continua* en $x = a$ es que tales valores (el de la función en 0 y el del límite de la función cuando $x \to 0$) *no son iguales*.

La definición matemática de continuidad de una función en un punto es muy simple: una función $f(x)$ es continua en $x = a$, *si no ocurre ninguna de las tres situaciones presentadas anteriormente*.

Es decir, se tiene la siguiente definición:

La función $f(x)$ es continua en $x = a$ si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1. *$f(a)$ existe.*
2. *$\lim_{x\to a} f(x)$ existe.*
3. *$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

En la definición anterior la palabra "existe", significa que **existe como número real** (es decir, no se valen los "infinitos" en ninguno de los tres incisos de la definición). Si alguna de estas tres condiciones falla, decimos que la función es **discontinua** en $x = a$.

En ocasiones, para simplificar las referencias que hagamos de la definición anterior, diremos simplemente que la función $f(x)$ es continua en $x = a$, si se tiene la igualdad $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, la cual es solamente la tercera condición establecida anteriormente, pero en donde estamos aceptando implícitamente que ambos lados de esta igualdad existen (que son las dos primeras condiciones de la definición inicial).

Muchas de las funciones con las que hemos trabajado en estos dos capítulos son continuas. Esto lo dice el siguiente teorema.

TEOREMA 3.1.1. *Una función racional $f(x)$ es continua en todo punto de su dominio.*

En efecto, en el teorema 2.3.7, vimos que si $f(x)$ es una función racional y a es un punto del dominio de la función, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, lo cual establece la continuidad de esta función en $x = a$. En particular, si $f(x)$ es una función polinomial, ésta es continua en cualquier punto $x = a \in \mathbf{R}$.

También la función $f(x) = \sqrt{x}$, la cual está definida en los reales no negativos, es una función continua en cualquier punto de su dominio, pues si $a \geq 0$, se tiene:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{\lim_{x\to a} x} = \sqrt{a} = f(a),$$

(en donde usamos el teorema 2.3.8 del capítulo anterior). Recuerde que la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$ es una semiparábola superior que abre hacia la derecha y tiene su vértice en el origen de coordenadas, la cual, efectivamente, nunca sufre rompimiento alguno.

Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 3.1.1. Estudie la continuidad de la función $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

SOLUCIÓN. Se trata de una función racional. El teorema 3.1.1 nos dice que esta función será continua en todo punto de su dominio. Observe que el dominio de $f(x)$ es el conjunto $\mathbf{R}$ excepto las x que anulen el denominador. Pero la ecuación $x^2+1=0$ no tiene raíces (reales), así que el dominio de $f(x)$ es todo el conjunto de número reales. Concluimos entonces que la función dada es continua en todo punto $x = a \in \mathbf{R}$. Es decir, que su gráfica (mostrada en la figura 3.1.2) nunca sufre rompimiento alguno.

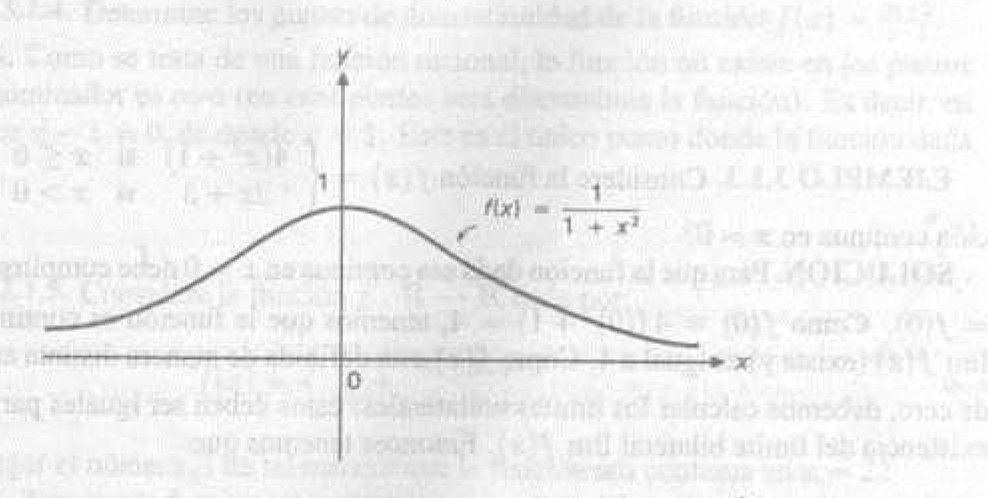


Figura 3.1.2. La gráfica de la función continua $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

EJEMPLO 3.1.2. Estudie la continuidad de la función $f(x) = \frac{x-1}{x^2-5x+6}$.

SOLUCIÓN. Se trata de una función racional, cuyo dominio es $\mathbf{R}$ excepto los ceros del denominador. La ecuación $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) = 0$ tiene por solución a $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$. Así, el dominio de $f(x)$ es $\mathbf{R} - \{2, 3\}$. Aseguramos entonces, a la luz del teorema 3.1.1, que la función dada $f(x)$ es continua en todos los puntos de $\mathbf{R} - \{2, 3\}$. Observe que en $x = 2, 3$ la función $f(x)$ no existe, por lo que, de hecho, esta función es discontinua en $x = 2$ y en $x = 3$. La gráfica de esta función se muestra en la figura 3.1.3.

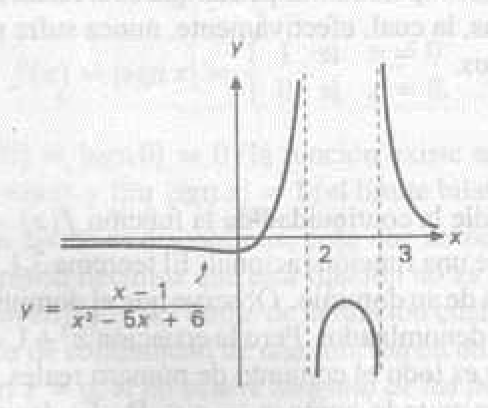


Figura 3.1.3. La función $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-5x+6}$ es discontinua en $x = 2$ y $x = 3$.

★

EJEMPLO 3.1.3. Considere la función $f(x) = \begin{cases} 4(x^2+1) & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 2x+3 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$. ¿Es esta función continua en $x = 0$?

SOLUCIÓN. Para que la función dada sea continua en $x = 0$ debe cumplirse que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Como $f(0) = 4\left((0)^2+1\right) = 4$, tenemos que la función es continua si el límite $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ (existe y) es igual a 4. Como $f(x)$ está definida de manera distinta antes y después de cero, debemos calcular los límites unilaterales: éstos deben ser iguales para garantizar la existencia del límite bilateral $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Entonces tenemos que:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0, x>0} f(x) = \lim_{x\to 0, x>0} (2x+3) = 3$$

y

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0, x<0} f(x) = \lim_{x\to 0, x<0} 4(x^2+1) = 4.$$

Como $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, concluimos que el límite bilateral $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no existe y, por lo tanto, la función dada es discontinua en $x = 0$.

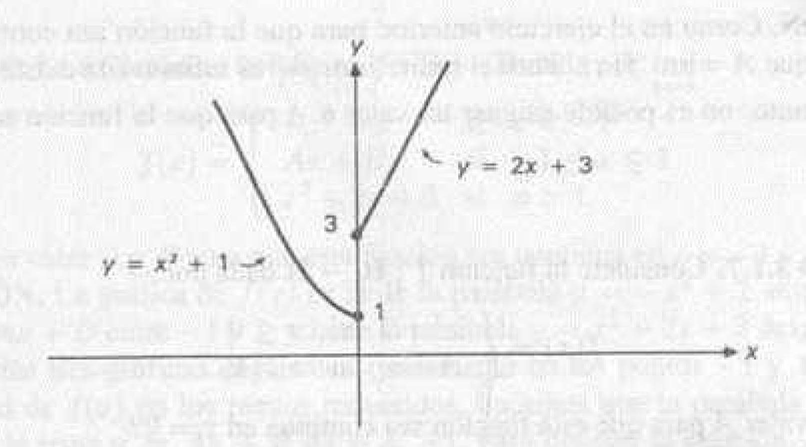


Figura 3.1.4. La función del ejemplo 3.1.3 es discontinua en $x = 0$.

★

EJEMPLO 3.1.4. Determine los puntos de discontinuidad de la función $f(x) = \frac{3x+5}{x-1}$.

SOLUCIÓN. Como se trata de una función racional, la función no existe en los puntos en donde el denominador es cero (en esos puntos será discontinua la función). Es decir, en aquellas x en que $x - 1 = 0$, de donde $x = 1$. Éste es el único punto donde la función dada es discontinua.

★

EJEMPLO 3.1.5. Considere la función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{si} \quad x \neq 2 \\ A & \text{si} \quad x = 2. \end{cases}$$

¿Es posible escoger el número A de tal manera que la función sea continua en $x = 2$?

SOLUCIÓN. Para que la función sea continua en $x = 2$ se debe cumplir que $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$. Como $f(2) = A$, el número A debe ser el límite $\lim_{x \to 2} f(x)$: si este límite existe, dando a A ese valor se logra la continuidad deseada. El límite se calcula fácilmente como:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} (x+2) = 4.$$

Así, si $A = 4$ la función dada es continua en $x = 2$.

★

EJEMPLO 3.1.6. Considere la función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ A & \text{si} \quad x = 1. \end{cases}$$

¿Es posible escoger el número A de tal manera que la función sea continua en $x = 1$?

SOLUCIÓN. Como en el ejercicio anterior, para que la función sea continua en $x = 1$ se debe tener que $A = \lim_{x \to 1} f(x)$. Pero el límite $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1}$ es infinito (no existe como número real). Por lo tanto, no es posible asignar un valor a A para que la función sea continua en $x = 1$.

⋆

EJEMPLO 3.1.7. Considere la función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ A - x & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

¿Cuánto debe valer A para que esta función sea continua en $x = 0$?

SOLUCIÓN. Para que esta función sea continua en $x = 0$ debe ocurrir que:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = (0)^2 + 3 = 3.$$

A su vez, para que esto ocurra (para que el límite bilateral exista) los límites unilaterales $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ y $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ deben existir y ser iguales (a 3). Ciertamente $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 3$. Por otra parte:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = A - 0 = A,$$

de donde obtenemos entonces que $A = 3$.

Otra manera más sencilla de ver la solución de este ejemplo es pensar en la gráfica de $f(x)$. Esta gráfica, para valores no positivos de x, corresponde a la parábola $y = x^2 + 3$, y para valores negativos de x corresponde a la recta $y = A - x$, de la cual no conocemos el valor de A (que es la ordenada al origen de la recta). Para que esta función sea continua en $x = 0$ las gráficas anteriores deben "engancharse" en el punto de abscisa $x = 0$. A la parábola $y = x^2 + 3$, en $x = 0$, le corresponde el punto $(0, 3)$, mientras que a la recta $y = A - x$, en $x = 0$, le corresponde el punto $(0, A)$. Estas dos gráficas enganchan si los puntos en donde termina la parábola $(0, 3)$ y donde empieza la recta $(0, A)$ coinciden. Y esto ocurre cuando $A = 3$.

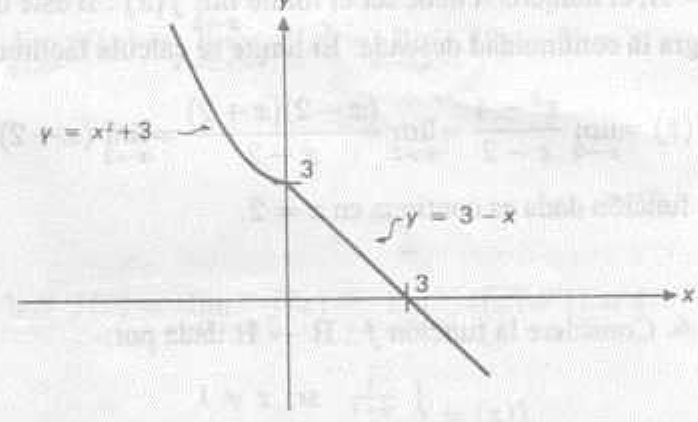


Figura 3.1.5. La función del ejemplo 3.1.7.

⋆

EJEMPLO 3.1.8 Considere la función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & \text{si} \quad x < -1 \\ Ax + B & \text{si} \quad -1 \le x \le 1 \\ x^2 + 2x + 3 & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$

¿Cuánto deben valer A y B para que esta función sea continua en $x = -1$ y en $x = 1$?

SOLUCIÓN. La gráfica de $f(x)$ es la de la parábola $y = -x^2 + 2$ antes de -1, la de la recta $y = Ax + B$ entre -1 y 1, y la de la parábola $y = x^2 + 2x + 3$ después de 1. Para lograr que estas tres gráficas enganchen (justamente en los puntos -1 y 1), teniendo así la continuidad de $f(x)$ en los puntos requeridos, hacemos que la parábola $y = -x^2 + 2$ coincida con la recta $y = Ax + B$ en $x = -1$, para obtener la relación $-(-1)^2 + 2 = A(-1) + B$, o sea:

$$-A + B = 1.$$

De igual manera, hacemos que la recta $y = Ax + B$ coincida con la parábola $y = x^2 + 2x + 3$ en $x = 1$, y obtenemos la relación $A(1) + B = (1)^2 + 2(1) + 3$, o sea:

$$A + B = 6.$$

Al resolver simultáneamente las dos ecuaciones $-A + B = 1$ y $A + B = 6$, obtenemos que $A = \frac{5}{2}$ y $B = \frac{7}{2}$. Éstos son los valores requeridos de A y B.

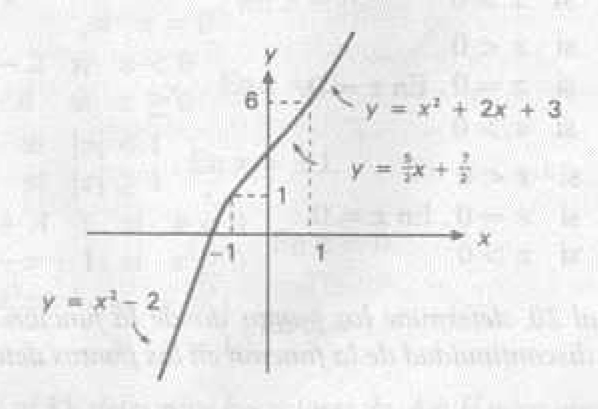


Figura 3.1.6. La función del ejemplo 3.1.8.

Debemos mencionar (porque lo usaremos en algún momento) que las funciones trigonométricas $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $f(x) = \cos x$ son continuas en cualquier punto $x = a \in \mathbf{R}$, al igual que la función exponencial $f(x) = e^x$. La función logaritmo natural $f(x) = \ln x$ es continua en cualquier punto de su dominio (que es $\mathbf{R}^+$).

EJERCICIOS (3.1)

En los ejercicios 1 al 10, diga si la función $f(x)$ dada es continua en el punto indicado. Justifique su respuesta.

1. $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x<1 \\ x^2-x & \text{si } x>1 \end{cases}$. En $x=1$.

2. $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x\leq 1 \\ x^2-x & \text{si } x>1 \end{cases}$. En $x=1$.

3. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x<0 \\ x^2 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$. En $x=0$.

4. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x\leq 0 \\ x^2+1 & \text{si } x>0 \end{cases}$. En $x=0$.

5. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x\neq 1 \\ 2 & \text{si } x=1 \end{cases}$. En $x=1$.

6. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x^4-1} & \text{si } x\neq 1 \\ 1 & \text{si } x=1 \end{cases}$. En $x=1$.

7. $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$. En $x=0$.

8. $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x} & \text{si } x<0 \\ 2 & \text{si } x=0 \\ \frac{\tan(3x)}{x} & \text{si } x>0 \end{cases}$. En $x=0$.

9. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^4-1}{x-1} & \text{si } x<0 \\ 4 & \text{si } x=0 \\ \frac{\operatorname{sen}(8x)}{\operatorname{sen}(2x)} & \text{si } x>0 \end{cases}$. En $x=0$.

10. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+1} & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } x=0 \\ 2 & \text{si } x>0 \end{cases}$. En $x=0$.

En los ejercicios 11 al 20, determine los puntos donde la función dada es discontinua. Explique la razón de la discontinuidad de la función en los puntos determinados.

11. $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+7x-8}$. **12.** $f(x) = \dfrac{x^3+2x+1}{x^2+2x+7}$. **13.** $f(x) = sgn(x-2)$.

14. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$. **15.** $f(x) = |x^2-1|$.

16. $f(x) = 1 - \operatorname{sgn} x^2 + \operatorname{sgn}^2 x$.

17. $f(x) = \begin{cases} x^2+2x+3 & \text{si } x\leq 0 \\ \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x} & \text{si } x>0. \end{cases}$

18. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x<-1 \\ 0 & \text{si } x=-1 \\ -1 & \text{si } -1<x<1 \\ x^2-2 & \text{si } x\geq 1. \end{cases}$

19. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x+1) & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 - 1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ \cos(x-1) & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$

20. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } -1 < x < 0 \\ \operatorname{sen} x & \text{si } 0 \leq x < \pi \\ 1 & \text{si } x \geq \pi. \end{cases}$

En los ejercicios 21 al 30, determine el valor de A para que la función sea continua en el punto indicado.

21. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{-x}-1}{x+1} & \text{si } x < -1 \\ x + A & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$. En $x = -1$.

22. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + A & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$. En $x = 0$.

23. $f(x) = \begin{cases} \frac{2\operatorname{sen}(x-1)}{x^3-1} & \text{si } x \neq 1 \\ A & \text{si } x = 1 \end{cases}$. En $x = 1$.

24. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+1} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ Ax^2 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$. En $x = \pm 1$.

25. $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } |x| < \frac{\pi}{2} \\ |x| - A & \text{si } |x| \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$. En $x = \pm\frac{\pi}{2}$.

26. $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos(2x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ A & \text{si } x = 0 \end{cases}$. En $x = 0$.

27. $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x < 0 \\ x + A & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$. En $x = 0$.

28. $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } |x| < 1 \\ Ax & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$. En $x = \pm 1$.

29. $f(x) = \begin{cases} 2x + A & \text{si } x < 0 \\ x^2 - x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$. En $x = 0$.

30. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - x^2 + x - 1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ A & \text{si } x = 1 \end{cases}$. En $x = 1$.

En los ejercicios 31 al 35, determine los valores de A y B para que la función sea continua en los puntos indicados.

31. $f(x) = \begin{cases} A & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{x^6-1}{x^4-1} & \text{si } |x| < 1 \\ B + x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$. En $x = \pm 1$.

32. $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{si } x < -1 \\ Ax + B & \text{si } |x| \leq 1 \\ 2x - 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$. En $x = \pm 1$.

33. $f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{si } x \leq -1 \\ Ax + B & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$. En $x = -1, 2$.

34. $f(x) = \begin{cases} x + A & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 3 \\ x + B & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$. En $x = -1, 3$.

35. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si} \quad x < -2 \\ Ax + B & \text{si} \quad -2 \leq x < 1 \\ \ln x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$. En $x = -2, 1$.

36. Suponga que $f(x)$ es una función (definida en todo $\mathbf{R}$) continua en $x = a$. Considere la función $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \neq a \\ A & \text{si} \quad x = a \end{cases}$. ¿En qué condiciones esta función es continua en $x = a$?

3.2 OPERACIONES CON FUNCIONES CONTINUAS

En el capítulo 1 se vio cómo se puede operar con las funciones para obtener nuevas funciones. En esta sección nos preguntamos si la propiedad de continuidad de las funciones se conserva al operar con ellas. Más precisamente, nos interesa saber si al operar (digamos que al sumar) dos funciones continuas obtenemos una función continua. En el siguiente teorema se recogen los resultados correspondientes acerca del comportamiento de las funciones continuas ante la suma, producto y cociente de estas funciones.

TEOREMA 3.2.1. *Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en $x = a$. Entonces:*
1. La función suma $(f + g)(x)$ es continua en $x = a$.
2. La función producto $(fg)(x)$ es continua en $x = a$.
3. La función cociente $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ es continua en $x = a$, si $g(a) \neq 0$.

Por supuesto que los resultados correspondientes a los incisos 1) y 2) del teorema anterior se pueden generalizar de manera natural: si $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ son k funciones continuas en $x = a$, entonces su suma $(f_1 + f_2 + \ldots + f_k)(x)$ y su producto $(f_1 f_2 \ldots f_k)(x)$ son funciones continuas en $x = a$.

No daremos los detalles que prueban la validez de todas las afirmaciones hechas en el teorema 3.2.1. Sin embargo sí queremos llamar la atención sobre el hecho de que su contenido es, en otras palabras, un resultado que es esencialmente el mismo que uno de los teoremas sobre límites estudiados en el capítulo anterior. Por ejemplo, veamos el primer inciso. Decir que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en $x = a$, significa (según la definición de continuidad) que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} g(x) = g(a).$$

De acuerdo con estas hipótesis, queremos convencernos de que la función $(f+g)(x)$ es continua en $x=a$. ¿Qué tenemos que probar? Según la definición de continuidad deberíamos demostrar que:

$$\lim_{x \to a} (f+g)(x) = (f+g)(a).$$

Pero la fórmula anterior no es más que una consecuencia del teorema visto en la sección 3 del capítulo anterior sobre el límite de una suma de funciones (el límite de una suma de funciones es la suma de los límites de cada una de las funciones). En efecto:

$$\lim_{x \to a} (f+g)(x) = \lim_{x \to a} (f(x)+g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = f(a)+g(a) = (f+g)(a).$$

Los otros incisos del teorema 3.2.1 se pueden demostrar de manera similar.

Así pues, en el teorema 3.2.1 se establece que la suma, el producto y el cociente de funciones continuas en un punto son funciones continuas en ese punto (con la condición adicional, en el caso del cociente de funciones, de que el denominador no se anule en el punto en cuestión).

EJEMPLO 3.2.1. Verifique que la función $f(x) = 5x^2 + 2 + \sqrt{x}\left(1 + \frac{x}{x^2+9}\right)$ es continua en todo número real no negativo a.

SOLUCIÓN. Ciertamente la función $f_1(x) = 5x^2 + 2$ es continua, pues es una función polinomial. La función $f_2(x) = \sqrt{x}$ también es continua (en todo su dominio, que son los reales no negativos), como habíamos visto en la sección anterior. La función constante $f_3(x) = 1$ es continua, pues es un tipo de función polinomial, y, finalmente, la función $f_4(x) = \frac{x}{x^2+9}$ es una función racional cuyo dominio es todo $\mathbb{R}$ (pues el denominador nunca se anula) y por lo tanto es continua en cualquier $a \in \mathbb{R}$. Entonces la función $f(x)$ dada se puede ver como:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)\,(f_3(x) + f_4(x)),$$

y se descubre entonces que esta función está formada por sumas y producto de funciones continuas. Por el teorema 3.2.1, $f(x)$ es una función continua en cualquier punto $x = a \geq 0$.

Un detalle sutil que contiene el teorema anterior es referente al sentido (la dirección) en que están hechas las afirmaciones que en él aparecen. Éste es un asunto que tiene que ver con lógica, esa parte de la Matemática que marca las reglas del juego deductivo con el que se teje el estudio de esta ciencia. Para ser más esquemáticos, veamos la afirmación del primer inciso del teorema 3.2.1 como:

$$\textbf{si}\ldots\begin{pmatrix}\text{las funciones } f(x) \text{ y } g(x)\\ \text{son continuas en } x=a\end{pmatrix}\ldots\textbf{entonces}\ldots\begin{pmatrix}\text{la función suma } (f+g)(x)\\ \text{es continua en } x=a\end{pmatrix}.$$

o bien como:

$$\begin{array}{c}\text{las funciones } f(x) \text{ y } g(x) \\ \text{son continuas en } x = a\end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c}\text{la función suma } (f+g)(x) \\ \text{es continua en } x = a\end{array}.$$

Es muy común que cuando ocurren este tipo de afirmaciones en Matemática (en los teoremas), uno se pregunte por la validez de la implicación recíproca. Es decir, nos preguntamos si es verdad que:

$$\begin{array}{c}\text{la función suma } (f+g)(x) \\ \text{es continua en } x = a\end{array} \overset{?}{\Longrightarrow} \begin{array}{c}\text{las funciones } f(x) \text{ y } g(x) \\ \text{son continuas en } x = a\end{array}.$$

Más precisamente, suponga que se tienen dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ de las que sabemos que su suma $(f+g)(x)$ es una función continua en $x = a$. La pregunta es, ¿implica esto que cada una de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ es continua en $x = a$? Por el momento no lo sabemos, pues lo que establece el teorema 3.2.1 es una afirmación que va en un solo sentido: Si las dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $x = a$, *entonces* la función suma $(f+g)(x)$ es una función continua en $x = a$. De hecho, veremos que el recíproco de esta afirmación es falso. Cuando en Matemática se quiere mostrar la falsedad de una afirmación [en nuestro caso queremos ver que la afirmación: "Si la suma de dos funciones es una función continua, entonces cada una de las funciones es continua" es falsa], basta que se dé un ejemplo concreto en el cual la afirmación no se cumpla. Este tipo de ejemplos son llamados, en general, *contraejemplos*. Veamos un poco más de cerca esto: cuando en Matemática se establece una afirmación del tipo $p \Rightarrow q$ (que se lee "p implica q", o bien "si p entonces q") se está diciendo que *siempre* que se tenga la condición p (la hipótesis), se va a tener la condición q (la tesis o conclusión). Enfatizamos la palabra "siempre", pues ésta es justamente la que le da la fuerza de la generalidad a los teoremas en Matemática. Por el teorema 3.2.1, podemos decir que siempre que tengamos dos funciones continuas en un punto, entonces la suma de tales funciones será una función continua en ese punto. Hemos dicho que la afirmación recíproca es falsa, es decir que *no siempre* que tengamos dos funciones cuya suma sea una función continua en un punto, entonces cada una de las funciones será una función continua en ese punto. Y para ver que esto es cierto, basta dar validez al "no siempre" mencionado anteriormente: con *un ejemplo* basta. Este ejemplo es el llamado contraejemplo.

Para que tenga una versión más cotidiana de lo que es un contraejemplo, piense en una típica conversación de fin de semana con un amigo suyo. Están hablando sobre una fiesta que habrá el sábado por la noche. Su amigo le hace la siguiente afirmación: "*Si* alguien bebe en la fiesta, *entonces* beberá cerveza". Usted quiere demostrarle a su amigo que tal afirmación es falsa. En la fiesta hay más de mil invitados, pero bastaría que usted le muestre a su amigo que *uno de ellos*, digamos que Juan Pérez, una de las personas más animadas de la fiesta, está tomando cubas con ron, para con este solo ejemplo (éste es el contraejemplo), demostrar la falsedad de la afirmación de su amigo. La existencia de esa persona tomando cubas en la fiesta no significa que no haya personas tomando cervezas. De hecho, puede ser que solamente Juan Pérez esté tomando cubas y todos los demás cervezas. Sin embargo, Juan Pérez es el ejemplo (el contraejemplo) de que la afirmación de su amigo, "si alguien bebe en la fiesta, entonces beberá cerveza", es falsa.

Regresando a la Matemática, queremos ver que la implicación:

$$\begin{array}{c}\text{la función suma } (f+g)(x) \\ \text{es continua en } x=a\end{array} \implies \begin{array}{c}\text{las funciones } f(x) \text{ y } g(x) \\ \text{son continuas en } x=a\end{array}$$

es falsa, y para ello daremos un ejemplo de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ tales que su suma $(f+g)(x)$ es una función continua en algún punto $x=a$, pero en el cual las funciones $f(x)$ y/o $g(x)$ no son continuas en $x=a$. Consideremos las funciones:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ x-1 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

y

$$g(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} -1 & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ 1 & \text{si } x>0. \end{cases}$$

Ambas funciones son discontinuas en $x=0$, pues ninguno de los límites $\lim_{x\to0} f(x)$ y $\lim_{x\to0} g(x)$ existe. En efecto:

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0,x>0} f(x)=\lim_{x\to0,x>0}(x-1)=-1\neq$$

$$1=\lim_{x\to0,x<0}(x+1)=\lim_{x\to0,x<0} f(x)=\lim_{x\to0^-} f(x),$$

y, como ya sabemos del capítulo anterior:

$$\lim_{x\to0^+} g(x)=\lim_{x\to0,x>0} g(x)=\lim_{x\to0,x>0}(1)=1\neq$$

$$-1=\lim_{x\to0,x<0}(-1)=\lim_{x\to0,x<0} g(x)=\lim_{x\to0^-} g(x).$$

Así pues, el límite cuando $x\to0$ para las dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ no existe, con lo que se comprueba su discontinuidad en $x=0$.

Obtengamos la suma $(f+g)(x)$. Ésta será una función que estará definida en pedazos, como lo están las funciones $f(x)$ y $g(x)$. De hecho:

- si $x<0$ se tiene $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=(x+1)+(-1)=x$,
- si $x=0$ se tiene $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=0+0=0$,
- si $x>0$ se tiene $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=(x-1)+1=x$,

de modo entonces que $(f+g)(x)=x$ para cualquier $x\in\mathbb{R}$. Es decir, la función suma $(f+g)(x)$ es la función identidad, la cual sabemos que es una función continua (pues es una función polinomial) en cualquier punto $a\in\mathbb{R}$. Es continua en particular en $a=0$, en donde tanto $f(x)$ como $g(x)$ son discontinuas.

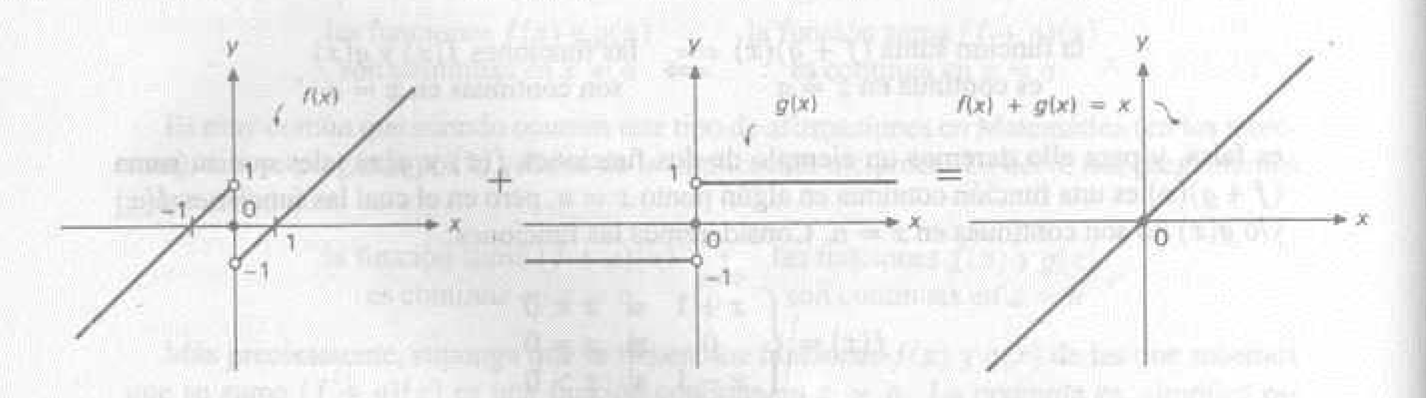


Figura 3.2.1. La suma de dos funciones discontinuas puede ser una función continua.

En realidad existen muchos ejemplos de funciones discontinuas en un punto cuya suma es continua en ese punto. Esperamos que usted dé algunos otros.

Al igual que la afirmación recíproca del primer inciso del teorema 3.2.1 es falsa, las correspondientes afirmaciones recíprocas de los dos incisos restantes de ese teorema también son falsas. Es decir, del hecho de que dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ sean tales que su producto $(fg)(x)$ es una función continua en un punto, no se infiere que cada una de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ sea continua en ese punto (o sea, la afirmación recíproca del segundo inciso del teorema 3.2.1 es falsa), y del hecho de que dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ sean tales que su cociente $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ es una función continua en un punto, no se infiere que cada una de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ sea continua en ese punto (o sea, la afirmación recíproca del tercer inciso del teorema 3.2.1 es falsa). Dejamos al estudiante que dé los contraejemplos correspondientes.

En el caso de la composición de funciones continuas el resultado es un poco más complicado de establecer con precisión: si la función $g(x)$ es continua en $x = a$ y la función $f(x)$ es continua en $y = g(a)$, entonces la función compuesta $(f \circ g)(x)$ es continua en $x = a$. En términos de la definición de continuidad, la propiedad de continuidad de la composición de funciones se puede esquematizar como sigue:

$$\left.\begin{array}{c} \lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a) = b \\ \text{y} \\ \lim\limits_{y\to b} f(y) = f(b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to a} (f \circ g)(x) = (f \circ g)(a).$$

La manera como recordaremos este resultado es, simplemente como: "composición de funciones continuas es una función continua".

Por ejemplo, la función $f(x) = \cos(x^2 + 3e^x)$ es continua en todo punto $x \in \mathrm{R}$, pues es la composición de la función $y = \cos x$ que es continua, con la suma de funciones $y = x^2$ y $y = 3e^x$ que también son continuas (y cuya suma produce, según el teorema 3.2.1, una función continua).

3.3 CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN INTERVALO

En la sección anterior se estudió la continuidad de una función en un punto. Ahora presentamos el concepto de continuidad de una función en un intervalo. Si el intervalo es abierto, la definición de continuidad de la función en el intervalo es la que todos nos podríamos imaginar:

Una función $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo abierto I de $\mathbb{R}$ es continua en I si lo es en todos y cada uno de los puntos del intervalo I.

Así, por ejemplo, una función polinomial es continua en el intervalo $\mathbb{R}$.

En el caso de funciones definidas en intervalos cerrados, la definición de continuidad es un poco más delicada:

Una función $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida en el intervalo cerrado $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$ si lo es en el intervalo abierto (a, b) y además se cumplen las dos condiciones:

1. $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.
2. $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

Las dos condiciones adicionales establecidas en la definición anterior garantizan que la gráfica de la función *arranque* de manera continua del punto $(a, f(a))$ y *llegue* de manera continua al punto $(b, f(b))$.

Si una función no es continua en un intervalo decimos que es discontinua en el intervalo (para lo cual, según las definiciones anteriores, bastaría con que fuera discontinua en un punto del intervalo, si éste es abierto, y/o en alguno de los extremos del intervalo, si éste es cerrado).

Por ejemplo, la función $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ x^2 & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ 5 & \text{si} \quad x = 2, \end{cases}$$

cuya gráfica se muestra en la figura 3.3.1, es continua en el intervalo abierto $(0, 2)$, pero no es continua en el intervalo cerrado $[0, 2]$, pues:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0 \neq 1 = f(0)$$

y

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 = 4 \neq 5 = f(2).$$

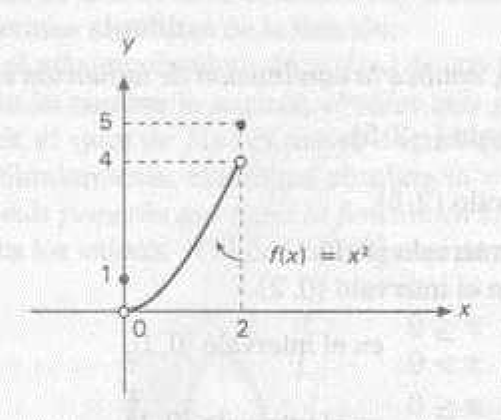


Figura 3.3.1. Esta función es continua en $(0, 2)$, pero es discontinua en $[0, 2]$.

La función $f(x) = \operatorname{sgn} x$ es continua en los intervalos $\mathbf{R}^+$ y $\mathbf{R}^-$, pues, de hecho, en tales intervalos la función $\operatorname{sgn} x$ es constante (igual a 1 y a -1, respectivamente). Sin embargo, esta función es discontinua en cualquier intervalo que contenga al cero, pues sabemos que la función $f(x) = \operatorname{sgn} x$ presenta una discontinuidad en $x = 0$ (la razón de esta discontinuidad es la no existencia del límite $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$). Por tanto, la función signo de x es discontinua en los intervalos $[0, 3)$, $[-1, 2)$, $[-4, 0]$, etcétera.

EJEMPLO 3.3.1. Demuestre que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 5 & \text{si } \; x < 3 \\ 5 & \text{si } \; x \geq 3 \end{cases}$ es continua en el intervalo abierto $(0, 3)$ pero discontinua en el intervalo cerrado $[0, 3]$.

SOLUCIÓN. En el intervalo abierto $(0, 3)$ la función $f(x)$ es la función polinomial $y = x^2 - 4x + 5$ la cual es continua. Para que la función dada fuera continua en el intervalo $[0, 3]$, debería cumplirse además que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ y $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = f(3)$. El primer límite se cumple automáticamente, pues está tomado con la función polinomial que define a $f(x)$ para $x < 3$. Pero, por otra parte:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (x^2 - 4x + 5) = (3)^2 - 4(3) + 5 = 2.$$

Como $f(3) = 5 \neq 2 = \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = f(3)$, concluimos que la función es discontinua en el intervalo cerrado $[0, 3]$.

★

EJERCICIOS (3.3)

En los ejercicios 1 al 10, analice la continuidad de la función en el intervalo indicado.

1. $f(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $(-2, 5)$.

2. $f(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $(2, 5)$.

3. $f(x) = \operatorname{sgn}^2 x$ en el intervalo $(0, 1)$.

4. $f(x) = \operatorname{sgn}(x - 1)$ en el intervalo $(0, 2)$.

5. $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ en el intervalo $[0, 1]$.

6. $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ en el intervalo $(0, 1)$.

7. $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ en el intervalo $[-1, 0]$.

8. $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ en el intervalo $(-1, 0)$.

9. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ en el intervalo $(-2, 2)$.

10. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ en el intervalo $(-2, 2)$.

3.4 TEOREMAS SOBRE FUNCIONES CONTINUAS EN INTERVALOS COMPACTOS

Un intervalo compacto es un intervalo cerrado finito $[a, b]$. Existen varios teoremas importantes que hablan de las propiedades que tiene una función $f(x)$ continua en un intervalo compacto. En esta sección estudiaremos dos de ellos.

Para poder entender el primero de estos teoremas, debemos ver algunos conceptos nuevos sobre funciones.

3.4.1 MÁXIMOS Y MÍNIMOS ABSOLUTOS DE UNA FUNCIÓN

Consideremos una función $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida en el intervalo I de $\mathbb{R}$.

- Se dice que esta función tiene un **máximo absoluto** en $x = a \in I$ si $f(a) \geq f(x)$ para toda $x \in I$. (El valor $M = f(a)$ es el máximo absoluto de la función en I.)
- Se dice que esta función tiene un **mínimo absoluto** en $x = a \in I$ si $f(a) \leq f(x)$ para toda $x \in I$. (El valor $m = f(a)$ es el mínimo absoluto de la función en I.)

En general, a los puntos de una función en donde hay máximos o mínimos absolutos se les llama (puntos de) **extremos absolutos** de la función.

Observe entonces que el máximo absoluto $M = f(a)$ de una función $f(x)$ definida en un intervalo I de R es, como su nombre lo sugiere, *el valor más grande que toma la función en el intervalo* I. Es decir, el valor de $f(a)$ es mayor o igual que todos los valores $f(x)$ de las imágenes de $x \in I$. Similarmente, el mínimo absoluto $m = f(a)$ de una función $f(x)$ definida en I es *el valor más pequeño que toma la función en el intervalo* I. Es decir, $f(a)$ es menor o igual que todos los valores $f(x)$ de las imágenes de $x \in I$.

Esquemáticamente:

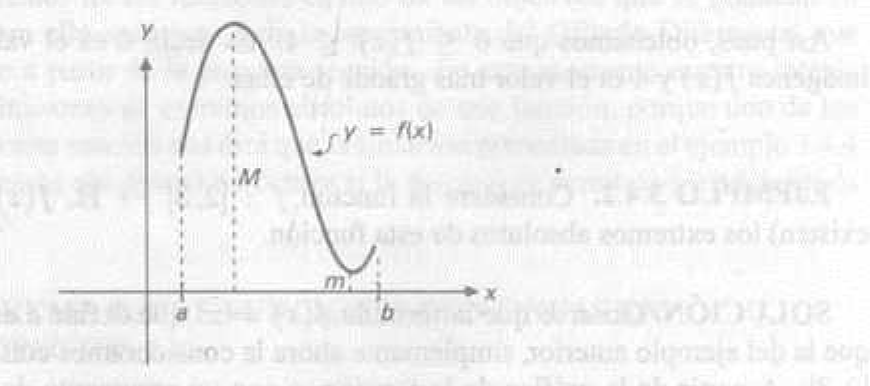


Figura 3.4.1. Los valores máximo y mínimo absolutos de una función $f(x)$ definida en I.

Es importante señalar que los extremos absolutos de una función dependen del intervalo en donde esta función se esté considerando definida. Estos valores no se encuentran necesariamente en "chipotes" de la función como la que se mostró en la figura 3.4.1, pues podrían estar en alguno de los extremos del intervalo en donde está definida la función. Más aún, los extremos absolutos de una función pueden no existir. Los siguientes ejemplos muestran estas afirmaciones. En ellos determinaremos (si existen) los extremos absolutos de la función con consideraciones simples sobre la fórmula que define a la función, o bien, apoyados en la gráfica de ésta.

Advertencia: En esta sección será común que hablemos de "extremos de un intervalo". Cuando lo hagamos, estaremos pensando en un intervalo del tipo (a, b), $[a, b]$, $(a, b]$ o $[a, b)$, cuyos "extremos" son los puntos $x = a$ (el extremo izquierdo) y $x = b$ (el extremo derecho). Acontece que en este tema estamos también hablando de "extremos de las funciones" (que ya fueron definidos con precisión), y es por eso que la palabra "extremo" aparecerá revuelta referida al extremo de un intervalo y/o al extremo de una función (como ocurrió en el párrafo anterior).

EJEMPLO 3.4.1. Considere la función $f : [0, 2] \to$ R, $f(x) = x^2$. Determine (si existen) los extremos absolutos de esta función.

SOLUCIÓN. La gráfica de la función (una parábola con vértice en el origen que abre hacia arriba) muestra que si nos restringimos al intervalo $[0, 2]$, el valor $f(2) = 2^2 = 4$ es el

más grande de todos los valores de $f(x)$ con $x \in [0,2]$. Así, $M = f(2) = 4$ es el máximo absoluto de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0,2]$. De igual manera (en la gráfica) se puede ver que $m = f(0) = 0$ es el mínimo absoluto de esta función en $[0,2]$. Otra manera de llegar a esta conclusión es observando la serie de implicaciones siguiente:

$0 \leq x \leq 2$	$\Rightarrow$	$0 \leq x^2 \leq 2x$	$\Rightarrow$	$0 \leq x^2 \leq 4$
↑		↑		↑
pues $x \in [0,2]$		multiplique toda la desigualdad anterior por x (como $x \geq 0$, la desigualdad no se altera)		use que $x \leq 1$

Así pues, obtenemos que $0 \leq f(x) \leq 4$. Es decir, 0 es el valor más pequeño de las imágenes $f(x)$ y 4 es el valor más grande de ellas.

⋆

EJEMPLO 3.4.2. Considere la función $f : [2,3] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$. Determine (si existen) los extremos absolutos de esta función.

SOLUCIÓN. Observe que la fórmula $f(x) = x^2$ que define a esta función es la misma que la del ejemplo anterior, simplemente ahora la consideramos con dominio en el intervalo $[2,3]$. A partir de la gráfica de la función, o con un argumento de desigualdades idéntico al del ejemplo anterior, podemos concluir que $M = f(3) = 9$ es el máximo absoluto de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[2,3]$ y $m = f(2) = 4$ es el mínimo absoluto de esta función en el intervalo $[2,3]$. Así, el valor $f(2) = 4$ que en el ejemplo anterior fue el máximo absoluto, ahora es el mínimo absoluto: estos valores dependen del intervalo en donde estemos considerando a la función.

⋆

EJEMPLO 3.4.3. Considere la función $f : [-1,1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$. Determine (si existen) los extremos absolutos de esta función.

SOLUCIÓN. En este caso existen dos puntos donde hay máximos absolutos de la función $f(x) = x^2$, a saber $x = -1$ y $x = 1$, pues $f(-1) = f(1) = 1 \geq f(x)$ para toda $x \in [-1,1]$. El mínimo absoluto $m = f(0) = 0 \leq f(x)$ para toda $x \in [-1,1]$ ocurre en un "chipote" de la función (el vértice de la parábola).

⋆

EJEMPLO 3.4.4. Considere la función $f : (0,1) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$. Determine (si existen) los extremos absolutos de esta función.

SOLUCIÓN. Nuevamente tenemos la función que eleva al cuadrado $f(x) = x^2$, pero ahora definida en el intervalo abierto $(0,1)$. En este ejemplo ocurre un hecho interesante: si nos preguntamos por el valor más grande que toma la función $f(x) = x^2$ con la x en el intervalo $(0,1)$, no tendríamos más remedio que aceptar que *ese valor no existe*, pues a medida que nos acercamos más (en el eje x) al 1, los valores de las imágenes son cada

vez más grandes (y más cercanos a $f(1) = 1$), pero ¿qué tanto debemos estar cerca del uno para que la imagen correspondiente sea la más grande posible? Tal vez quisiéramos responder que en el $0.99999\ldots$ (con "muchos —una infinidad de— nueves"). Pero este número . . . *¡es el número uno y él no pertenece al dominio de la función!* Un argumento similar nos lleva a concluir que tampoco existe el valor más pequeño de la función $f(x) = x^2$ con x en el intervalo abierto $(0, 1)$. Así pues, la función $f(x) = x^2$ con dominio $(0, 1)$ no tiene extremos absolutos (en $(0, 1)$).

★

El estudio de los extremos de las funciones es uno de las objetivos que se plantean en un curso de Cálculo. Para ello usaremos toda la herramienta del Cálculo Diferencial que comenzaremos a estudiar a partir de la próxima sección. En este momento nuestro interés es solamente dar las definiciones de extremos absolutos de una función, porque uno de los teoremas que veremos en esta sección nos dirá que la situación presentada en el ejemplo 3.4.4 (la no existencia de extremos absolutos) no ocurre si la función es continua y está definida en un intervalo compacto.

3.4.2 PRIMER TEOREMA SOBRE FUNCIONES CONTINUAS EN INTERVALOS COMPACTOS

El primer teorema que veremos sobre el comportamiento de una función continua definida en un intervalo compacto, se refiere a la existencia de extremos absolutos de esta función. Su enunciado preciso es el siguiente.

TEOREMA 3.4.1. *Sea $f : [a, b] \to \mathrm{R}$ una función continua definida en el intervalo compacto $[a, b]$. Existen x_0 y x_1 en el intervalo $[a, b]$, tales que:*

$$m = f(x_0) \leq f(x) \text{ para toda } x \in [a, b]$$

y

$$M = f(x_1) \geq f(x) \text{ para toda } x \in [a, b].$$

Lo que nos dice este teorema es que cualquier función que sea continua y que tenga por dominio un intervalo compacto de R, debe tener un máximo absoluto y un mínimo absoluto. El ejemplo 3.4.4 anterior (la función $f(x) = x^2$ definida en el intervalo $(0, 1)$) muestra que la conclusión del teorema (la existencia de los extremos absolutos) puede ser falsa si el intervalo en el que está definida la función no es compacto. Por otra parte, si consideramos la función $f : [-1, 1] \to \mathrm{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

la cual es claramente discontinua en $x = 0$ (pues el límite $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe: es infinito), vemos que en ella no se dan los extremos absolutos (aunque está definida en un intervalo

compacto): tomando a x muy cerca del cero por la derecha, podemos tener valores de $f(x)$ tan grandes como queramos y, tomando a x muy cerca del cero por la izquierda, podemos tener valores de $f(x)$ tan pequeños (tan grandes en sentido negativo) como queramos. Así pues, este ejemplo muestra que si la función no es continua, aunque esté definida en un intervalo compacto, puede no tener extremos absolutos.

La importancia de este teorema, en un curso como el que se presenta en este libro, no puede apreciarse en toda su magnitud. Nosotros lo usaremos solamente para garantizar la existencia de extremos absolutos cuando estemos estudiando los extremos de una función en el capítulo 8.

3.4.3 EL TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO

A continuación se establece el segundo teorema sobre funciones continuas definidas en intervalos compactos, llamado *teorema del valor intermedio*.

TEOREMA 3.4.2 (DEL VALOR INTERMEDIO). *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua definida en el intervalo compacto $[a,b]$. Dado cualquier valor y_0 entre $f(a)$ y $f(b)$ (o entre $f(b)$ y $f(a)$), existe un $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) = y_0$.*

Lo que se establece en el teorema anterior es que, siendo la función f continua en el intervalo compacto $[a,b]$, *ésta toma todos los valores que hay entre $f(a)$ y $f(b)$*, de tal modo que si damos cualquier valor y_0 entre $f(a)$ y $f(b)$ este valor *es tomado* por la función, es decir, este valor *es la imagen* de alguna $x_0 \in [a,b]$. En el teorema se dice que "existe una $x_0 \in [a,b]$ tal que ...". Este tipo de afirmaciones en matemáticas se debe entender como "existe *al menos* una $x_0 \in [a,b]$ tal que ...". En la figura 3.4.2 se muestra una función continua en un intervalo compacto $[a,b]$, para la cual, dado un y_0 entre $f(a)$ y $f(b)$, existen tres equis $x_0, x_1, x_2 \in [a,b]$ tales que $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = y_0$.

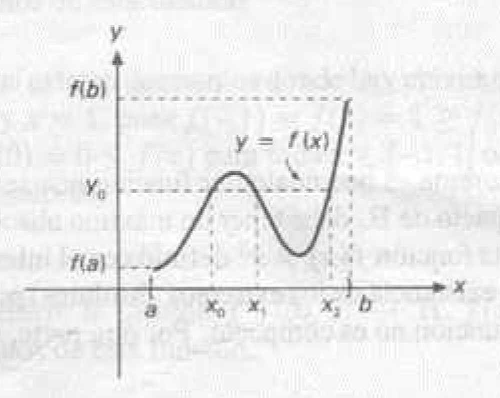


Figura 3.4.2. El teorema del valor intermedio: la función toma TODOS los valores entre $f(a)$ y $f(b)$.

Un caso particular del teorema del valor intermedio, que tiene muchas consecuencias prácticas, es el siguiente:

TEOREMA 3.4.3. *Sea $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una función continua definida en el intervalo compacto $[a, b]$. Suponga que $f(a)f(b) < 0$. Existe entonces un $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = 0$.*

En efecto, al suponer que $f(a)f(b) < 0$ estamos aceptando que $f(a)$ y $f(b)$ *tienen signos opuestos*, ya sea que $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$, o bien que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$. En cualquier caso, *el valor $y_0 = 0$ se encuentra entre $f(a)$ y $f(b)$*. Según el teorema del valor intermedio, debe haber una $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = y_0 = 0$. Es decir, debe haber un $x_0 \in [a, b]$ que *sea raíz de la función $f(x)$*. Así, si las imágenes de una función continua definida en un intervalo compacto $[a, b]$ cambian de signo, debe haber un valor x_0 dentro del intervalo en el que la función valga cero. O bien, aún de otro modo: si la función $f(x)$ es continua en un intervalo $[a, b]$, y su gráfica empieza en el punto $P = (a, f(a))$ que está por debajo (o por encima) del eje x, y termina en el punto $Q = (b, f(b))$ que está por encima (o por debajo, respectivamente) del eje x, entonces la gráfica de la función debe cruzar al menos en un punto x_0 al eje x.

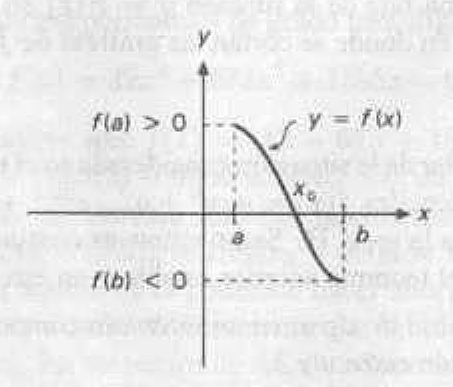


Figura 3.4.3. Si una función continua cambia de signo en el intervalo compacto $[a, b]$, entonces debe haber un $x_0 \in [a, b]$ que sea raíz de la función.

EJEMPLO 3.4.5. Considere la función $f : [-3, 4] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \operatorname{sgn} x$. Tenemos que $f(-3) = -1$ y $f(4) = 1$. Como $y_0 = 0.5$ es un valor entre $f(-3)$ y $f(4)$, el teorema del valor intermedio dice que existe un $x_0 \in [-3, 4]$ tal que $\operatorname{sgn} x_0 = 0.5$. Pero sabemos que la función signo nunca toma el valor de 0.5. ¿En dónde se encuentra la (aparente) contradicción en este argumento?

SOLUCIÓN. A pesar de que la función dada está definida en el intervalo compacto $[-3, 4]$, ésta no cumple con las hipótesis del teorema del valor intermedio porque la función $f(x) = \operatorname{sgn} x$ no es continua en ese intervalo. Así, no tiene por qué cumplirse la conclusión que en ese teorema se establece.

★

EJEMPLO 3.4.6. Use el teorema del valor intermedio para demostrar que existe al menos una solución de la ecuación $x^3 - 8x^2e^x + 2 = 0$.

SOLUCIÓN. La función $f(x) = x^3 - 8x^2e^x + 2$ es continua en todo $\mathbf{R}$, pues está formada

por productos y sumas de funciones continuas. Es suficiente entonces que hallemos un intervalo compacto $[a, b]$ en el que la función cambie de signo. Tome, por ejemplo, el intervalo $[-2, 0]$. Se tiene $f(-2) = (-2)^3 - 8(-2)^2e^{-2} + 2 < 0$ y $f(0) = 2 > 0$, así que la función continua $f(x)$ dada, considerada en el intervalo compacto $[-2, 0]$, cambia de signo. El teorema del valor intermedio asegura que existe al menos una $x_0 \in [-2, 0]$ tal que $f(x_0) = 0$. Ésta es la solución cuya existencia queríamos demostrar.

⋆

EJEMPLO 3.4.7. Use el teorema del valor intermedio para demostrar que las gráficas de las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = 3 - x$ se cortan una vez.

SOLUCIÓN. El punto en donde estas gráfica se cortan (cuya existencia queremos demostrar) es un punto en el que $f(x) = g(x)$, es decir, en el que $e^x = 3 - x$, o bien, en el que $e^x + x - 3 = 0$. Consideremos la función $F(x) = e^x + x - 3$. Ésta es una función continua en todo $\mathbf{R}$. Basta entonces que consigamos un intervalo compacto $[a, b]$ en el que la función cambie de signo. Tome, por ejemplo, el intervalo $[-1, 1]$. Se tiene $f(-1) = e^{-1} - 1 - 3 = e^{-1} - 4 < 0$ y $f(1) = e^1 + 1 - 3 = e - 2 > 0$. Así, el teorema del valor intermedio nos asegura que existe al menos una raíz de la función $y = F(x)$ en el intervalo $[-1, 1]$. Esta raíz es (la abscisa de) el punto en donde se cortan las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$.

⋆

Un caso todavía más particular de la situación considerada en el teorema anterior es cuando consideramos funciones polinomiales $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$. Sabemos que éstas son continuas en toda la recta $\mathbf{R}$. Serán entonces continuas en cualquier intervalo compacto $[a, b]$ de $\mathbf{R}$. Lo que el teorema anterior establece en este caso concreto es que:

Si una función polinomial cambia de signo en un intervalo compacto $[a, b]$, *entonces existe (al menos) una raíz de la función entre* a *y* b.

Por ejemplo, si consideramos la función polinomial de grado uno $f(x) = 2x - 6$ en el intervalo $[2, 5]$ tenemos que $f(2) = 2(2) - 6 = -2 < 0$ y $f(5) = 2(5) - 6 = 4 > 0$. El resultado anterior nos dice que debe haber una $x_0 \in [2, 5]$ tal que $f(x_0) = 0$, es decir, tal que $2x_0 - 6 = 0$. ¿Quién es esta x_0? El resultado anterior (que es, en esencia, el teorema del valor intermedio) nos dice que existe. Pero, insistimos, ¿podemos decir qué x_0 es la que $2x_0 - 6 = 0$? El lector puede pensar que estamos exagerando las cosas: desde un principio, sin tanto teorema del valor intermedio, ni tanto análisis sobre cambios de signos en intervalos compactos, habríamos podido resolver la ecuación $2x - 6 = 0$ como nos enseñaron en la secundaria (pensando: paso el 6 sumando al lado derecho y luego el 2 que multiplica a la x lo paso dividiendo), para obtener que $x_0 = \frac{6}{2} = 3$, el cual, efectivamente se encuentra en el intervalo $[2, 5]$.

Consideremos un ejemplo "más complicado". Tomemos la función polinomial de grado dos $f(x) = x^2 - 3x - 4$ en el intervalo compacto $[2, 7]$. Observe que $f(2) = (2)^2 - 3(2) - 4 = -6 < 0$ y $f(7) = (7)^2 - 3(7) - 4 = 24 > 0$. Es decir, existe un cambio de signo de las imágenes de la función en el intervalo $[2, 7]$. El teorema del valor intermedio nos asegura que existe un $x_0 \in [2, 7]$ tal que $f(x_0) = x_0^2 - 3x_0 - 4 = 0$. Nuevamente nos preguntamos, ¿podríamos saber quién es exactamente tal valor x_0, raíz de la función $f(x)$? La respuesta no

es difícil y la podemos dar de un modo general (desde la secundaria lo sabemos): la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos soluciones, x_1 y x_2, que se obtienen con la fórmula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

de modo que la ecuación $x^2 - 3x - 4 = 0$ tiene por solución a:

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$= \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{3+5}{2} = 4 \\ \frac{3-5}{2} = -1, \end{cases}$$

y el valor $x_0 = 4$ es el que está en el intervalo $[2, 7]$ y que cumple con las conclusiones del teorema del valor intermedio.

Tomemos ahora una función polinomial de grado tres, digamos

$$f(x) = 42x^3 + 673x^2 + 1585x - 6900,$$

en el intervalo $[1, 3]$. Observe que $f(1) = 42 + 673 + 1585 - 6900 = -4600 < 0$ y $f(3) = 42(27) + 673(9) + 1585(3) - 6900 = 5046 > 0$, de modo que en el intervalo $[1, 3]$ la función cambia de signo. El teorema del valor intermedio nos asegura que existe una x_0 entre uno y tres tal que $42x_0^3 + 673x_0^2 + 1585x_0 - 6900 = 0$. La misma pregunta que nos hemos hecho en los casos anteriores la podemos hacer ahora: ¿podemos decir quién es tal x_0? La respuesta es, para este caso, *sí*. Solamente que ahora tendremos que trabajar mucho más para poder hallar tal x_0. En los cursos de Álgebra Superior se estudian cómo resolver las ecuaciones cúbicas en general y métodos alternativos para determinar las raíces racionales de estas ecuaciones. Por el momento nos conformamos con saber que es posible obtener el valor $x_0 = \frac{15}{7}$ (que efectivamente se encuentra entre uno y tres) para el cual $f(x_0) = 0$. De hecho, es posible determinar también que $x_1 = -\frac{20}{3}$ y $x_2 = \frac{-23}{2}$ son también raíces de la ecuación, como se puede comprobar directamente.

La pregunta es, ¿hasta dónde podemos llegar para poder saber con precisión el valor de la x_0 que el teorema del valor intermedio nos asegura que existe? En la nota histórica de este capítulo presentamos un bosquejo de este interesante problema que duró muchos siglos sin resolverse. Lo que queremos resaltar en este momento es la importancia que tienen para la matemática los teoremas como el teorema del valor intermedio. Nos estamos refiriendo a *teoremas de existencia*. Éstos son, en general, los teoremas más profundos de la Matemática: en ellos se asegura que *algo existe* (en nuestro caso, una raíz de una función continua que cambia de signo en un intervalo). Estos teoremas *no nos dicen (en general) cómo hallar ese "algo" que se afirma que existe*. El asunto de cómo hallarlo es normalmente competencia de otra parte de la Matemática. Sin embargo, regresando a nuestro problema de las funciones polinomiales, si tomamos la función $f(x) = 2x^5 - 6x + 3$ en el intervalo $[0, 1]$, vemos que $f(0) = 3$ y $f(1) = -1$, de modo que el teorema del valor intermedio *nos asegura que existe una x_0 entre* 0 *y* 1 *tal que* $2x_0^5 - 6x_0 + 3 = 0$. ¿Le gustaria hallar, digamos, con una fórmula,

esa x_0 que el teorema asegura? En los casos presentados anteriormente pudimos hacerlo sin mucha dificultad. Para las funciones polinomiales de grado tres, es cuestión de esperar un poco de avance en los cursos de Matemática para saber cómo se obtienen las raíces de esas funciones. Pero para la ecuación $2x^5 - 6x + 3 = 0$ muchos matemáticos quisieron hallar una fórmula para encontrar el "valor exacto" de la x_0 que el teorema del valor intermedio nos asegura que existe. Fue hasta principios del siglo XIX cuando alguien dijo: "No busquen más la fórmula *porque no existe.*"

3.4.4 EL MÉTODO DE LA BISECCIÓN

La frase con la que terminamos la subsección anterior puede parecer una contradicción a lo que el teorema del valor intermedio plantea. Por una parte tenemos un teorema de existencia (el teorema del valor intermedio) que nos dice que *existe* una raiz $x \in [0, 1]$ de la ecuación $x^5 - 6x + 3 = 0$, y por otra parte, dijimos que la fórmula para determinar tal raiz *no existe*. Acontece que el hecho de que ese número que el teorema del valor intermedio nos dice que existe es completamente independiente del hecho de que tal número pueda ser expresado con una fórmula como $\sqrt{2}$ o como $\frac{\sqrt{2+3\sqrt[5]{5}}}{3+\sqrt{2}}$. Por ejemplo, la ecuación $x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$ tiene cuatro soluciones (raíces) que se pueden escribir con fórmula, a saber:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}+\sqrt{22+2\sqrt{5}}}{4} \qquad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}-\sqrt{22+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$x_3 = \frac{1-\sqrt{5}+\sqrt{22-2\sqrt{5}}}{4} \qquad x_4 = \frac{1-\sqrt{5}-\sqrt{22-2\sqrt{5}}}{4}.$$

Muchas veces esta información es innecesaria en la práctica, pues lo único que necesitamos es un número con algunas cuantas cifras decimales que sepamos que resuelve la ecuación. Por ejemplo, las mismas cuatro raíces anteriores, con seis cifras decimales exactas son:

$$x_1 = 2.095293 \qquad x_2 = -0.477259$$
$$x_3 = 0.737640 \qquad x_4 = -1.355674.$$

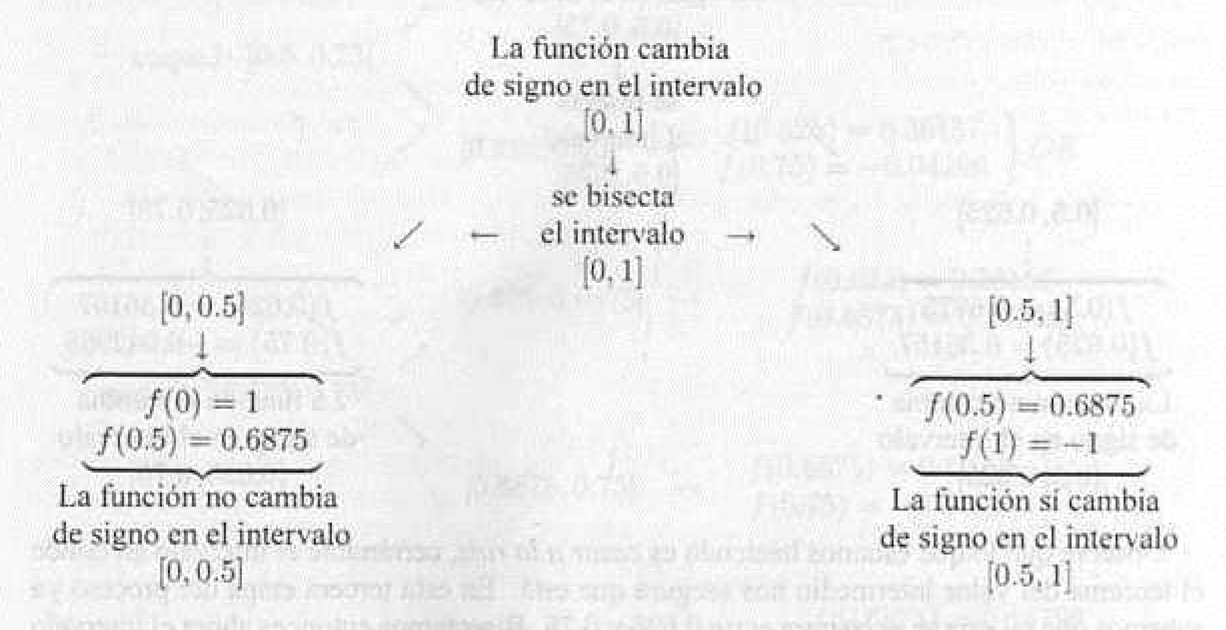
Quizás se pueda objetar que estos números son sólo aproximaciones de los valores reales de las raíces. Y esto es cierto. Pero, como dijimos ya, muchas veces en la práctica queremos un número aproximado concreto con unas cuantas cifras decimales que nos resuelva el problema. La parte de la Matemática que permite escribir de manera aproximada las soluciones de una ecuación es el *análisis numérico*. En él se estudian los métodos para obtener las aproximaciones de las soluciones de una ecuación. Uno de estos métodos, llamado *método de la bisección*, se basa en el teorema del valor intermedio que hemos visto en esta sección.

Para explicar este método, usaremos el ejemplo anterior. Tomemos la ecuación:

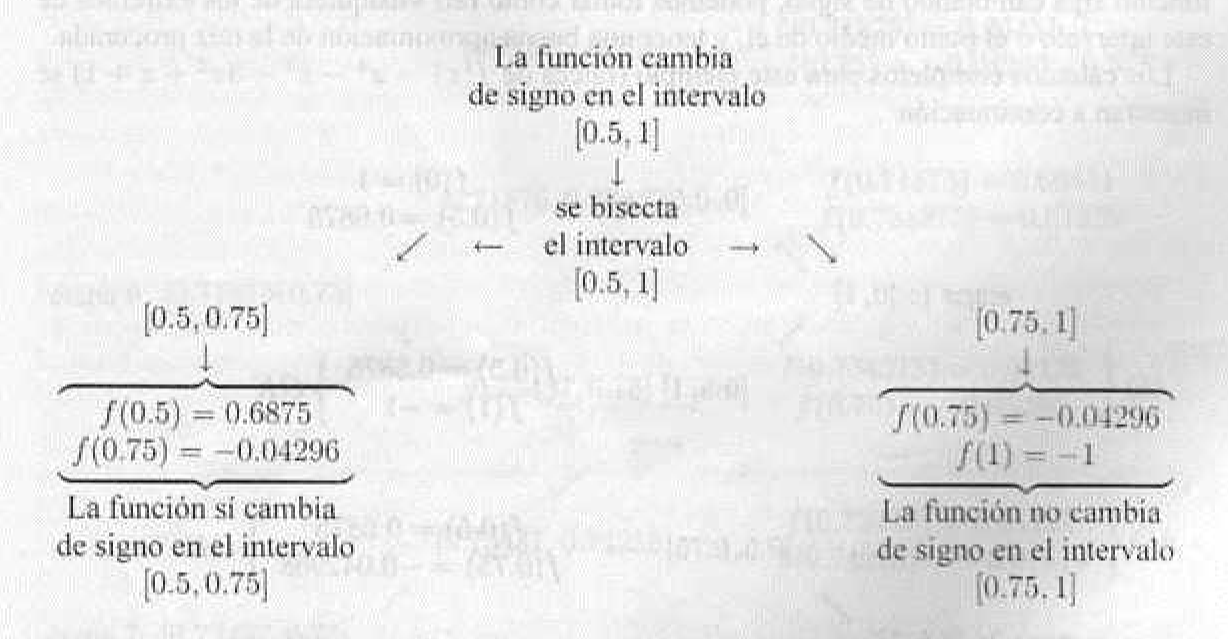
$$x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0.$$

La función polinomial $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1$ es continua en el intervalo compacto $[0, 1]$. Además, $f(0) = 1 > 0$ y $f(1) = -1 < 0$, de modo que el teorema del valor intermedio nos asegura que existe una $x_0 \in [0, 1]$ tal que $f(x_0) = 0$. Queremos hallar su

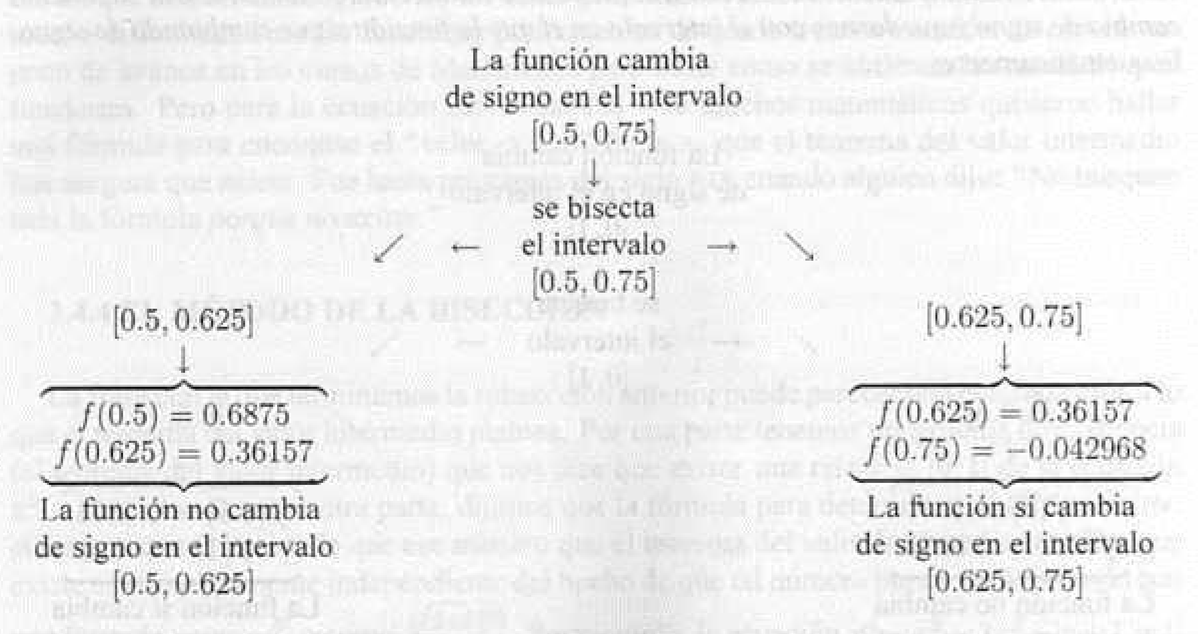
valor. La idea del método de la bisección es *partir a la mitad el intervalo en donde la función cambia de signo y quedarnos con el intervalo en el que la función sigue cambiando de signo*. Esquemáticamente:



Tenemos entonces nuestra función continua $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1$ que en el intervalo $[0.5, 1]$ cambia de signo. Según el teorema del valor intermedio, debe haber un $x_0 \in [0.5, 1]$ que sea raíz de $f(x)$. Usamos la misma idea anterior:



Nos quedamos entonces con el intervalo $[0.5, 0.75]$ en donde la función cambia de signo. Por el teorema del valor intermedio sabemos que en ese intervalo debe haber una raíz. Continuamos el proceso:



Observe que lo que estamos haciendo es *cazar a la raíz*, cerrándole el intervalo en donde el teorema del valor intermedio nos asegura que está. En esta tercera etapa del proceso ya sabemos que tal raíz se encuentra entre 0.625 y 0.75. Bisectamos entonces ahora el intervalo $[0.625, 0.75]$ y nos quedamos con el intervalo en el que la función cambie de signo. ¿En dónde debemos parar el proceso? Esto depende de la aproximación que queramos de la raíz: por ejemplo, si en algún momento ya tenemos un intervalo de longitud 0.0001 en donde la función siga cambiando de signo, podemos tomar como raíz cualquiera de los extremos de este intervalo o el punto medio de él, y tener una buena aproximación de la raíz procurada.

Los cálculos completos para este ejemplo (raíces de $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1$) se muestran a continuación:

etapa 1: $[0, 1]$

- $\nearrow$ $[0, 0.5] \rightarrow$ $f(0) = 1$, $f(0.5) = 0.6875$
- $\searrow$ $[0.5, 1] \rightarrow$ $\left.\begin{matrix} f(0.5) = 0.5875 \\ f(1) = -1 \end{matrix}\right\} OK$

etapa 2: $[0.5, 1]$

- $\nearrow$ $[0.5, 0.75] \rightarrow$ $\left.\begin{matrix} f(0.5) = 0.6875 \\ f(0.75) = -0.042968 \end{matrix}\right\} OK$
- $\searrow$ $[0.75, 1] \rightarrow$ $f(0.75) = -0.042968$, $f(1) = -1$

$$\text{etapa 3: } [0.5, 0.75] \begin{cases} \nearrow [0.5, 0.625] \to & f(0.5) = 0.6875 \\ & f(0.625) = 0.36157 \\ \searrow [0.625, 0.75] \to & \left.\begin{array}{l} f(0.625) = 0.36157 \\ f(0.75) = -0.04296 \end{array}\right\} OK \end{cases}$$

$$\text{etapa 4: } [0.625, 0.75] \begin{cases} \nearrow [0.625, 0.6875] \to & f(0.625) = 0.36157 \\ & f(0.6875) = 0.16798 \\ \searrow [0.6875, 0.75] \to & \left.\begin{array}{l} f(0.6875) = 0.16798 \\ f(0.75) = -0.04296 \end{array}\right\} OK \end{cases}$$

$$\text{etapa 5: } [0.6875, 0.75] \begin{cases} \nearrow [0.6875, 0.71875] \to & f(0.6875) = 0.16798 \\ & f(0.71875) = 0.06451 \\ \searrow [0.71875, 0.75] \to & \left.\begin{array}{l} f(0.71875) = 0.06451 \\ f(0.75) = -0.04296 \end{array}\right\} OK \end{cases}$$

$$\text{etapa 6: } [0.71875, 0.75] \begin{cases} \nearrow [0.71875, 0.73437] \to & f(0.71875) = 0.06451 \\ & f(0.734375) = 0.01125 \\ \searrow [0.73437, 0.75] \to & \left.\begin{array}{l} f(0.734375) = 0.01125 \\ f(0.75) = -0.04296 \end{array}\right\} OK \end{cases}$$

$$\text{etapa 7: } [0.73437, 0.75] \begin{cases} \nearrow [0.73437, 0.74218] \to & \left.\begin{array}{l} f(0.73437) = 0.01127 \\ f(0.74218) = -0.01571 \end{array}\right\} OK \\ \searrow [0.74218, 0.75] \to & f(0.74218) = -0.01571 \\ & f(0.75) = -0.042968 \end{cases}$$

$$[0.73437, 0.73828] \rightarrow \left.\begin{array}{l} f(0.73437) = 0.01127 \\ f(0.73828) = -0.0022 \end{array}\right\} OK$$

etapa 8: $[0.73437, 0.74218]$ ↗ ↘

$$[0.73828, 0.74218] \rightarrow \begin{array}{l} f(0.73828) = -0.0022 \\ f(0.74218) = -0.01571 \end{array}$$

$$[0.73437, 0.73632] \rightarrow \begin{array}{l} f(0.73437) = 0.01127 \\ f(0.73632) = 0.00455 \end{array}$$

etapa 9: $[0.73437, 0.73828]$ ↗ ↘

$$[0.73632, 0.73828] \rightarrow \left.\begin{array}{l} f(0.73632) = 0.00455 \\ f(0.73828) = -0.0022 \end{array}\right\} OK$$

$$[0.73632, 0.7373] \rightarrow \begin{array}{l} f(0.73632) = 0.0045 \\ f(0.7373) = 0.00117 \end{array}$$

etapa 10: $[0.73632, 0.73828]$ ↗ ↘

$$[0.7373, 0.73828] \rightarrow \left.\begin{array}{l} f(0.7373) = 0.00117 \\ f(0.73828) = -0.0022 \end{array}\right\} OK$$

En la décima etapa tenemos ya el intervalo $[0.7373, 0.73828]$ de longitud 0.00098 en cuyos extremos las imágenes cambian de signo y son del orden de milésimas. Como una última aproximación podemos tomar el punto medio del intervalo $x = \frac{0.7373+0.73828}{2} = 0.73779$ como el valor de la raiz. (El valor con cuatro cifras decimales exactas es de 0.7376.)

El método de la bisección es poco eficiente para obtener las raices de una ecuación. Quisimos sin embargo mencionarlo, pues su fundamento es el teorema del valor intermedio que analizamos en esta sección, y por otra parte, para poder comparar con él las bondades de otro método numérico para obtener las raíces de polinomios que veremos como una de las aplicaciones del Cálculo Diferencial en el capítulo 7 (sección 2: el método de Newton-Raphson).

EJERCICIOS (3.4)

1. ¿Verdadero o falso? La función $f(x) = x^3 + 2x + 3$ tiene un máximo y un mínimo absoluto en el intervalo $[2, 6]$.

2. ¿Verdadero o falso? La función $f(x) = 2x + 7$ tiene un máximo y un mínimo absoluto en el intervalo $(2, 6)$.

3. ¿Verdadero o falso? El primer teorema sobre funciones continuas en intervalos compactos asegura que la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ tiene un mínimo absoluto en el intervalo $[-1, 1]$.

4. ¿Verdadero o falso? La función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ no tiene mínimo absoluto en el intervalo $[-1, 1]$.

5. Sea m un número real positivo. Empleando argumentos geométricos, determine los extremos absolutos de la función continua $f(x) = mx + b$, en el intervalo $[\alpha, \beta]$.

6. Resuelva el ejercicio anterior si $m < 0$.

7. Determine los extremos absolutos de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 3]$.

8. Determine los extremos absolutos de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[-2, 0]$.

9. Considere la función $f(x) = 3x^3 + 5$ en el intervalo $[0, 1]$. Como $f(0) = 5$ y $f(1) = 8$, el teorema del valor intermedio asegura que existe una $x_0 \in (0, 1)$ tal que $f(x_0) = 7 \in (5, 8)$. Determine tal x_0.

10. Considere la función $f(x) = \operatorname{sgn} x$ en el intervalo $[-2, 2]$. Se tiene $f(-2) = -1$ y $f(2) = 1$, de tal manera que $y_0 = 0.5$ es un valor intermedio entre $f(-2)$ y $f(2)$. Sin embargo, no existe x_0 alguna tal que $f(x_0) = 0.5$. Explique por qué en este caso no se cumple la conclusión del teorema del valor intermedio.

11. ¿Verdadero o falso? El teorema del valor intermedio asegura que la función $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 2$ tiene una raíz en el intervalo $[0, 2]$.

12. Demuestre que la ecuación $e^x + x - 3 = 0$ tiene una raíz en el intervalo $[0, 1]$.

13. Demuestre que la ecuación $\operatorname{sen} x + 1 - x = 0$ tiene una raíz en el intervalo $[0, 2]$.

14. Use el método de la bisección para determinar la raíz (con cuatro decimales exactos) de la ecuación $x^3 + 3x^2 + 2x - 3 = 0$.

15. (EN UN TONO MENOS SERIO: UNA APLICACIÓN A LAS FINANZAS.) Cuando el Sr. Rico se vio en una situación apretada en sus finanzas, tuvo que recurrir a pedirle un préstamo a su vecino, don Úrsulo. Necesitaba urgentemente \$10,000.00 que podría pagarle en 3 mensualidades. Uno de los procedimientos exitosos de don Úrsulo con sus clientes era nunca decir el interés que les iba a cobrar sobre el préstamo. Los confundía con muchos términos de "intereses progresivos sobre saldos insolutos", "devaluación acumulada" y otros por el estilo, y al final les cobraba lo que quería. Con el Sr. Rico llegó a un acuerdo: pagaría 3 mensualidades de \$4,500.00 y quedaría saldada la deuda. El Sr. Rico era un experto en finanzas y quiso saber qué interés le estaba cobrando don Úrsulo, para tener alguna estimación de las cualidades usureras de su vecino. Después de algunos minutos con papel, lápiz y calculadora, acompañados con una taza de café, el Sr. Rico, que sabía bien el teorema del valor intermedio para funciones continuas en intervalos compactos, pudo calcular el interés. Veamos cómo lo hizo.

Llamemos A a la cantidad que don Úrsulo le prestó al Sr. Rico. Es decir, $A = \$10,000.00$, a la cual se le está cargando un interés i mensual (que no conocemos). Consideramos a i dividido ya entre 100, de modo que $0 \leq i \leq 1$. Cada pago mensual que se hace es de $P = \$4,500.00$, de tal manera que, al cabo del primer mes, por una parte la deuda inicial A aumentó a $A(1+i)$, pero por otra, el Sr. Rico pagó $P = \$4,500.00$, así es que lo que debe todavía el Sr. Rico a su vecino es:

$$A_1 = A(1+i) - P = (10,000)(1+i) - 4,500$$

Repitiendo este argumento con la cantidad A_1, al cabo del segundo mes (al momento de pagarle los segundos \$4,500.00) el Sr. Rico debe todavía a su vecino:

$$A_2 = A_1(1+i) - P = (10,000)(1+i)^2 - 4,500(1+i) - 4,500$$

y, finalmente, después de que al tercer mes el Sr. Rico paga los últimos \$4,500.00, la cantidad que debe es cero, es decir,

$$0 = A_3 = A_2(1+i) - P = (10,000)(1+i)^3 - 4,500(1+i)^2 - 4,500(1+i) - 4,500.$$

Tenemos entonces la ecuación:

$$(10,000)(1+i)^3 - 4,500(1+i)^2 - 4,500(1+i) - 4,500 = 0$$

de la cual no conocemos el valor de i. Esta ecuación la podemos reescribir como:

$$20i^3 + 51i^2 + 33i - 7 = 0.$$

La función polinomial $f(i) = 20i^3 + 51i^2 + 33i - 7$ es continua y $f(0) = -7$ y $f(1) = 97$, de modo que el teorema del valor intermedio garantiza la existencia de una raíz entre 0 y 1. Esta raíz es el interés que don Úrsulo le está cobrando al Sr. Rico. Use el método de la bisección estudiado en esta sección para calcular aproximadamente el valor de i.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 3

EXAMEN TIPO (A)

1. Determine los puntos en donde la función $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^4 + x^2 + 4}$ es discontinua.

2. Determine los puntos en los que la función $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 3x + 9}{x^4 - 1}$ es discontinua.

3. Considere la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 4 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$. ¿Es esta función continua en $x = 0$? Justifique su respuesta.

4. ¿Es la función del ejercicio anterior continua en $x = 1$? Justifique su respuesta.

5. Considere la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^4-1}{x^2-1} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ A & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$. ¿Cuánto debe valer el número A para que esta función sea continua en $x = 1$?

6. Considere la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si} \quad x \leq 2 \\ A + x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$. Determine el valor de A para que la función sea continua en $x = 2$.

7. Dé un ejemplo de dos funciones discontinuas en $x = 0$ cuyo producto sea una función continua en ese punto.

8. Use argumentos geométricos para determinar los extremos absolutos de la función $f(x) = -2x + 1$ en el intervalo compacto $[1, 5]$.

9. Use el teorema del valor intermedio para demostrar que existe una $x \in [0, 1]$ tal que $x^6 - 2x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$.

10. Use el teorema del valor intermedio para demostrar que las gráficas de las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = 4 + (x + 2)^2$ se cortan.

EXAMEN TIPO (B)

1. Determine los puntos en donde la función $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^4 + 5x^2 - 6}$ es discontinua.

2. Determine los puntos en los que la función $f(x) = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{x^5 - 1}}$ es discontinua.

3. Considere la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 3x - 3}{x^3 + 9x^2 - 4x - 6} & \text{si } x \neq 1 \\ \dfrac{7}{17} & \text{si } x = 1. \end{cases}$

¿Es esta función continua en $x = 1$? Justifique su respuesta.

4. Considere la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2 + 3x + 1} - \sqrt{2x^2 + x + 1}}{x^5 + 3x} & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{3} & \text{si } x = 0. \end{cases}$

¿Es esta función continua en $x = 0$? Justifique su respuesta.

5. Considere la función $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x + \cos x & \text{si } x \leq \frac{\pi}{4} \\ A - \frac{\pi}{4} + x & \text{si } x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$. Determine el valor de A para que la función sea continua en $x = \dfrac{\pi}{4}$.

6. Considere la función $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{Ax^5 + Bx^4 - Ax - B}{x^2 - 1} & -1 < x < 1 \\ x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$. Determine los valores de A y de B para que la función sea continua en todos los reales.

7. Dé un ejemplo de una función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ discontinua en $x = 0$ tal que $|f(x)|$ sea una función continua en ese punto.

8. Dé un ejemplo de una función discontinua en el intervalo abierto $(-1, 1)$ que tenga sus extremos absolutos (máximo y mínimo absolutos) en ese intervalo.

9. Dé un ejemplo de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, y un punto $x = a$, en que la igualdad $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right)$ sea falsa.

10. Use el teorema del valor intermedio para demostrar que las gráficas de las funciones $f(x) = e^{3x}$ y $g(x) = 4 - x$ se cortan.

NOTA HISTÓRICA:

LA INCREÍBLE Y TRISTE HISTORIA DE LAS CÁNDIDAS ECUACIONES Y SUS RAÍCES DESALMADAS QUE NO SE DEJARON PONER EN UNA FÓRMULA.



El problema de resolver ecuaciones del tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

(cuadráticas), es decir, encontrar uno o varios valores concretos de x que sustituidos en la ecuación conviertan a ésta en una identidad es un problema que ya estaba en las mentes de algunos babilonios del año 1600 a.C. Las soluciones que ellos tenían no son como las conocemos ahora (como nos las enseñan en la secundaria: $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$), pero los historiadores han encontrado tablas babilónicas de esa época cuyo contenido revela la presencia de soluciones de ecuaciones cuadráticas. Las ecuaciones de grado tres:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

tuvieron que esperar mucho más tiempo para que alguien las pudiera resolver. Fue hasta el siglo XVI cuando los matemáticos italianos Scipio de Ferro y Nicola Fontana encontraron, independientemente uno del otro, el método general para determinar las soluciones de esta ecuación. Este método fue publicado por Girolamo Cardano en su libro *Ars magna* (1545). La idea del método es reducir la ecuación cúbica dada a una ecuación del tipo $x^3 + qx + r = 0$, la cual tiene por solución a:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}}}$$

(esta fórmula es conocida como "fórmula de Cardano"). Soluciones como ésta (y las de la cuadrática mencionadas anteriormente) son llamadas soluciones (de la ecuación) en términos de radicales, pues se encuentran expresadas con raíces n-ésimas (en donde n es el grado de la ecuación) de expresiones en las que intervienen los coeficientes dados de la ecuación. En su *Ars magna*, Cardano también publica un método debido a Ludovico Ferrari para resolver una ecuación de cuarto grado:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0.$$

Era natural que muchos de los matemáticos de la época (recuerde que estamos hablando del siglo XVI) atacaran el problema de determinar las soluciones de una ecuación de quinto grado (llamada "quíntica"):

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0.$$

Por este problema pasaron trabajos de mentes brillantes como Euler y Lagrange. Este último, en 1770, sugirió que la solución de la quíntica no podía hallarse en términos de radicales. A principios del siglo XIX, el matemático noruego Niels Henrik Abel pensó que había encontrado la solución del problema, pero poco tiempo después llegó la desilusión: había errores en su método, que él mismo descubrió después de muchas noches de arduo trabajo intelectual. Este mismo trabajo le dio la pauta para hacer una de las afirmaciones más importantes de la época: efectivamente la quíntica no tenía soluciones en términos de radicales. El resultado era ciertamente sorprendente (¿por qué las ecuaciones de orden 2, 3 y 4 sí se pueden resolver por radicales y la quíntica ya no?) y no fue entendido ni aceptado por los matemáticos de ese tiempo. Abel murió en la miseria y en el abandono a la edad de 27 años.

Una situación similar a la que pasó Abel, la vivió el joven matemático francés Evaristo Galois ("El Elegido de los Dioses", dice el Premio Nobel en Física Leopold Infield, en su libro que lleva ese título y que es un importante documento sobre la vida de este genio francés). Galois pensaba tener la solución de la quíntica, pero él mismo descubrió los errores en su razonamiento. La vida y el trabajo matemático de Galois es uno de los capítulos más increíbles en la historia de la Matemática, y en estas líneas es imposible siquiera referir en qué consistió su trabajo. Simplemente diremos que el problema de resolver ecuaciones en términos de radicales, que empezó con los babilonios hace 36 siglos, terminó con el trabajo de Galois a principios del siglo XIX, pues dentro de su rica teoría que tuvo que crear para obtener sus resultados, logró establecer que las ecuaciones de orden n:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

NO TIENEN SOLUCIONES EN TÉRMINOS DE RADICALES PARA $n \geq 5$. Por supuesto, nadie se enteró de la muerte de Galois. Simplemente una madrugada los médicos de un hospital en París supieron que un joven de 21 años, sin posibilidades económicas, se había batido en un duelo y lo habían matado. Ese joven era Evaristo Galois. Hasta medio siglo después la comunidad matemática empezó a entender el legado matemático tan importante de ese muchacho, del que a la fecha no se sabe dónde está enterrado.

CAPÍTULO 4
DERIVADAS: DEFINICIÓN Y PROPIEDADES

"Considerando la Matemática desde el comienzo del mundo hasta la época de Newton, lo que él ha hecho es, con mucho, la mitad mejor"

Gottfried Wilhelm Leibniz

En este capítulo nos adentramos en el concepto fundamental del Cálculo Diferencial: el concepto de derivada de una función. En las dos primeras secciones estudiaremos problemas cuya solución conduce de modo natural al planteamiento de un límite de un cociente muy especial, que en la tercera sección definiremos, en general, como la derivada. En la primera sección los problemas serán geométricos y estarán relacionados con la posibilidad de trazar una recta tangente a una curva. Este tipo de problemas fueron los que condujeron a Leibniz a plantear el concepto de lo que ahora llamamos derivada de una función. En la segunda sección los problemas provendrán de la física: cómo determinar la velocidad de un cuerpo en movimiento rectilíneo en un instante dado (velocidad instantánea). Este tipo de problemas son los que condujeron a Newton al concepto de derivada. Así, Leibniz con problemas geométricos y Newton con problemas de la Física llegaron a concebir en el siglo XVII una de las ideas más importantes de la Matemática de todos los tiempos, llamada actualmente derivada. Lo que presentamos aquí es fruto de muchos años de depuración de las ideas originales de Newton y Leibniz, las cuales, para sus mismos creadores, fueron al inicio poco claras. Dice el matemático Morris Kline, en su libro: *Matemáticas: la pérdida de la certidumbre* (siglo XXI, España, 1985), al referirse a esa etapa de nacimiento de las ideas del Cálculo en las mentes de Newton y Leibniz:

"Por supuesto, el Cálculo implicaba ideas nuevas y muy sutiles, y ni siquiera mentes creativas y más dotadas [como las de Newton y Leibniz] comprenden siempre del todo sus propias creaciones."

(En la nota histórica al final del capítulo, ahondaremos un poco más en este respecto.) Sin embargo, el mundo reconoció la importancia de estos conceptos como una invaluable ayuda en el proceso de tratar de *entender* nuestro entorno (en los campos de la ciencia y de las humanidades) y ahora, tres siglos después de su nacimiento, se siguen haciendo esfuerzos para que **todos** los estudiantes, desde su último año de preparatoria, puedan tener instaladas en sus estructuras mentales las ideas del Cálculo. Este libro representa uno de esos esfuerzos.

4.1 RECTAS TANGENTES A CURVAS

El problema que abordaremos en esta sección es el de

Trazar una recta tangente a la gráfica de una función en un punto dado de ella.

Desde los tiempos de la antigua Grecia, se sabía cómo trazar la tangente a un círculo. Este procedimiento lo hemos aprendido desde la primaria: si tenemos un círculo y un punto P de él, trazamos la recta que une el centro del círculo O con P y así obtenemos el segmento $\overline{OP}$, y después trazamos la recta perpendicular a este segmento. Tal perpendicular es la tangente buscada.

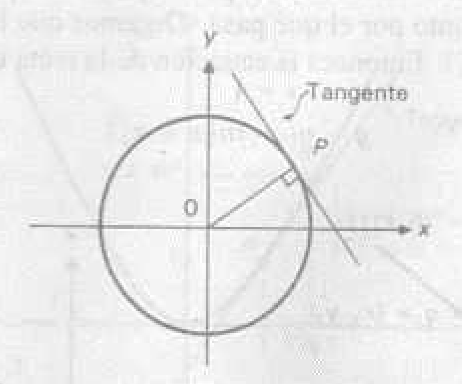


Figura 4.1.1. La recta tangente a un círculo.

En los siglos XVI-XVII se establecieron algunos métodos geométricos para obtener las tangentes a cónicas como la parábola y la elipse. Estos métodos aparecieron con el nacimiento de la Geometría Analítica, con René Descartes (1596-1650), pero fueron muy limitados y oscuros como para poder aplicarlos a situaciones más generales. En su obra *La geometría*, Descartes afirma:

"*Habré dado aquí todo lo que es necesario para el estudio de las curvas, una vez que dé un método general para trazar una línea recta que forme ángulos rectos con una curva en un punto arbitrario de ella. Y me atrevería a decir que éste es no sólo el problema más útil y más general de la geometría que conozco, sino incluso de los que hubiera deseado conocer.*"

(Esa línea recta que forma ángulos rectos con la curva, a la que se refiere Descartes, es una recta perpendicular a lo que definiremos en esta sección como la recta tangente a la curva, y que posteriormente definiremos como "recta normal" a la curva.)

Lo que queremos hacer aquí es tratar de resolver el problema general de la determinación de la recta tangente a cualquier curva que sea la gráfica de una función $y = f(x)$, en un punto dado de ella. Para esto, usaremos un procedimiento de "acercarnos" a la recta tangente por medio de rectas que sí sabemos determinar. De manera intuitiva, entendemos por "recta tangente" una curva en un punto p dado de ella, una recta que "toca" la curva en el punto p (llamado punto de tangencia). Uno de los objetivos que tenemos en esta primera sección es

precisar esta noción intuitiva de tangencia. Veremos lo que matemáticamente significa que una recta "toque" una curva, y veremos también que hay curvas (gráficas de funciones) a las que no se les puede trazar rectas tangentes en algunos puntos de ellas.

Un par de hechos geométricos (de nuestro curso de Geometría Analítica) que debemos tener bien presentes, referentes a la determinación de rectas en el plano, son:

Antecedente geométrico 1. Una recta en el plano queda completamente determinada (es decir, su ecuación queda completamente determinada) si se conocen dos puntos por los cuales pasa, digamos $p = (x_1, y_1)$ y $q = (x_2, y_2)$. La ecuación de la recta en este caso es:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

en donde sabemos que el cociente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ es la pendiente de la recta.

Antecedente geométrico 2. Una recta en el plano queda completamente determinada si se conoce su pendiente y un punto por el que pasa. Digamos que la recta tiene pendiente m y que pasa por el punto (x_1, y_1). Entonces la ecuación de la recta es:

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

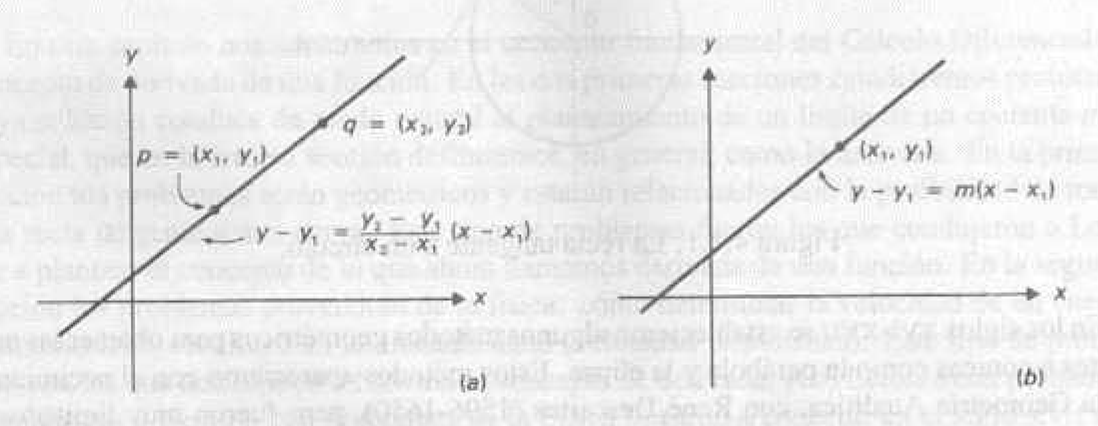


Figura 4.1.2. Una recta en el plano queda completamente determinada si se conocen: (a) dos puntos por los que pasa, o, (b) su pendiente y un punto por el que pasa.

Antes de abordar el problema general, veamos un caso concreto en el que funcionarán las ideas que manejaremos posteriormente para obtener la recta tangente a la gráfica de cualquier función $y = f(x)$ en un punto dado de ella.

Recuerde que una recta que corta la curva en dos puntos de ella, digamos p y q, se dice que es una *recta secante* a la curva (por p y q).

Tomemos la función $f(x) = x^2$, y planteémonos el problema de determinar la recta tangente a la parábola que representa (la parábola $y = x^2$, gráfica de esta función), en el punto $p = (1, 1)$. Según el resultado recordado en el antecedente geométrico 2, para determinar completamente la ecuación de esta recta necesitamos solamente decir cuál es su pendiente, puesto que ya sabemos que tal recta pasa por el punto $(1, 1)$ (que es el punto de tangencia).

Así pues, si conocemos la pendiente de la recta, llamémosla m_T, la ecuación procurada sería:

$$y - 1 = m_T(x - 1).$$

Veamos entonces cómo podemos determinar m_T. Si consideramos puntos de la parábola $y = x^2$ que se encuentren cerca de p, digamos que con abscisa $1+h$, con h pequeño, podemos calcular siempre, según el antecedente geométrico 1 comentado anteriormente, la pendiente de la recta secante a la parábola que pasa por p y q. Más concretamente, siendo $p = (1, 1)$ y q un punto de la parábola $y = x^2$ que tiene abscisa $1 + h$, entonces q es un punto con coordenadas $q = (1 + h, (1 + h)^2)$, y la pendiente de la recta secante que pasa por p y q, llamémosle m_S, será:

$$m_S = \frac{(1+h)^2 - 1}{1 + h - 1} = \frac{(1+h)^2 - 1}{h}.$$

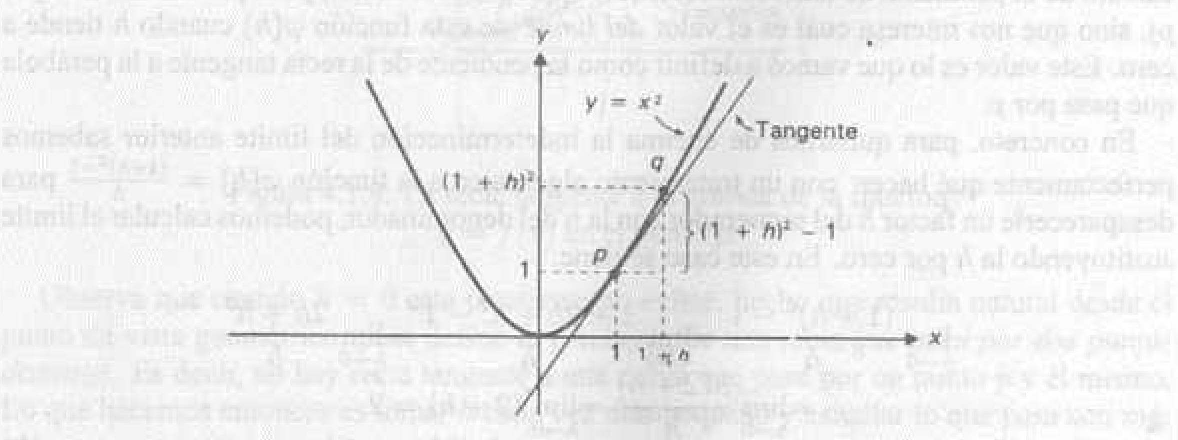


Figura 4.1.3. La parábola $y = x^2$ y su recta tangente en el punto $p(1, 1)$.

Entre más cerca esté el punto q del punto p, la recta secante que pasa por p y q será cada vez más parecida a la recta tangente que queremos determinar. *Haremos un proceso al límite para determinar la pendiente de la recta tangente que nos interesa.*

Veamos el comportamiento de la pendiente de la recta secante cuando el punto q se aproxima a p. En la siguiente tabla se consideran algunos valores de h (cada vez más pequeños), las coordenadas del punto $q = (1 + h, (1 + h)^2)$ sobre la parábola correspondiente a esta h, y la pendiente m_S de la recta secante a la parábola que pasa por $p = (1, 1)$ y q.

h	q	m_S	h	q	m_S
1	(2,4)	3	−1	(0,0)	1
0.5	(1.5, 2.25)	2.5	−0.5	(0.5, 0.25)	1.5
0.1	(1.1, 1.21)	2.1	−0.1	(0.9, 0.81)	1.9
0.01	(1.01, 1.0201)	2.01	−0.01	(0.99, 0.9801)	1.99
0.001	(1.001, 1.002001)	2.001	−0.001	(0.999, 0.998001)	1.999

En la tabla anterior vemos que, entre más próximo se encuentre el punto q del punto p, la recta secante que pasa por p y q tiene una pendiente cada vez más parecida al valor $m = 2$. Podemos afirmar, de hecho (con base en los resultados numéricos anteriores), que la recta

tangente, cuya ecuación estamos procurando, es la recta que pasa por p y tiene pendiente $m_T = 2$, valor límite del proceso de aproximarse q a p.

Observe que esta conclusión la hubiéramos podido obtener directamente calculando el límite, cuando h tiende a cero, de la pendiente de la recta secante m_S. Es decir, el límite:

$$\lim_{h\to 0} m_S = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h}.$$

Observe que este límite produce una forma indeterminada $\frac{0}{0}$, pues la función $\varphi(h) = \frac{(1+h)^2-1}{h}$ = pendiente de la recta secante a la parábola que pasa por p y q, **no existe en** $h = 0$ (lo cual, geométricamente nos dice que *no existe recta secante a la parábola que pase por p y por p*). Ésta es justamente la situación que tanto comentamos en el capítulo anterior: no nos interesa qué pasa con la función $\varphi(h)$ en $h = 0$ (pues de hecho sabemos que no podemos hacer el cálculo de la pendiente de una recta secante... ¡que no es secante!, pues pasa solamente por p), sino que nos interesa cuál es el valor *del límite* de esta función $\varphi(h)$ cuando h tiende a cero. Este valor es lo que vamos a definir como la pendiente de la recta tangente a la parábola que pasa por p.

En concreto, para quitarnos de encima la indeterminación del límite anterior sabemos perfectamente qué hacer: con un tratamiento algebraico a la función $\varphi(h) = \frac{(1+h)^2-1}{h}$ para desaparecerle un factor h del numerador con la h del denominador, podemos calcular el límite sustituyendo la h por cero. En este caso se tiene:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h + h^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(2+h)}{h} = \lim_{h\to 0} (2+h) = 2.$$

Entonces, el valor 2 que estimamos al ver los valores de la tabla anterior es la pendiente de la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto $p = (1, 1)$. La ecuación de esta recta es, por tanto (según el antecedente geométrico 2):

$$y - 1 = 2(x - 1),$$

o bien:

$$y = 2x - 1.$$

Consideremos ahora el caso general: tenemos una función $y = f(x)$ y un punto dado de su gráfica $p = (x_0, f(x_0))$. Queremos determinar la (ecuación de la) recta tangente a la gráfica de esta función en el punto p. Como en el ejemplo anterior de la parábola, es suficiente que calculemos el valor de la pendiente de esta recta, digamos m_T, pues con este valor calculado, la ecuación procurada sería (la ecuación de una recta que pasa por $p = (x_0, f(x_0))$ y tiene pendiente m_T):

$$y - f(x_0) = m_T(x - x_0).$$

Para calcular la pendiente m_T, usamos un proceso al límite, viendo a la recta tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto p, como el límite de las rectas secantes a tal curva que pasan por p y un punto q cerca de p, cuando q tiende hacia el punto p. Sea $x_0 + h$

la abscisa del punto q. Mientras h sea más pequeño, el punto q se encontrará más próximo al punto p. Entonces las coordenadas de q son $q = (x_0 + h, f(x_0 + h))$ y la pendiente de la recta secante que pasa por p y q es

$$m_S = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

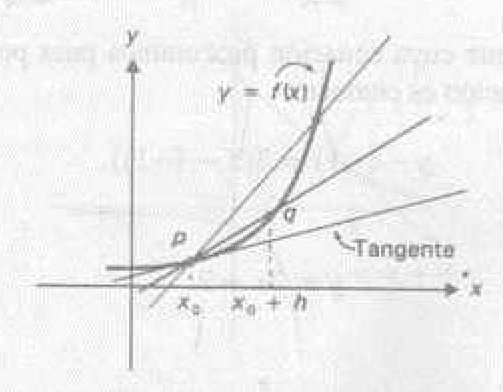


Figura 4.1.4. La recta tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto p.

Observe que cuando $h = 0$ esta pendiente no existe, hecho que resulta natural desde el punto de vista geométrico, pues define la pendiente de una recta *que pasa por dos puntos distintos*. Es decir, no hay recta tangente a una curva que pase por un punto p y él mismo. Lo que hacemos entonces es tomar h cada vez más pequeño y estudiar lo que pasa con m_S. Más concretamente, estudiamos el límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Si este límite existe, lo definimos como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto $p = (x_0, f(x_0))$.

Y he aquí justamente el concepto preciso de tangencia en Matemática: la gráfica de una función $y = f(x)$ tiene asociada una recta tangente en un punto de ella, si el límite $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe, en cuyo caso, el valor del límite es el valor de la pendiente de tal recta tangente.

Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 4.1.1. Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3$ en el punto de abscisa $x_0 = -1$.

SOLUCIÓN. El punto de la gráfica de la función $f(x) = x^3$ correspondiente a la abscisa $x_0 = -1$ tiene por ordenada $f(-1) = (-1)^3 = -1$. Es decir, el punto de tangencia es $p = (-1, -1)$. Para determinar la pendiente de la recta, calculamos el límite $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Éste es (si existe) la pendiente de la recta tangente que procuramos. Tenemos:

$$m_T = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(-1+h)^3-(-1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1+3h-3h^2+h^3+1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(h^2-3h+3)}{h} = \lim_{h\to 0} (h^2-3h+3) = 3.$$

Así pues, la recta tangente cuya ecuación procuramos pasa por $p = (-1,-1)$ y tiene pendiente $m_T = 3$. Su ecuación es entonces:

$$y-(-1) = 3(x-(-1)),$$

o bien:

$$y = 3x+2.$$

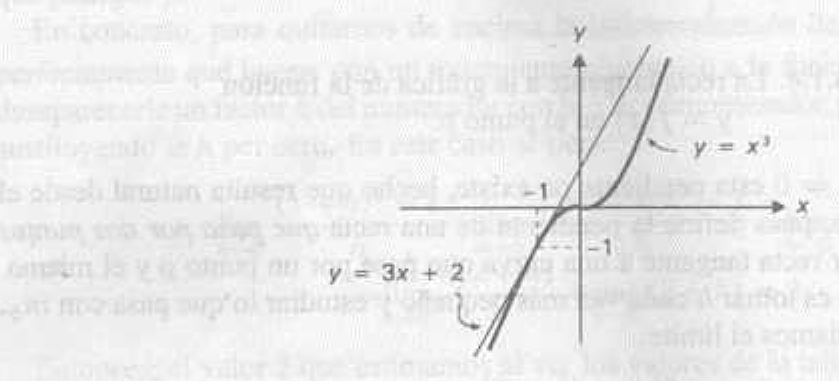


Figura 4.1.5. La recta tangente a la gráfica de la función $y = x^3$ en el punto $p = (-1,-1)$.

★

EJEMPLO 4.1.2. Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x-2}$ en el punto de abscisa $x_0 = 3$.

SOLUCIÓN. El punto de la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x-2}$ correspondiente a $x_0 = 3$, tiene por ordenada $f(3) = \frac{1}{3-2} = 1$. El punto de tangencia es entonces $p = (3,1)$. La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x-2}$ en p la obtenemos con el límite $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Las cuentas se ven como:

$$m_T = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{3+h-2}-1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{h+1}-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-(h+1)}{h(h+1)} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h(h+1)} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{h+1} = -1.$$

La ecuación de la recta tangente procurada es entonces:

$$y - 1 = (-1)(x - 3),$$

o bien:

$$y = -x + 4.$$

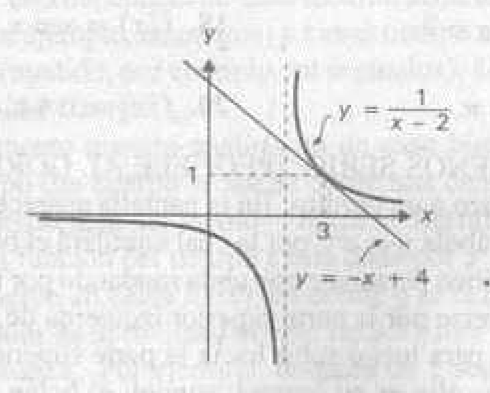


Figura 4.1.6. La recta tangente a la gráfica de la función $y = \dfrac{1}{x-2}$ en el punto $p = (3, 1)$.

★

EJERCICIOS (4.1)

1. Determinar la ecuación de la recta secante a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 3x$, que pasa por los puntos de abscisas $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$.

2. Determinar la ecuación de la recta secante a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 3x$, que pasa por los puntos de abscisas $x_1 = 1$ y $x_2 = 1.1$.

3. Determinar la ecuación de la recta secante a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 3x$, que pasa por los puntos de abscisas $x_1 = 1$ y $x_2 = 1.01$.

4. Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 3x$, que pasa por el punto de abscisa $x = 1$.

En cada uno de los ejercicios 5 al 20, determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ dada, en el punto de abscisa x_0 indicada. (Escriba su respuesta en la forma $Ax + By + C = 0$.)

5. $f(x) = 2$, en $x_0 = 3$.

6. $f(x) = 2$, en $x_0 = 23.1289$.

7. $f(x) = 3x + 1$, en $x_0 = 21.9$.

8. $f(x) = 3x - 7$, en $x_0 = 0$.

9. $f(x) = 2x^2$, en $x_0 = 1$.

10. $f(x) = 2x^2 + 4$, en $x_0 = 1$.

11. $f(x) = x^3 + 4$, en $x_0 = 1$.

12. $f(x) = x^2 + 4x - 2$, en $x_0 = 2$.

13. $f(x) = \frac{1}{x}$, en $x_0 = 1$.

14. $f(x) = \frac{1}{x}$, en $x_0 = -1$.

15. $f(x) = \sqrt{x}$, en $x_0 = 1$.

16. $f(x) = \sqrt{x} + 4$, en $x_0 = 1$.

17. $f(x) = -x^2 + 2$, en $x_0 = 2$.

18. $f(x) = \operatorname{sen} x$, en $x_0 = 0$.

19. $f(x) = \operatorname{sen} x$, en $x_0 = \pi$.

20. $f(x) = \cot x$, en $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

21. (EN UN TONO MENOS SERIO: ¡PÉGUELE AL GORDO!) Un juego electrónico consiste en darle un balonazo a un gordito. En la pantalla aparece un sistema coordenado en el cual está dibujada la parábola $y = x^2$, por la cual circulará el balón que irá a impactarse al estómago de nuestro simpático personaje que anda rondando por todo el plano de la pantalla. El balón comenzará a moverse por la parte superior izquierda de la parábola, irá hacia abajo de ella (rumbo al origen), para luego subir hacia la parte superior derecha de la curva. En el momento que usted haga clic en su control manual, *el balón abandonará la trayectoria parabólica para irse por una trayectoria rectilínea tangente a la parábola*. Usted debe tener la habilidad para "soltar el balón" en el momento adecuado, con el objeto de que éste se impacte en el gordito que aparece en pantalla.

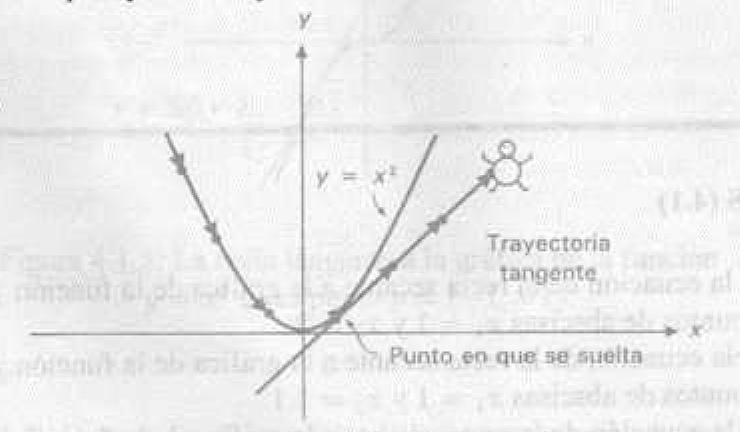


Figura 4.1.7. ¡Péguele al gordo!

En una de las oportunidades que tiene de dar al blanco, éste se encuentra en el punto de coordenadas $(5, 9)$. ¿En qué punto de la parábola debe soltar el balón para que éste llegue a su objetivo?

Si es más audaz aún, resuelva este problema en el caso general: si el gordito se encuentra en el punto (a, b), diga en qué punto de la parábola debe soltar el balón para que dé en el blanco.

4.2 LA VELOCIDAD INSTANTÁNEA DE UN CUERPO

Consideremos el problema de calcular la velocidad de un cuerpo en movimiento rectilíneo. Tomando algún punto de referencia, la distancia recorrida por el cuerpo (medida respecto de la referencia mencionada) es función del tiempo que transcurre. Supongamos que se dispone de una función que describe esta dependencia. Esta función sería del tipo $x = f(t)$, en donde x es la distancia (medida, por ejemplo, en metros) y t es el tiempo transcurrido desde el inicio del movimiento del cuerpo (medido, por ejemplo, en segundos). Una función de este tipo es llamada *Ley de Movimiento del Cuerpo*.

Concretemos por el momento nuestro análisis en un caso bien conocido: el fenómeno de la caída libre de un cuerpo (un cuerpo se suelta desde una cierta altura y cae libremente —suponiendo que no hay resistencia del medio— hacia la Tierra). Se sabe que la distancia x recorrida por el cuerpo en función del tiempo t está dada por $x = f(t) = \frac{1}{2}gt^2$ (ésta es la ley de movimiento de un cuerpo en caída libre), en donde g es la aceleración del cuerpo debida a la gravedad (cuyo valor es aproximadamente de 9.81 m/s^2) y x se mide a partir del punto en que el cuerpo se suelta. Por ejemplo, después de 1 segundo, el cuerpo ha caído $x = f(1) = \frac{1}{2}g(1)^2 = 4.905$ metros, después de 5 segundos el cuerpo ha caído $x = f(5) = \frac{1}{2}g(5)^2 = 122.625$ metros, etcétera. La gráfica de esta función es la de una parábola que abre hacia arriba con vértice en el origen. El tiempo t comienza a medirse a partir de que el cuerpo comienza su caída, de modo que el dominio de esta función es $t \geq 0$ (aunque la fórmula $x = \frac{1}{2}gt^2$ tiene sentido para toda t real). La gráfica de esta función se ve entonces como:

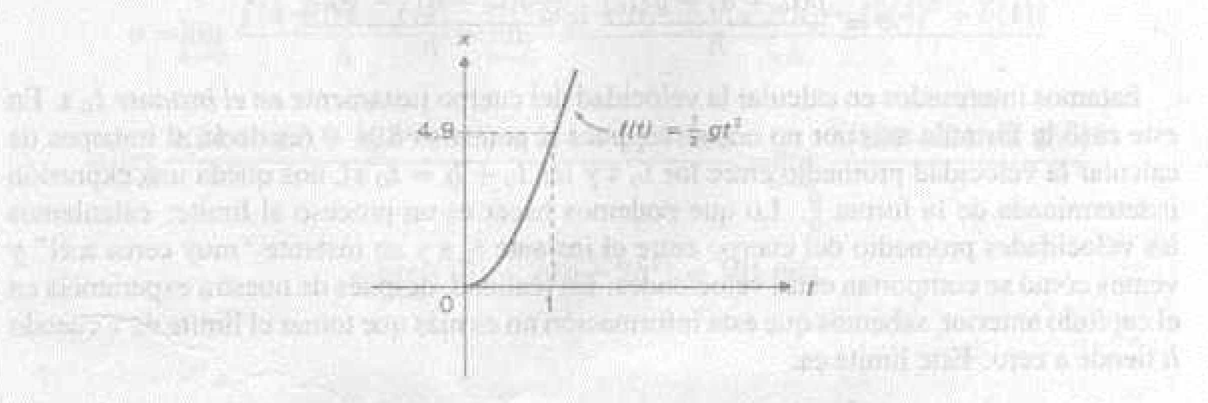


Figura 4.2.1. La gráfica de la función $x = f(t) = \frac{1}{2}gt^2$ en la caída libre de un cuerpo.

Para calcular la velocidad v del cuerpo, necesitamos saber qué distancia d recorrió en un determinado tiempo t, pues sabemos que la velocidad se calcula como $v = \frac{d}{t}$ (en metros/segundo). Por ejemplo, sabemos que después de 1 segundo de caída, el cuerpo ha recorrido $x = f(1) = 4.905$ metros, y después de 5 segundos de caída, el cuerpo ha recorrido $x = f(5) = 122.625$ metros, de modo que en los 4 segundos transcurridos entre 1 segundo y 5 segundos, el cuerpo recorrió $122.625 - 4.905 = 117.72$ metros. La *velocidad promedio* del cuerpo entre los instantes $t = 1$ y $t = 5$ segundos, que denotaremos por $\overline{v}$, es:

$$\overline{v} = \frac{117.72 \text{ metros}}{4 \text{ segundos}} = 29.43 \text{ m/s}.$$

Esto no significa que el cuerpo se haya movido con una velocidad de 29.43 m/s durante los 4 segundos que transcurrieron entre los instantes $t = 1$ y $t = 5$. Este dato lo interpretamos pensando en que, dada la distancia que recorrió el cuerpo y el tiempo que le tomó en recorrer esa distancia, el cuerpo recorrió *en promedio* 29.43 metros cada segundo. Por ejemplo, sabemos que la distancia entre la ciudad de México y la ciudad de Morelia es de 286 kilómetros. Si salimos de la ciudad de México a las 5 de la tarde y llegamos a Morelia a las 9 de la noche, en promedio, viajamos a una velocidad de $\overline{v} = \frac{286}{4} = 71.5$ km/h, lo cual no significa que durante todo el viaje el velocímetro de nuestro automóvil haya marcado 71.5 km/h: hubo momentos en que marcó 110 o 120 km/h, hubo momentos en que marcó 30 o 40 km/h, etcétera.

En términos generales, en la caída libre de un cuerpo, la *velocidad promedio del Cuerpo entre los instantes* t_0 y $t_1 = t_0 + h$, la calculamos dividiendo la distancia recorrida por el cuerpo en estos $t_1 - t_0 = h$ segundos, entre los h segundos que le tomó recorrerla. Tal distancia no es más que la diferencia entre lo que el cuerpo lleva recorrido a los $t_1 = t_0 + h$ segundos, que es $x = f(t_0 + h) = \frac{1}{2}g(t_0 + h)^2$ y lo que el cuerpo lleva recorrido a los t_0 segundos, que es $x = f(t_0) = \frac{1}{2}gt_0^2$ (recuerde que x se mide a partir del punto en que el cuerpo se suelta). Así pues, la velocidad promedio del cuerpo entre los instantes t_0 y $t_0 + h$ es:

$$\overline{v} = \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} = \frac{\frac{1}{2}g(t_0 + h)^2 - \frac{1}{2}gt_0^2}{h}.$$

Estamos interesados en calcular la velocidad del cuerpo justamente *en el instante* t_0 s. En este caso la fórmula anterior no nos sirve, pues si ponemos $h = 0$ (es decir, si tratamos de calcular la velocidad promedio entre los t_0 s y los $t_0 + h = t_0$ s), nos queda una expresión indeterminada de la forma $\frac{0}{0}$. Lo que podemos hacer es un proceso al límite: calculamos las velocidades promedio del cuerpo entre el instante t_0 s y un instante "muy cerca a él" y vemos cómo se comportan estas velocidades. En realidad, después de nuestra experiencia en el capítulo anterior, sabemos que esta información no es más que tomar el límite de $\overline{v}$ cuando h tiende a cero. Este límite es:

$$\lim_{h\to 0} \overline{v} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2}g(t_0 + h)^2 - \frac{1}{2}gt_0^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2}g\frac{(t_0 + h)^2 - t_0^2}{h} = \frac{1}{2}g \lim_{h\to 0} \frac{t_0^2 + 2ht_0 + h^2 - t_0^2}{h}$$

$$= \frac{1}{2}g \lim_{h\to 0} \frac{h(2t_0 + h)}{h} = \frac{1}{2}g \lim_{h\to 0} (2t_0 + h) = \frac{1}{2}g(2t_0) = gt_0.$$

Es decir, la *velocidad instantánea* v *de un cuerpo en caída libre, en el instante* t_0 *es* $v = gt_0$.

Por ejemplo, después de 1 s de haber comenzado su caída, el cuerpo alcanza (en ese instante) una velocidad de $v = g(1) = 9.81$ m/s, a los 5 s de estar cayendo, el cuerpo alcanza una velocidad de $v = g(5) = 49.05$ m/s, etcétera.

En el caso general tenemos: si $x = f(t)$ es la ley de movimiento de un cuerpo, la velocidad promedio del cuerpo entre los instantes t_0 y $t_0 + h$ es:

$$\overline{v} = \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h},$$

y su velocidad instantánea a los t_0 s de haber comenzado el movimiento es:

$$v = \lim_{h \to 0} \overline{v} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}.$$

Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 4.2.1. La ley de movimiento rectilíneo de un cuerpo es $x = f(t) = 2t^3 + 5t$, en donde x se mide en metros y t en segundos. Determine la velocidad promedio del cuerpo entre los instantes $t_0 = 2$ s y $t_1 = 7$ s, y su velocidad instantánea a los $t = 4$ s.

SOLUCIÓN. La velocidad promedio del cuerpo entre los instantes $t_0 = 2$ s y $t_1 = 7 = 2 + h$ s, es:

$$\overline{v} = \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} = \frac{f(7) - f(2)}{5} = \\ = \frac{2(7)^3 + 5(7) - (2(2)^3 + 5(2))}{5} = \frac{695}{5} = 139 \text{ m/s}.$$

La velocidad instantánea del cuerpo a los $t = 4$ segundos es:

$$v = \lim_{h \to 0} \frac{f(4 + h) - f(4)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(4 + h)^3 + 5(4 + h) - (2(4)^3 + 5(4))}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2(64 + 48h + 12h^2 + h^3) + 5(4 + h) - 148}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(101 + 24h + 2h^2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (101 + 24h + 2h^2) = 101 \text{ m/s}.$$

*

EJEMPLO 4.2.2. La *energía cinética* E_c de un cuerpo en movimiento, es $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ en donde m es la masa del cuerpo y v su velocidad. Si un cuerpo de masa $m = 3$ kg se mueve sobre el eje x según la ley $x = f(t) = t^2 + 6t$ en donde x se mide en metros y t en segundos, calcule la energía cinética de este cuerpo a los 5 s de haber comenzado su movimiento.

SOLUCIÓN. La velocidad que lleva el cuerpo a los 5 s es:

$$v = \lim_{h \to 0} \frac{f(5 + h) - f(5)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(5 + h)^2 + 6(5 + h) - ((5)^2 + 6(5))}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(25 + 10h + h^2) + 6(5 + h) - 55}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(16 + h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (16 + h) = 16 \text{ m/s}.$$

Entonces la energía cinética del cuerpo a los 5 segundos es de:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2}(3)(16)^2 = 384 \text{ kg-m}^2/\text{s}^2.$$

(Las unidades de energía kg-m^2/s^2 son llamadas Joules.)

★

EJERCICIOS (4.2)

En los ejercicios 1 al 10, se da la ley de movimiento de un cuerpo $x = f(t)$, en donde x se mide en metros y t en segundos. En cada caso, calcule la velocidad inicial del movimiento del cuerpo (es decir, la velocidad del cuerpo al tiempo $t = 0$), así como la velocidad del cuerpo después de 1 segundo de haber comenzado su movimiento.

1. $x = 3t^2 + t.$ **2.** $x = 2t^3 + 3t.$ **3.** $x = t + 2.$

4. $x = -t^2 + 1.$ **5.** $x = \dfrac{1}{t+1}.$ **6.** $x = \sqrt{t}.$

7. $x = \sqrt[3]{t}.$ **8.** $x = 2t^2 + 4t + 1.$ **9.** $x = t^3 + 2t.$

10. $x = -t^3 - t.$

11. Un cuerpo se mueve sobre el eje x según la ley $x = 2t^3 - 10t$, en donde x se mide en metros y t en minutos.

a) ¿De qué punto del eje x arranca el movimiento del cuerpo?
b) ¿Con qué velocidad comienza su movimiento?
c) ¿Cuál es la posición del cuerpo después de 1 minuto de haber comenzado su movimiento?
d) ¿Cuál es la velocidad media del cuerpo durante el primer minuto de movimiento?
e) ¿Cuál es la velocidad instantánea del cuerpo a los $t = 1$ min?

12. Repita el problema anterior si la ley de movimiento es $x = t + \sqrt{t}$.

4.3 DEFINICIÓN DE DERIVADA

En la primera sección vimos que el problema de calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función $y = f(x)$, en un punto dado $p = (x_0, f(x_0))$ de ella, se reducía a calcular el límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

En la segunda sección, se vio que el problema de calcular la velocidad instantánea de un cuerpo que se mueve con movimiento rectilíneo, según la ley de movimiento $x = f(t)$, en el instante t_0, se reducía a calcular el límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}.$$

Es claro que en ambas situaciones estamos calculando *el mismo límite*: en el primer caso con la función $y = f(x)$ y en el segundo con la ley de movimiento $x = f(t)$. Este límite recibe un nombre especial. Se llama *derivada* de la función f. A continuación damos la definición más importante del Cálculo Diferencial.

DEFINICIÓN DE DERIVADA

*Sea $f : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función definida en el intervalo abierto I de $\mathbf{R}$, y sea x_0 un punto de I. Se define la **derivada** de la función f en x_0, como el límite*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

*cuando éste existe. En tal caso decimos que la función f es **derivable (o diferenciable)** en x_0. Si la función es derivable en todo punto $x \in I$, decimos que es **derivable en** I.*

Existen muchas maneras de denotar la derivada de una función en x_0, por ejemplo como $f'(x_0)$, $Df(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$, o la notación de Leibniz $\frac{dy}{dx}$ (en la cual no se hace explícito el punto en donde se está calculando la derivada). Usaremos más la notación $f'(x_0)$ (leída como "efe prima en equis cero") y, eventualmente la notación de Leibniz $\frac{dy}{dx}$.

Una primera observación importante de la definición anterior es que la derivada de una función es un *concepto local*: se habla de la derivada de la función *en un punto concreto x_0 de su dominio*. Por ejemplo, en la sección 1 la derivada es justamente la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función *en un punto concreto* de tal gráfica, y en la segunda sección, la derivada es la velocidad instantánea de un cuerpo en movimiento en un *instante concreto* del movimiento. Sin embargo, será muy común que calculemos la derivada de una función $y = f(x)$ "en un punto arbitrario x de su dominio". En tal caso escribiremos la derivada como $f'(x)$, o bien con la notación de Leibniz $\frac{dy}{dx}$.

El hecho de que en la definición de derivada se hable de la derivada de una función en un punto x_0 que pertenece a un intervalo *abierto* de $\mathbf{R}$, en donde está definida la función, es por una razón meramente técnica. Esto garantiza que podemos tomar puntos $x_0 + h$ cerca de x_0 (con h pequeño) los cuales siguen perteneciendo al dominio de la función: observe

que debemos calcular no sólo la imagen $f(x_0)$ sino también $f(x_0 + h)$ (y esta última sólo la podemos calcular si $x_0 + h$ se encuentra en el dominio de la función). Resulta que los intervalos abiertos de la recta real tienen esa propiedad: dado un punto x_0 en el intervalo abierto I de R, existe siempre una vecindad con centro en x_0 y radio $r > 0$ que se encuentra completamente contenida en I. Es decir, si un punto pertenece a un intervalo abierto, siempre existen "vecinos" (cercanos) también pertenecen al intervalo. (Observe que esto no ocurre con un intervalo cerrado: por ejemplo $x = 2$ pertenece al intervalo $[2, 4]$, pero ningún vecino de x que se encuentre a su izquierda pertenece a tal intervalo.)

Por último, observe que la derivada de una función en un punto de su dominio es un límite, el cual puede no existir. En tal caso decimos que la función no tiene derivada en el punto en cuestión, o que no es derivable o diferenciable en ese punto. De hecho, el límite que define a la derivada de una función siempre conduce a una forma indeterminada $\frac{0}{0}$. En efecto, el cociente:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

no existe cuando $h = 0$. En el capítulo anterior desarrollamos algunas habilidades para calcular este tipo de límites. En los ejemplos que vamos a presentar en esta sección emplearemos algunas de tales habilidades.

A manera de resumen de lo visto en las dos primeras secciones podemos decir que:

SECCIÓN 1:
La pendiente m_T de la recta tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto de abscisa x_0 (si existe), es igual a la derivada de la función f en x_0. Es decir que $m_T = f'(x_0)$.

SECCIÓN 2:
Si un cuerpo se mueve según la ley de movimiento $x = f(t)$, la velocidad instantánea v de este cuerpo en el instante t_0 es igual a la derivada de la función f en t_0. Es decir que $v = f'(t_0)$.

Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 4.3.1. Verifique que la función $f(x) = \frac{4}{x^2+3}$ es derivable para toda $x \in$ R.
SOLUCIÓN. Se debe ver que el límite $f'(x)$ existe para toda $x \in$ R. Se tiene:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{4}{(x+h)^2+3} - \frac{4}{x^2+3}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 4 \left(\frac{(x^2+3) - [(x+h)^2+3]}{h[x^2+3][(x+h)^2+3]} \right) = 4 \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 3 - x^2 - 2xh - h^2 - 3}{h(x^2+1)(x^2+2hx+h^2+1)}$$

$$= 4 \lim_{h \to 0} \frac{-h(2x+h)}{h(x^2+3)(x^2+2xh+h^2+3)} = 4 \lim_{h \to 0} \frac{-(2x+h)}{(x^2+3)(x^2+2xh+h^2+3)}$$

$$= -\frac{8x}{(x^2+3)^2}.$$

★

EJEMPLO 4.3.2. Verifique que la función $f(x) = \sqrt{x^2+4}$ es derivable para toda $x \in \mathbb{R}$.
SOLUCIÓN. Debemos ver que el límite $f'(x)$ existe para toda x real. Se tiene:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{(x+h)^2+4} - \sqrt{x^2+4}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\left(\frac{\sqrt{(x+h)^2+4} - \sqrt{x^2+4}}{h} \right) \left(\frac{\sqrt{(x+h)^2+4} + \sqrt{x^2+4}}{\sqrt{(x+h)^2+4} + \sqrt{x^2+4}} \right) \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 + 4 - (x^2+4)}{h\left(\sqrt{(x+h)^2+4} + \sqrt{x^2+4}\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 + 4 - x^2 - 4}{h\left(\sqrt{(x+h)^2+4} + \sqrt{x^2+4}\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h\left(\sqrt{(x+h)^2+4} + \sqrt{x^2+4}\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{2x+h}{\sqrt{(x+h)^2+4} + \sqrt{x^2+4}}$$

$$= \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}.$$

★

EJEMPLO 4.3.3. Calcule la derivada de la función $f(x) = 3\cos x$ en el punto $x_0 = \frac{\pi}{4}$.
SOLUCIÓN. Usaremos la identidad $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$. Se tiene:

$$f'(\frac{\pi}{4}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\frac{\pi}{4} + h) - f(\frac{\pi}{4})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3\cos\left(\frac{\pi}{4} + h\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 3 \left(\frac{\cos(\frac{\pi}{4})\cos(h) - \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4})\operatorname{sen}(h) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h} \right)$$

$$= 3 \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(h) - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}(h) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{h}$$

$$= 3 \lim_{h \to 0} \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1 - \cos(h)}{h}\right) \right]$$

$$= -\frac{3\sqrt{2}}{2}\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(h)}{h} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos(h)}{h}.$$

Sabemos que el primer límite de esta última expresión es igual a 1. El segundo límite es una forma indeterminada $\frac{0}{0}$, que ya resolvimos en el ejemplo 2.5.3, en donde obtuvimos que su valor es cero. Entonces:

$$f'(\frac{\pi}{4}) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

★

EJEMPLO 4.3.4. Obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \tan x$ en el origen de coordenadas.

SOLUCIÓN. La derivada de la función $f(x) = \tan x$ evaluada en $x = 0$ nos da la pendiente de la recta tangente procurada. Es decir, debemos calcular $f'(0)$. Se tiene:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\tan(h)-\tan(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\tan(h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\left(\frac{1}{\cos(h)}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\right)\right] = (1)(1) = 1.$$

Entonces la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \tan x$ en el origen de coordenadas es $y - 0 = (1)(x-0)$. Es decir, es la recta $y = x$.

★

EJEMPLO 4.3.5. El movimiento rectilíneo de un cuerpo se efectúa de acuerdo con la ley $x = f(t) = \frac{2t^2}{t^2+1}$, en donde x se mide en metros y t en segundos. Determine la velocidad del cuerpo a los 4 s de haber comenzado su movimiento.

SOLUCIÓN. La derivada $f'(4)$ nos da la velocidad del cuerpo en el instante $t = 4$ s. Las operaciones para obtener esta derivada se ven como:

$$f'(4) = \lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{2(4+h)^2}{(4+h)^2+1} - \frac{2(4)^2}{(4)^2+1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(4+h)^2(34) - (32)\left[(4+h)^2+1\right]}{17h\left[(4+h)^2+1\right]}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(16+8h+h^2)(34) - (32)(h^2+8h+17)}{17h(h^2+8h+17)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2h^2+16h}{17h(h^2+8h+17)} = \lim_{h\to 0}\frac{2h(h+8)}{17h(h^2+8h+17)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2(h+8)}{17(h^2+8h+17)}=\frac{16}{(17)^2}=\frac{16}{289}.$$

Entonces la velocidad del cuerpo a los $t=4$ s es de $v=\frac{16}{289}$ m/s.

★

EJEMPLO 4.3.6. Calcular la derivada de la función $f(x)=x^2$ para una x cualquiera.
SOLUCIÓN. Se tiene:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x.$$

★

EJEMPLO 4.3.7. Calcular la derivada de la función $f(x)=x^3$ para una x cualquiera.
SOLUCIÓN. Se tiene:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2.$$

★

EJEMPLO 4.3.8. Calcular la derivada de la función $f(x)=\sqrt{x}$ para una $x\geq 0$ cualquiera.
SOLUCIÓN. Se tiene:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\left(\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\right)\left(\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\right)\right]=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

★

EJEMPLO 4.3.9. Calcular la derivada de la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ para una x cualquiera.
SOLUCIÓN. Se tiene:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\left(\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h} \right) \left(\frac{\left(\sqrt[3]{x+h}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{x+h}\right)\left(\sqrt[3]{x}\right) + \left(\sqrt[3]{x}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{x+h}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{x+h}\right)\left(\sqrt[3]{x}\right) + \left(\sqrt[3]{x}\right)^2} \right) \right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt[3]{x+h}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{x}\right)^3}{h\left[\left(\sqrt[3]{x+h}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{x+h}\right)\left(\sqrt[3]{x}\right) + \left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right]}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h\left[\left(\sqrt[3]{x+h}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{x+h}\right)\left(\sqrt[3]{x}\right) + \left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right]}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left[\left(\sqrt[3]{x+h}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{x+h}\right)\left(\sqrt[3]{x}\right) + \left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right]}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x+h}\right)^2 + \sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x} + \left(\sqrt[3]{x}\right)^2} = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}.$$

(Observe que esta derivada no existe en $x = 0$.)

★

EJEMPLO 4.3.10. Calcular la derivada de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ para una x cualquiera ($x \neq 0$).
SOLUCIÓN. Se tiene:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x-(x+h)}{hx(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}.$$

★

Antes de ver otros ejemplos, quisiéramos destacar los resultados obtenidos en los cinco ejemplos anteriores. Resumimos éstos en la siguiente tabla:

ejemplo	$f(x) =$	$f'(x) =$
4.3.6	x^2	$2x = 2x^{2-1}$
4.3.7	x^3	$3x^2 = 3x^{3-1}$
4.3.8	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$
4.3.9	$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$	$\frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}$
4.3.10	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2} = (-1)x^{-1-1}$

Todos estos ejemplos muestran un mismo patrón de comportamiento en la derivada: las funciones son del tipo $f(x) = x^n$ y, en cada caso, su derivada es $f'(x) = nx^{n-1}$. No es difícil convencerse de la validez de esta fórmula para el caso en que n es un entero positivo. En efecto, sea $f(x) = x^n$ con n entero positivo. La derivada de esta función en un punto cualquiera es:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

Para simplificar este último límite, debemos usar el binomio de Newton, según el cual se tiene:

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n.$$

Entonces:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + \ldots + h^{n-1}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + \ldots + h^{n-1}\right) = nx^{n-1}.$$

Así pues, si n es un entero positivo, se tiene:

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

En realidad, esta fórmula es válida para cualquier $n \in \mathbb{R}$. Nos referiremos a ella como

"regla de (la derivada de) las potencias". En los ejemplos 4.3.8 y 4.3.9 se muestra su validez con dos n racionales, y en el ejemplo 4.3.10, con un n entero negativo. El argumento que prueba esta fórmula para cualquier n real no lo podemos ver en este momento. Sin embargo, vamos a usar tal fórmula desde este capítulo.

EJEMPLO 4.3.11. Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x^3}$ en el punto de abscisa $x = 1$.

SOLUCIÓN. La imagen de la función $f(x) = \frac{1}{x^3}$ para $x = 1$ es $f(1) = 1$, de modo que el punto $p = (1, 1)$ es el punto de tangencia. La pendiente de la recta tangente a la gráfica de esta función en el punto p es $f'(1)$. Usando el resultado previamente establecido, tenemos que la derivada de la función $f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$ es $f'(x) = -3x^{-3-1} = -3x^{-4}$, de modo que $f'(1) = -3(1)^{-4} = -3$. Así pues, la ecuación de la recta tangente procurada es:

$$y - 1 = -3(x - 1),$$

o bien:

$$y = -3x + 4.$$

★

EJEMPLO 4.3.12. Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^6$ en el punto de abscisa $x = 1$.

SOLUCIÓN. La imagen del punto de abscisa $x = 1$ es $f(1) = 1^6 = 1$. Entonces el punto de tangencia es $p = (1, 1)$. Debemos obtener la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^6$ en el punto p. Pero, como sabemos, esta pendiente es $f'(1)$. Al aplicar la regla de las potencias vista en esta sección, la derivada de $f(x) = x^4$ es $f'(x) = 6x^{6-1} = 6x^5$, de modo que $f'(1) = 6(1)^5 = 6$. Así, la ecuación de la recta tangente procurada es:

$$y - 1 = 6(x - 1),$$

o bien:

$$y = 6x - 5.$$

★

EJERCICIOS (4.3)

En los ejercicios 1 al 20, use la definición de derivada para calcular lo que se indica.

1. Si $f(x) = x^2 + 3x + 4$, calcule $f'(1)$.

2. Si $f(x) = -2x^2 + 9x + 144$, calcule $f'(-1)$.

3. Si $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 2$, calcule $f'(0)$.

4. Si $f(x) = \sqrt{1+x}$, calcule $f'(3)$.

5. Si $f(x) = \sqrt{1+2x}$, calcule $f'(4)$.

6. Si $f(x) = \sqrt{2+x}$, calcule $f'(2)$.

7. Si $f(x) = \sqrt{2+3x}$, calcule $f'(2)$.

8. Si $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, calcule $f'(0)$.

9. Si $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, calcule $f'(1)$.

10. Si $f(x) = x\sqrt{1+x}$, calcule $f'(0)$.

11. Si $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$, calcule $f'(1)$.

12. Si $f(x) = \dfrac{3}{2+x}$, calcule $f'(1)$.

13. Si $f(x) = \dfrac{2-x}{2+x}$, calcule $f'(0)$.

14. Si $f(x) = \dfrac{3}{2+x^2}$, calcule $f'(2)$.

15. Si $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{x}$, calcule $f'(4)$.

16. Si $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$, calcule $f'(4)$.

17. Si $f(x) = \sin(3x)$, calcule $f'(0)$.

18. Si $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, calcule $f'(1)$.

19. Si $f(x) = x\cos x$, calcule $f'(\pi)$.

---

20. Si $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}$, calcule $f'(4)$.

En cada uno de los ejercicios 21 al 40, se da un límite que es una derivada $f'(x_0)$ de alguna función $f(x)$ en algún punto x_0 de su dominio. Identifique la función $f(x)$ así como el punto x_0. Calcule el límite indicado (es decir, calcule $f'(x_0)$).

21. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2-9}{h}$.

22. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2-1}{h}$.

23. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h}$.

24. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^3-8}{h}$.

25. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5+h}-\sqrt{5}}{h}$.

26. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$.

27. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+h}-1}{h}$.

28. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[4]{16+h}-2}{h}$.

29. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{4\sqrt{4+h}-8}{h}$.

30. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{2(4+h)^2-32}{h}$.

31. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{2h^4+3h^2+5h}{h}$.

32. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^3+(1+h)^2+(1+h)-3}{h}$.

33. $\lim_{h\to 0} \frac{\frac{5}{1+h}-5}{h}$. 34. $\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{h^2+1}-1}{h}$. 35. $\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(1+h)^2+1}-\frac{1}{2}}{h}$.

36. $\lim_{h\to 0} \frac{\frac{5}{(1+h)^2+4}-1}{h}$. 37. $\lim_{h\to 0} \frac{\frac{3+h}{(3+h)^2+1}-\frac{3}{10}}{h}$. 38. $\lim_{h\to 0} \frac{\tan(h)}{h}$.

39. $\lim_{h\to 0} \frac{4\cos(h)-4}{h}$. 40. $\lim_{h\to 0} \frac{3\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-\frac{3\sqrt{2}}{2}}{h}$.

En los ejercicios 41 al 50, use la regla de las potencias obtenida en esta sección para hallar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ dada en el punto cuya abscisa se indica. Determine también la ecuación de la recta.

41. $f(x) = x^3$, en $x_0 = 4$.

42. $f(x) = x^3$, en $x_0 = -2$.

43. $f(x) = x^4$, en $x_0 = 1$.

44. $f(x) = x^5$, en $x_0 = 0$.

45. $f(x) = x^5$, en $x_0 = 1$.

46. $f(x) = x^2$, en $x_0 = -3$.

47. $f(x) = \frac{1}{x^3}$, en $x_0 = 1$.

48. $f(x) = \frac{1}{x^4}$, en $x_0 = -1$.

49. $f(x) = x^{-5}$, en $x_0 = 1$.

50. $f(x) = x^{-4}$, en $x_0 = -1$.

4.4 DERIVABILIDAD Y CONTINUIDAD

Recordemos que la función $f : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es continua en $x = a \in I$ cuando $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, la cual es una condición que garantiza, desde el punto de vista geométrico, que la gráfica de la función no se rompe en el punto de abscisa a. En la sección anterior definimos la derivada de la función f en el punto de abscisa a, como el límite:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

La existencia de este límite proporcionaba la propiedad de derivabilidad de la función f en a. Se ha mencionado con anterioridad que tanto la continuidad como la derivabilidad son propiedades *locales* de la función. En esta sección queremos estudiar qué relación guardan estas dos propiedades. Así como la continuidad de una función está comprometida con la idea geométrica de "no rompimiento" de la gráfica de la función, hemos visto que la propiedad de derivabilidad está comprometida con la posibilidad de trazar una recta tangente a la gráfica

de la función. Parece natural esperar entonces que esta última propiedad sea más fuerte que la primera. Es decir que para poder trazar una recta tangente a la gráfica de una función (para que la función sea derivable), lo menos que podemos requerir de tal gráfica es que ésta no se rompa en el punto en donde le trazaremos su recta tangente. Esto es efectivamente cierto. A continuación presentamos de manera precisa el resultado correspondiente, así como las principales ideas matemáticas que se encierran en la validación del teorema.

TEOREMA 4.4.1. *Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida en el intervalo abierto I de $\mathbb{R}$. Si esta función es derivable en el punto de abscisa $x = a \in I$, entonces es continua en ese punto. Es decir:*

$$\begin{matrix} \textit{Derivabilidad de } f \\ \textit{en } x = a \end{matrix} \implies \begin{matrix} \textit{Continuidad de } f \\ \textit{en } x = a \end{matrix}$$

En efecto, estudiemos el límite $\lim_{x \to a} f(x)$. Queremos ver que, siendo la función derivable en $x = a$, este límite existe, y vale $f(a)$. Podemos escribir el límite $\lim_{x \to a} f(x)$ de otra manera, haciendo que $x = a + h$. Entonces cuando $x \to a$ se tiene $h = x - a \to 0$, de modo que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a + h).$$

De alguna manera debemos hacer entrar en acción al cociente $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$; pues sabemos que el límite cuando $h \to 0$ de él, existe (y es $f'(a)$). Tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{h \to 0} f(a + h) = \lim_{h \to 0} [f(a + h) - f(a) + f(a)] \\ &= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} h + f(a) \right]. \end{aligned}$$

La demostración del teorema termina haciendo uso de los teoremas sobre límites de la suma y del producto de funciones, así como el del límite de una constante. Las operaciones finales son:

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(a + h) - f(a)}{h} h + f(a) \right] &= \left[\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \right] \left[\lim_{h \to 0} (h) \right] + \lim_{h \to 0} f(a) \\ &= (f'(a))(0) + f(a) = f(a). \end{aligned}$$

con lo que se obtiene la igualdad $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ que establece la continuidad de f en a.

Resulta natural preguntarse si la implicación recíproca del teorema 4.4.1 es también verdadera. Es decir, si la continuidad de una función en un punto garantiza la derivabilidad de la función en ese punto. Un poco de razonamiento a nivel intuitivo nos podría ayudar a adivinar la respuesta. Veamos: para poder trazar una recta tangente a una curva en un punto p de ella ciertamente necesitamos que la curva no se rompa en p. Éste es el contenido del teorema 4.4.1. Sin embargo, la idea (intuitiva) de tangencia, nos sugiere que la recta tangente "se debe embarrar, tocando suavemente a la curva en el punto p", de modo que el simple hecho de que la curva no se rompa en p parece menos fuerte que el hecho de que se le pueda trazar una recta tangente a la curva en p. Piense, por ejemplo, en la función $f(x) = |x|$, cuya gráfica en el origen no tiene rompimiento alguno (tal función es continua en $x = 0$), pero

ese "pico" que hace la gráfica en $x = 0$ no nos permite pensar en alguna recta que sea tangente a ella, en el sentido intuitivo mencionado anteriormente (en el sentido de que la recta se embarre con la gráfica en el origen). Así pues, parece lógico pensar que la respuesta a la pregunta sobre la validez de la implicación recíproca del teorema 4.4.1 es falsa.

Dejemos nuestras apreciaciones intuitivas y hagamos algunas cuentas que nos convenzan de que efectivamente la continuidad de una función en un punto no garantiza la derivabilidad de la función en ese punto. El ejemplo por excelencia que muestra esto es la función $f(x) = |x|$ en $x = 0$. Este ejemplo es lo que en el capítulo anterior llamábamos "contraejemplo".

Consideremos entonces la función $f(x) = |x|$, la cual, recordemos, está definida por:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Los límites unilaterales cuando $x \to 0$ son:

$$\lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0, x<0} |x| = \lim_{x\to 0, x<0} (-x) = 0$$

y

$$\lim_{x\to 0^+} |x| = \lim_{x\to 0, x>0} |x| = \lim_{x\to 0, x>0} (x) = 0,$$

de modo que el límite bilateral $\lim_{x\to 0} |x|$ existe y vale 0. Es decir:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} |x| = 0 = |0| = f(0),$$

lo que prueba la continuidad de $f(x) = |x|$ en $x = 0$.

Veamos ahora el límite $f'(0)$. Se tiene:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}.$$

Los límites unilaterales de la función $\varphi(h) = \frac{|h|}{h}$ cuando $h \to 0$ son:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0, h<0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0, h<0} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0, h<0} (-1) = -1$$

y

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0, h>0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0, h>0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0, h>0} (1) = 1.$$

Como $\lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} \neq \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h}$, concluimos que el límite bilateral $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$ no existe. Así pues, la función $f(x) = |x|$ no es derivable en $x = 0$.

En resumen, la relación entre la continuidad de una función en un punto y su derivabilidad en ese punto es de la siguiente manera:

$$\text{Derivabilidad de } f \text{ en } x=a \quad \overset{\Rightarrow}{\underset{\Leftarrow\!\!\!\!/}{}} \quad \text{Continuidad de } f \text{ en } x=a$$

(teorema 4.4.1) $\Rightarrow$

(contraejemplo: $f(x) = |x|$ en $x = 0$) $\not\Leftarrow$

Veamos algunos ejemplos más que nos ayudarán, por una parte, a entender y utilizar la implicación $\Rightarrow$ del esquema anterior, que es verdadera, y por otra, nos sensibilizarán en cuanto al aspecto geométrico del tipo de funciones con las que se puede mostrar que la implicación $\Leftarrow$ es falsa.

EJEMPLO 4.4.1. ¿Es derivable la función $f(x) = \operatorname{sgn} x$ en $x = 0$?

SOLUCIÓN. El teorema 4.4.1 nos dice que si una función es derivable en un punto, entonces la función es continua en ese punto. Una manera equivalente de establecer esta afirmación es: si una función no es continua en un punto, entonces no es derivable en ese punto (recuerde: la afirmación "si P entonces Q", es equivalente a la afirmación "si no Q entonces no P"). Así entonces, la función $f(x) = \operatorname{sgn} x$, al no ser continua en $x = 0$, no puede ser derivable en ese punto.

★

EJEMPLO 4.4.2. Verificar que la función $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } x < 0 \\ 3x+7 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ no es derivable en $x = 0$.

SOLUCIÓN. Verificamos primeramente la continuidad de la función en $x = 0$. Se tiene:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0, x<0} f(x) = \lim_{x \to 0, x<0} (x-2) = -2$$

y

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0, x>0} f(x) = \lim_{x \to 0, x>0} (3x+7) = 7.$$

Como $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, la función dada es discontinua en $x = 0$. Por lo tanto no es derivable en ese punto.

★

EJEMPLO 4.4.3. Verificar que la función $f(x) = \begin{cases} x^2+2x+5 & \text{si } x < 0 \\ x^3+2x^2+2x+5 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ es derivable en $x = 0$.

SOLUCIÓN. Observe que la función dada es continua en $x = 0$, pues:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0, x<0} f(x) = \lim_{x \to 0, x<0} (x^2+2x+5) = 5$$

y

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0, x>0} f(x) = \lim_{x \to 0, x>0} (x^3+2x^2+2x+5) = 5,$$

de donde $\lim_{x \to 0} f(x) = 5 = (0)^3 + 2(0)^2 + 2(0) + 5 = f(0)$. Debemos ver que el límite $f'(0)$ existe. Se tiene:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - 5}{h}.$$

Como $f(h)$ está definida de manera distinta para $h > 0$ y para $h < 0$, debemos calcular los límites unilaterales:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - 5}{h} = \lim_{h \to 0, h<0} \frac{f(h) - 5}{h} = \lim_{h \to 0, h<0} \frac{h^2 + 2h + 5 - 5}{h} = \lim_{h \to 0, h<0} (h + 2) = 2$$

y

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - 5}{h} = \lim_{h \to 0, h>0} \frac{f(h) - 5}{h} = \lim_{h \to 0, h>0} \frac{h^3 + 2h^2 + 2h + 5 - 5}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0, h>0} (h^2 + 2h + 2) = 2.$$

Como los límites unilaterales son iguales, concluimos que $f'(0)$ existe y vale 2. ⋆

EJEMPLO 4.4.4. Considere la función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 3x & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

¿Es esta función derivable en $x = 0$?

SOLUCIÓN. Veamos primeramente si esta función es continua en $x = 0$. Los límites unilaterales de $f(x)$ cuando $x \to 0$ son:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0, x<0} f(x) = \lim_{x \to 0, x<0} (-2x^2) = 0$$

y

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0, x>0} f(x) = \lim_{x \to 0, x>0} (3x) = 0,$$

de tal modo que $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe y vale 0. Además $f(0) = -2(0)^2 = 0$, así es que $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$, lo cual nos dice que la función es continua en $x = 0$. Esto, sin embargo, no garantiza que la función sea derivable en $x = 0$. Debemos ver si el límite $f'(0)$ existe. Se tiene:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h}.$$

Para calcular este último límite, debemos considerar los dos casos: $h < 0$ y $h > 0$, pues la función $f(h)$ es distinta (sus imágenes se calculan con una fórmula distinta) en cada uno de estos casos. Se tiene:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0, h<0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0, h<0} \frac{-2h^2}{h} = \lim_{h \to 0, h<0} (-2h) = 0$$

y

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0, h>0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0, h>0} \frac{3h}{h} = \lim_{h\to 0, h>0} (3) = 3.$$

Como $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)}{h} \neq \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)}{h}$, concluimos que el límite bilateral $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h}$ no existe. Es decir, la función dada no es derivable en $x = 0$. Observe el comportamiento de la gráfica de la función $f(x)$ en el origen (figura 4.4.1):

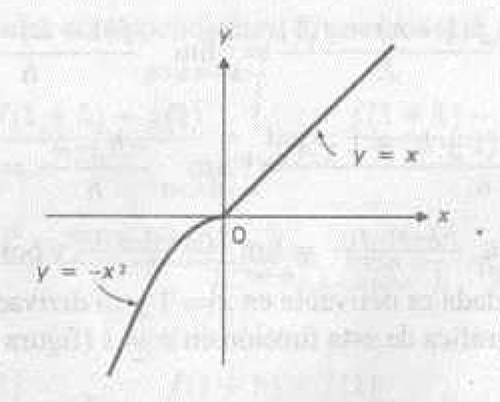


Figura 4.4.1. La función del ejemplo 4.4.4.

★

EJEMPLO 4.4.5. Considere la función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 2x^2 - 5x + 4 & \text{si} \quad x \geq 1. \end{cases}$$

¿Es esta función derivable en $x = 1$?

SOLUCIÓN. Verifiquemos primeramente la continuidad de la función en $x = 1$ (si fuera discontinua, automáticamente —de acuerdo con el teorema 4.4.1— no sería derivable). Estudiemos el límite $\lim_{x\to 1} f(x)$. Los límites unilaterales son:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0, x<0} f(x) = \lim_{x\to 0, x<0} (-x^2 + x + 1) = 1$$

y

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0, x>0} f(x) = \lim_{x\to 0, x>0} (2x^2 - 5x + 4) = 1,$$

de modo entonces que el límite bilateral $\lim_{x\to 1} f(x)$ existe y vale 1. Como $f(1) = 2(1)^2 - 5(1) + 4 = 1$, concluimos que la función dada es continua en $x = 1$. Veamos si el límite $f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ existe. Puesto que la función $f(x)$ "cambia de fórmula" en $x = 1$, debemos considerar los casos en que $h > 0$ (para el cual $x = 1+h > 1$ y $f(x) = 2x^2-5x+4$) y $h < 0$ (para el cual $x = 1 + h < 1$ y $f(x) = -x^2 + x + 1$). Es decir, debemos considerar los límites unilaterales de $f'(1)$. Éstos son:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0,h>0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0,h>0}\frac{2(1+h)^2-5(1+h)+4-1}{h}=\lim_{h\to 0,h>0}\frac{-h+2h^2}{h}=\lim_{h\to 0,h>0}(-1+2h)=-1$$

y

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0,h<0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0,h>0}\frac{-(1+h)^2+(1+h)+1-1}{h}=\lim_{h\to 0,h>0}\frac{-h-h^2}{h}=\lim_{h\to 0,h>0}(-1-h)=-1.$$

Tenemos, pues, que $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$, y por lo tanto $f'(1)$ existe y vale -1. Así, la función $f(x)$ dada es derivable en $x=1$ y su derivada es $f'(1)=-1$. Observe el comportamiento de la gráfica de esta función en $x=1$ (figura 4.4.2).

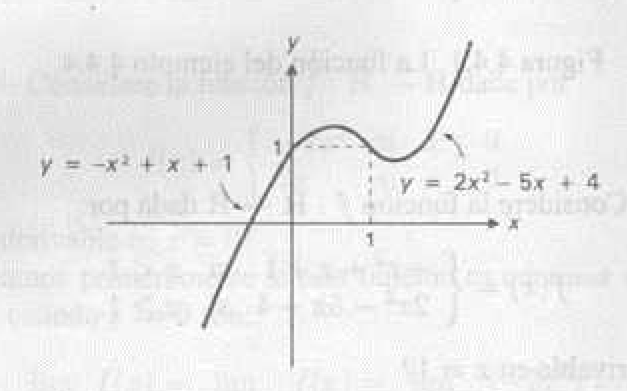


Figura 4.4.2. La función del ejemplo 4.4.5.

★

EJEMPLO 4.4.6. Considere la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\begin{cases} x^3-1 & \text{si } x<-1\\ 2x+1 & \text{si } -1\le x\le 1\\ x^2-2x+4 & \text{si } x>1.\end{cases}$$

¿Es esta función derivable en $x=-1$? ¿Es derivable en $x=1$?

SOLUCIÓN. Consideremos primeramente el punto de abscisa $x=-1$. Para ver si la función es continua en este punto, tendremos que ver si $\lim_{x\to -1}f(x)=f(-1)$, como en los ejercicios anteriores. Una manera rápida de enterarse de la validez de esta igualdad (como se llegó a comentar en el capítulo 3) es, simplemente, ver si la curva $y=x^3-1$ engancha bien con la curva $y=2x+1$ en $x=-1$. La imagen de $y=x^3-1$ en $x=-1$ es $(-1)^3-1=-2$ y la imagen de $y=2x+1$ en $x=-1$ es $2(-1)+1=-1$. Así pues, mientras la curva

$y = x^3 - 1$ termina en el punto $(-1, -2)$, la curva $y = 2x + 1$ empieza en el punto $(-1, -1)$. Con esto concluimos que la función dada no es continua en $x = -1$, y por lo tanto, que no puede ser derivable en este punto.

Vayamos entonces con el punto $x = 1$. La curva $y = 2x + 1$ termina en $x = 1$ a una altura de $y = 2(1) + 1 = 3$, mientras que la curva $y = x^2 - 2x + 4$ empieza en $x = 1$ a una altura de $y = (1)^2 - 2(1) + 4 = 3$. Así, el punto $(1, 3)$ es un punto común en donde termina $y = 2x + 1$ y donde empieza $y = x^2 - 2x + 4$. Entonces la función dada es continua en $x = 1$. Veamos si es derivable en ese punto. Para ver si existe el límite $f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ debemos analizar los límites unilaterales correspondientes. Usaremos que $f(1) = 2(1) + 1 = 3$. Se tiene:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0, h>0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0, h>0} \frac{(1+h)^2 - 2(1+h) + 4 - 3}{h} = \lim_{h \to 0, h>0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \to 0, h>0} (h) = 0$$

y

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0, h<0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0, h>0} \frac{2(1+h) + 1 - 3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0, h>0} \frac{2h}{h} = \lim_{h \to 0, h>0} (2) = 2.$$

Como los límites unilaterales no son iguales, concluimos que la función dada no es derivable en $x = 1$. Observe la gráfica de esta función en $x = -1$ y en $x = 1$ (figura 4.4.3).

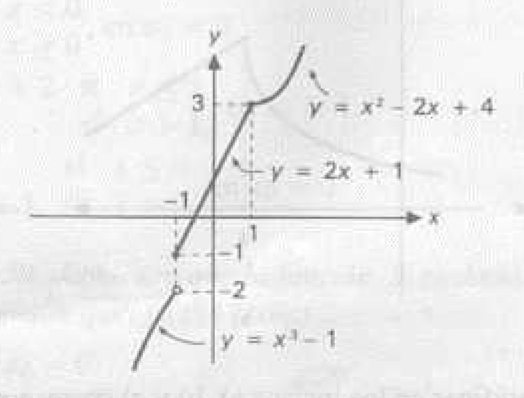


Figura 4.4.3. La función del ejemplo 4.4.6.

⋆

Las gráficas de las funciones de los últimos tres ejemplos, junto con la de la función valor absoluto, nos permiten descubrir un hecho interesante: los puntos donde la función no es derivable son (además de los puntos de discontinuidad) aquellos que corresponden a *picos* (o *vértices*) en la gráfica de la función. De hecho, en estos picos no es posible trazar una

recta tangente a la gráfica. Así, mientras la continuidad de un función es una propiedad que está relacionada geométricamente con el hecho de que la gráfica de la función no se rompe, la derivabilidad está relacionada con un hecho geométrico de **suavidad** (ausencia de picos) en la gráfica de la función, de modo que sea posible que una recta (la recta tangente) "toque suavemente la curva" en el punto de tangencia.

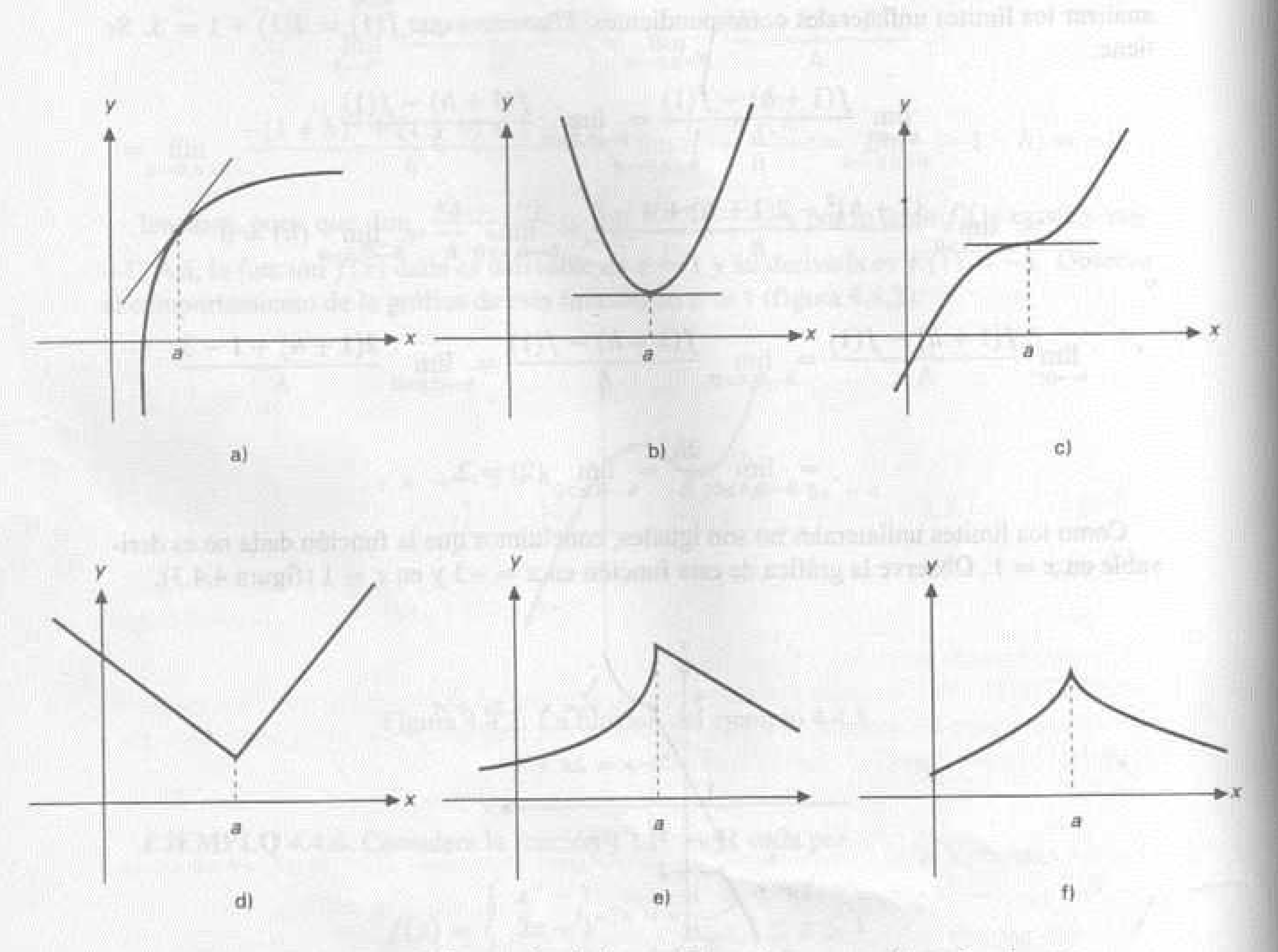


Figura 4.4.4. Las gráficas en los incisos a), b) y c) corresponden a funciones derivables en $x = a$. Las gráficas en los incisos d), e) y f) corresponden a funciones no derivables en $x = a$.

EJERCICIOS (4.4)

En los ejercicios 1 al 15, demuestre que la función $f(x)$ dada no es derivable en el punto x_0 indicado (es decir, demuestre que $f'(x_0)$ no existe).

1. $f(x) = |x-3|$, en $x_0 = 3$.
2. $f(x) = |3x-1|$, en $x_0 = \frac{1}{3}$.
3. $f(x) = |x^2-1|$, en $x_0 = 1$.
4. $f(x) = |x^2-1|$, en $x_0 = -1$.
5. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$, en $x_0 = 1$.
6. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, en $x_0 = 0$.
7. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 1 + x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, en $x_0 = 0$.
8. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, en $x_0 = 0$.
9. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ -x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, en $x_0 = 0$.
10. $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \leq 1 \\ 4 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$, en $x_0 = 1$.
11. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+3x^2-4}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$, en $x_0 = 1$.
12. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ -1 - x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$, en $x_0 = 0$.
13. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, en $x_0 = 0$.
14. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ 4x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, en $x_0 = 1$.
15. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+1} & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$, en $x_0 = 0$.

En los ejercicios 16 al 30, demuestre que la función $f(x)$ dada es derivable en el punto x_0 indicado (es decir, demuestre que $f'(x_0)$ existe).

16. $f(x) = |x-3|$, en $x_0 = 0$.
17. $f(x) = |x^2-1|$, en $x_0 = 2$.
18. $f(x) = |x^2-1|$, en $x_0 = 0$.
19. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$, en $x_0 = 0$.
20. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$, en $x_0 = 1$.
21. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, en $x_0 = 0$.

22. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ -2x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, en $x_0 = 0$.

23. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, en $x_0 = 1$.

24. $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$, en $x_0 = 0$.

25. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$, en $x_0 = 0$.

26. $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ -4x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$, en $x_0 = 0$.

27. $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, en $x_0 = 0$.

28. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ 5x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, en $x_0 = 1$.

29. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+1} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$, en $x_0 = 0$.

30. $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2+2} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x^3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$, en $x_0 = 0$.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 4

EXAMEN TIPO (A)

1. Si $f(x) = \dfrac{1}{x-4}$, calcule $f'(1)$.

2. Si $f(x) = \dfrac{3x}{x+1}$, calcule $f'(0)$.

3. Si $f(x) = \sqrt{2x+4}$, calcule $f'(16)$.

4. Demuestre que la función $f(x) = \cos(x + \pi)$ es derivable para toda $x \in \mathbf{R}$.

5. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 3x^2$ en el punto de abscisa $x = 1$.

6. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 2x + 3$ en el punto de abscisa $x = x_0$.

7. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ en el punto de abscisa $x = 1$. (Sugerencia: use el resultado del ejemplo 4.3.1).

8. Un cuerpo se mueve sobre el eje x con una ley de movimiento $x = f(t) = 5t^3$, en donde x se da en metros y t en segundos. Encuentre la velocidad que lleva el cuerpo un segundo después de haber comenzado su movimiento.

9. Demuestre que la función $f(x) = |\operatorname{sgn} x|$ no es derivable en $x = 0$.

10. Demuestre que la función $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{si} \quad x < 1 \\ x^3+3 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$ es derivable en $x = 1$.

EXAMEN TIPO (B)

1. Si $f(x) = \dfrac{5}{x^2+4}$, calcule $f'(-3)$.

2. Si $f(x) = x \cos x$, calcule $f'(0)$.

3. Si $f(x) = x\sqrt{2x+4}$, calcule $f'(6)$.

4. Demuestre que la función $f(x) = \dfrac{1}{x^4+x^2+1}$ es derivable para toda $x \in \mathrm{R}$.

5. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 4\cos x$ en el punto de abscisa $x = 0$.

6. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función lineal $f(x) = mx+b$ en el punto de abscisa $x = x_0$.

7. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 3x^2+4$ que sea paralela a la recta $3x + y + 2 = 0$.

8. Un cuerpo se mueve sobre el eje x con una ley de movimiento:

$$x = f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si} \quad 0 \leq t < 5 \\ 10t & \text{si} \quad t \geq 5 \end{cases},$$

en donde x se mide en metros y t en segundos. Encuentre la velocidad que lleva el cuerpo cinco segundos después de haber comenzado su movimiento.

9. Demuestre que la función $f(x) = |\operatorname{sen} x|$ no es derivable en $x = 0$.

10. Demuestre que la función $f(x) = \begin{cases} x^3+7x & \text{si} \quad x < 1 \\ 2x^5+6 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$ es derivable en $x = 1$.

NOTA HISTÓRICA: LAS FLUXIONES DE NEWTON.

En las notas históricas de los capítulos 1 y 2, presentamos a Sir Isaac Newton y a G. W. Leibniz, respectivamente, como los dos principales protagonistas en el nacimiento de las ideas del Cálculo. En esta nota histórica nos asomaremos un poco más de cerca a ver cuáles fueron algunas de las ideas originales que manejó Newton en su concepción de lo que en este capítulo presentamos como "derivada de una función". Ciertamente la manera como Newton concibió la derivada está muy lejos de la correspondiente definición que dimos en este capítulo. La genialidad de Newton para capturar ese concepto no estriba en el hecho de que desde un principio lo haya entendido completamente y usado como tal. De hecho, durante mucho tiempo tal concepto fue oscuro para él (al igual que para Leibniz quien, en otro contexto, tenía entre manos la misma idea de derivada). Newton llegó al concepto de derivada, a la que él llamaba FLUXIÓN, pensando en términos de "velocidad instantánea" de un cuerpo en movimiento, tal y como lo vimos en la sección 2 del presente capítulo. Las dificultades por las que tuvo que pasar son aquéllas por las que pasaría cualquier mente normal al enfrentarse con este concepto (lo anormal en la mente de un genio como Newton es la manera en que penetra en los conceptos, sorteando todas ésas y muchas otras dificultades): en un instante dado, no hay ningún lapso de tiempo, y por lo tanto el cuerpo no recorre distancia alguna. Querer calcular la

velocidad del cuerpo en ese preciso instante nos conduciría inevitablemente a una expresión del tipo $\frac{0\,(\text{distancia})}{0\,(\text{tiempo})}$. Newton comienza entonces a pensar en términos de "cantidades infinitamente pequeñas" (llamadas por él "indivisibles últimos"): en un lapso de tiempo infinitamente pequeño dt después del instante en que queremos calcular la velocidad del cuerpo, éste recorre también una distancia infinitamente pequeña ds. Entonces la velocidad en el instante dado es $\frac{ds}{dt}$. Estas ideas de tiempos y distancias "infinitamente pequeños" no resultaron claras para nadie, incluido el mismo Newton quien, en 1676, en su trabajo *Cuadratura de curvas*, declara haber abandonado tal punto de vista para el estudio de sus fluxiones. En este trabajo, Newton dice: "Las fluxiones son, con toda la aproximación que se desee, como los incrementos de los fluentes [las variables] generados en tiempos iguales y tan pequeños como sea posible, y, hablando con precisión, las fluxiones están en el origen de los nacientes incrementos... ." En su trabajo *Philosophiae naturalis principia mathematica* (*Principios matemáticos de filosofía natural*; con el nombre de "filosofía natural" se entendía todo el estudio de las ciencias), presentado en 1686 a la Real Sociedad, y considerado como uno de los más impresionantes e importantes frutos de la mente humana de todos los tiempos, Newton recurre a las "cantidades divisibles evanescentes" para reexplicar su concepto de fluxión. Tales cantidades tenían la característica de que podían disminuir sin cesar. En su *Principia* Newton escribe: "Las razones últimas, en las cuales las cantidades desaparecen, no son, estrictamente hablando, razones de cantidades últimas, sino límites a los que las razones de esas cantidades, decrecientes sin límite, se aproximan, y que, aunque puedan estar más cerca que cualquier diferencia dada, no pueden ser sobrepasados ni alcanzados antes de que las cantidades hayan disminuido indefinidamente." Con esta manera de ver las cosas, Newton ya vislumbra la derivada como un límite (palabra que es incluso mencionada en el párrafo). Como los resultados físicos a los que se llegaban usando los métodos de Newton, en cierto sentido avalaban la eficacia de esta nueva herramienta matemática, ya no hubo una preocupación explícita por seguir afinando estos conceptos para dejarlos bien establecidos desde el punto de vista matemático.

No es nuestra intención que en esta nota histórica trate de entender el concepto de derivada directamente de las palabras de uno de sus creadores. Esto es, de hecho, muy difícil hasta para los especialistas. Queremos solamente resaltar que lo que ahora se estudia como Cálculo Diferencial e Integral ha pasado por muchas etapas de maduración de ideas, de formalización, de pruebas de eficacia, de cuestionamientos severos y, más recientemente, de nuevos planteamientos didácticos que persiguen que todos los que estudien esta parte de la Matemática (en donde usted está incluido) lleguen a adquirir esta poderosa herramienta para que puedan entender muchos de los aspectos fundamentales del mundo que nos rodea.



CAPÍTULO 5
DERIVADAS DE FUNCIONES SIMPLES

"Por eso podemos decir que ahora la puerta está abierta, por primera vez, a un nuevo método repleto de resultados nuevos y maravillosos, los cuales, en los tiempos futuros, captarán la atención de otras mentes."

Galileo Galilei

En el capítulo anterior se estudió el concepto de derivada de una función y la relación de éste con la propiedad de continuidad de la función (recuerde: derivabilidad $\Rightarrow$ continuidad). Vimos que el concepto de derivabilidad es esencialmente el que nos resuelve el problema geométrico de trazar tangentes a gráficas de funciones y de calcular velocidades instantáneas de cuerpos en movimiento. De alguna manera entonces el capítulo 4 nos dejó como moraleja que derivada es un concepto con el cual podemos resolver problemas geométricos y físicos. Estos hechos los aprovecharemos en capítulos posteriores (cuando estudiemos las aplicaciones geométricas y físicas de la derivada, en los capítulos 7 al 10), pero en este momento se nos presenta un problema de carácter práctico: en todo el capítulo anterior cuando queríamos calcular la derivada de una función $y = f(x)$, teníamos que calcular siempre el límite

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

que la definía. Supongamos que en algún problema debemos calcular la derivada de la función $f(x) = \operatorname{sen}^3(3x^2 + 8x + 5)$. Tendríamos que resolver el límite

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}^3[3(x+h)^2 + 8(x+h) + 5] - \operatorname{sen}^3(3x^2 + 8x + 5)}{h}, \end{aligned}$$

el cual no se antoja nada fácil resolver. De hecho no es fácil resolverlo. Entonces, lo que haremos en este capítulo y en el siguiente será desarrollar herramientas que nos permitan obtener derivadas de funciones como la anterior (y mucho más complicadas, si queremos), sin recurrir a la definición de derivada. En este capítulo empezaremos por considerar las reglas básicas para derivar una función, así como algunas de las fórmulas de derivación de funciones

simples y en el capítulo próximo estudiaremos este mismo asunto pero con funciones más complicadas (por ejemplo, funciones compuestas, funciones inversas, funciones implícitas, etcétera).

Así pues, en este capítulo estableceremos algunas "fórmulas de derivación", con el objetivo de *desarrollar habilidades operativas que nos permitan calcular derivadas de funciones de una manera eficiente.*

5.1 TEOREMAS BÁSICOS DE DERIVACIÓN

Supongamos que queremos calcular la derivada de la función constante $f(x) = 3$. Ésta es:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3-3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} (0) = 0.$$

En algún problema posterior, podríamos requerir el cálculo de la derivada de la función constante $f(x) = 9$. Las operaciones que haríamos serían:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{9-9}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} (0) = 0.$$

Y así, cada vez que se nos presente el problema de calcular la derivada de una función constante, deberíamos repetir operaciones como las anteriores, las cuales, no lo podrá negar, son muy parecidas entre sí. ¿No valdría la pena decir *en general* cuál es la derivada de una función constante cualquiera? En los dos ejemplos anteriores el resultado fue cero, pero, ¿ocurre esto con cualquier función constante? En la Matemática se suelen hacer afirmaciones de carácter general que se demuestran (este tipo de afirmaciones son llamadas *teoremas*). Esto no se hace con el objeto de oscurecer la teoría y volverla comprensible solamente para "los inteligentes". Al contrario, acontece que el quehacer matemático busca la mayor eficiencia posible (el mayor número de resultados con la menor cantidad de trabajo). Dice el matemático inglés Ian Stewart, en su libro *Conceptos de matemática moderna* (Alianza Universidad, Madrid, 1975), que "Los matemáticos son, en el fondo, criaturas perezosas", pues siempre tratan de decir *todo* lo que se pueda decir (sobre algún hecho matemático particular) incluyéndolo en una afirmación de carácter general (un teorema). Por ejemplo, hay un teorema (el primero que veremos en esta sección) que dice que *la derivada de cualquier función constante es igual a cero*. Con él entonces no tendremos que hacer el cálculo del límite que define a la derivada cuando se nos presente el problema de obtener la derivada de una función constante: el teorema correspondiente nos dirá que el resultado que se obtiene siempre es igual a cero.

Los contenidos de los teoremas que ahora empezaremos a establecer (y a justificar su validez) se pueden pensar como "fórmulas" para obtener derivadas de una función. Al emplear todas estas fórmulas que desarrollaremos en este capítulo y en el siguiente, podremos calcular fácilmente (sin recurrir al cálculo del límite que define a la derivada) las derivadas de muchas funciones.

5.1.1 DERIVADA DE UNA FUNCIÓN CONSTANTE

El teorema que nos dice cómo es la derivada de una función constante es:

TEOREMA 5.1.1. *La derivada de una función constante es igual a cero. Es decir, si $f(x) = c$, entonces:*

$$f'(x) = (c)' = 0.$$

En efecto, si $f(x) = c$, tenemos que:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} (0) = 0.$$

Desde el punto de vista geométrico, recordemos que la derivada de una función en un punto de su dominio nos da la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto. Una función constante tiene por gráfica una recta horizontal. Acabamos de hacer los cálculos que nos muestran que la recta tangente a la gráfica de $f(x) = c$ (la recta horizontal) tiene pendiente cero. Pero la recta misma $f(x) = c$ tiene en todos sus puntos pendiente cero. Llegamos a la conclusión de que la recta tangente a la gráfica de $f(x) = c$ (la recta $y = c$)… *¡es ella misma!* De este modo, cuando recordemos que la derivada de una función constante es igual a cero, podremos hacer referencia a la gráfica de tal función, que es una recta horizontal, y pensar que como su recta tangente es ella misma, la pendiente de esa recta es igual a cero.

Por ejemplo entonces, $(3)' = 0$, $(\pi^2)' = 0$, $\frac{d}{dx}(321.23) = 0$, etcétera.

5.1.2 DERIVADA DE UNA SUMA DE FUNCIONES

TEOREMA 5.1.2. *Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables, entonces la función suma $(f+g)(x)$ es derivable y su derivada es igual a la suma de las derivadas de cada una de las funciones. Es decir:*

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

En efecto, al ser $f(x)$ y $g(x)$ funciones derivables, los límites:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{y} \quad g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

existen. La derivada de la función suma $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ es, según la definición correspondiente:

$$(f+g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x).$$

(En donde aplicamos el teorema sobre límites visto en el capítulo 2: el límite de una suma es igual a la suma de los límites, suponiendo que éstos existan.)

El resultado anterior se puede generalizar de una manera natural al caso de una suma de k funciones derivables: si $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ son k funciones derivables, entonces, la función suma $(f_1+f_2+\ldots+f_k)(x)$ es derivable y su derivada es igual a la suma de las derivadas de las k funciones que se están sumando. Es decir:

$$(f_1+f_2+\ldots+f_k)'(x)=f_1'(x)+f_2'(x)+\ldots+f_k'(x).$$

En los siguientes ejemplos usaremos la regla de las potencias vista en el capítulo anterior: la derivada de la función $f(x)=x^n$ en donde n es un número real, es $f'(x)=nx^{n-1}$. Algunas potencias concretas, como $n=1$, $n=\frac{1}{2}$ y $n=-1$, suelen aparecer mucho en los ejercicios que resolveremos. Es conveniente entonces recordar la forma que toma esta regla de las potencias en estos casos particulares:

- Para el caso $n=1$, tenemos que la derivada de la función identidad $f(x)=x$ es igual a 1, pues, $f'(x)=(x)'=1x^{1-1}=1x^0=1(1)=1$.
- Para el caso $n=\frac{1}{2}$, tenemos que la derivada de la función $f(x)=\sqrt{x}$ es $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, pues, $f'(x)=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
- Para el caso $n=-1$, tenemos que la derivada de la función $f(x)=\frac{1}{x}$ es $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$, pues, $f'(x)=(x^{-1})'=(-1)x^{-1-1}=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$.

Resumimos estos tres casos particulares en el siguiente esquema:

$$\boxed{(x^n)'=nx^{n-1}}$$

$n=1$	$n=\frac{1}{2}$	$n=-1$
$\boxed{(x)'=1}$	$\boxed{(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$	$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}}$

EJEMPLO 5.1.1. Calcular la derivada de la función $f(x) = x^3 + 4$.
SOLUCIÓN. Usando los dos teoremas anteriores, se tiene:

$$f'(x) = (x^3 + 4)' = (x^3)' + (4)' = 3x^2 + 0 = 3x^2.$$

★

EJEMPLO 5.1.2. Calcular la derivada de la función $f(x) = x^4 + x + \frac{1}{x} + 23$.
SOLUCIÓN. Si usamos los resultados previamente vistos (la derivada de una suma de cuatro funciones es la suma de las derivadas de cada función), tenemos:

$$f'(x) = \left(x^4 + x + \frac{1}{x} + 23\right)' = (x^4)' + (x)' + \left(\frac{1}{x}\right)' + (23)'$$

$$= 4x^3 + 1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right) + 0 = 4x^3 + 1 - \frac{1}{x^2}.$$

★

5.1.3 DERIVADA DE UN PRODUCTO DE FUNCIONES

Después de ver la sencillez del resultado establecido en el teorema 5.1.2: "La derivada de una suma de funciones es igual a la suma de derivadas de cada una de las funciones", ¿qué podríamos esperar del comportamiento de la derivada de un producto de funciones? Si quisiéramos tener la teoría más sencilla posible, quizás nos gustaría un comportamiento similar al de la suma. Es decir, nos gustaría que "La derivada de un producto de funciones fuera igual al producto de derivadas de cada una de las funciones". Esto es, pues, lo que nos gustaría que pasara. Pero, ¡para fortuna nuestra! ... este resultado es falso. La ciencia matemática muchas veces nos premia con resultados de inmensa sencillez y hermosura, pero los caminos de esta ciencia nos muestran también que hay ocasiones en que algún resultado no es como lo esperamos, pero que éste debe ser así para que la teoría finalmente funcione y trabaje para lo que está hecha.
El resultado correspondiente a la derivada de un producto de funciones se establece en el siguiente teorema.

TEOREMA 5.1.3. *Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables, entonces la función producto $(fg)(x)$ es derivable y su derivada es igual a la primera función multiplicada por la derivada de la segunda función más la segunda función multiplicada por la derivada de la primera función. Es decir:*

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

En efecto, la definición de derivada de la función $(fg)(x) = f(x)g(x)$ nos dice que:

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}.$$

Sumamos y restamos $f(x+h)g(x)$ en el numerador del cociente en el último límite para obtener:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[f(x+h)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right]$$

$$= \left[\left(\lim_{h\to 0} f(x+h) \right) \left(\lim_{h\to 0} \tfrac{g(x+h)-g(x)}{h} \right) + \left(\lim_{h\to 0} g(x) \right) \left(\lim_{h\to 0} \tfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \right) \right]. \qquad \text{(A)}$$

Lo que hemos hecho en estos últimos cuatro pasos es (después del truco de sumar y restar $f(x+h)g(x)$), reacomodar los términos y usar los teoremas de límites de sumas y productos vistos en el capítulo 2. De los cuatro límites que quedaron, hay dos que identificamos de inmediato, y que sabemos que existen, pues estamos suponiendo que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son derivables. Estos límites son precisamente las derivadas de estas funciones:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{y} \quad g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Por otra parte, el límite $\lim_{h\to 0} g(x)$ puede verse como un límite de una función constante, pues en él estamos calculando el límite cuando la variable h tiende a cero, en una función $g(x)$ que no depende de h. Así que $\lim_{h\to 0} g(x) = g(x)$. Por último, el valor del límite $\lim_{h\to 0} f(x+h)$ sí requiere de una explicación un poco más detallada. Estamos suponiendo que la función $f(x)$ es derivable (en un punto arbitrario de su dominio). En el capítulo anterior vimos que este hecho implica la continuidad de la función, es decir que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, en donde a es cualquier punto del dominio de la función. Si en esta última expresión hacemos $h = x - a$, tenemos que si $x \to a$, entonces $h \to 0$, de modo que la definición de continuidad se puede ver como $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$, o bien, escribiendo x en lugar de a, se puede ver como $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$, que es el límite procurado. En resumen, la expresión (A), que es la derivada $(fg)'(x)$, queda como:

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x),$$

como se afirma en el teorema 5.1.3.

EJEMPLO 5.1.3. Obtener la derivada de la función $f(x) = (x^3+x^2+x-2)(x^4+x^3+12)$.

SOLUCIÓN. La función dada es el producto de las funciones $\varphi(x) = x^3 + x^2 + x - 2$ y $\psi(x) = x^4 + x^3 + 12$. Al aplicar el resultado del teorema 5.1.3, tenemos que:

$$f'(x) = (x^3 + x^2 + x - 2)(x^4 + x^3 + 12)' + (x^4 + x^3 + 12)(x^3 + x^2 + x - 2)'$$

$$= (x^3 + x^2 + x - 2)(4x^3 + 3x^2) + (x^4 + x^3 + 12)(3x^2 + 2x + 1).$$

★

El teorema 5.1.3 tiene el siguiente importante corolario:

COROLARIO. *Sea $f(x)$ una función derivable y c una constante. Entonces el producto $cf(x)$ de la constante c por la función $f(x)$ es derivable y su derivada es igual al producto de la constante c por la derivada de la función. Es decir, se tiene:*

$$(cf)'(x) = cf'(x).$$

En efecto, aplicando el resultado del teorema 5.1.3, tenemos que:

$$(cf)'(x) = (c)f'(x) + f(x)(c)' = cf'(x) + f(x)(0) = cf'(x) + 0 = cf'(x).$$

Así, por ejemplo, si k es una constante, la derivada de la función $f(x) = kx^n$ es:

$$(kx^n)' = k(x^n)' = k(nx^{n-1}) = knx^{n-1},$$

algunos casos concretos de esta situación son: $(3x^4)' = (3)(4)x^3 = 12x^3$, $(8x^7)' = (8)(7)x^6 = 56x^6$, $(-6x^2)' = -12x$, $(13x^3)' = 39x^2$, etcétera.

EJEMPLO 5.1.4. Obtener la derivada de la función $f(x) = (2x^2 + 7x - 10)(x^4 - 4x^2 + 5x + 1)$.

SOLUCIÓN. La función dada es el producto de las funciones $\varphi(x) = 2x^2 + 7x - 10$ y $\psi(x) = 5x^4 - 4x^2 + 5x + 1$. Una alternativa para obtener la derivada de esta función es aplicar el resultado del teorema sobre la derivada de un producto de funciones:

$$f'(x)$$

$$= (2x^2 + 7x - 10)(5x^4 - 4x^2 + 5x + 1)' + (5x^4 - 4x^2 + 5x + 1)(2x^2 + 7x - 10)'$$

$$= (2x^2 + 7x - 10)(20x^3 - 8x + 5) + (5x^4 - 4x^2 + 5x + 1)(4x + 7). \qquad \text{(B)}$$

Otra alternativa es realizar primeramente las operaciones del producto expresado en la fórmula que define a $f(x)$, y luego tomar la derivada en la expresión "expandida" de esta función. Las operaciones dan como resultado:

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x^2+7x-10)(5x^4-4x^2+5x+1) \\ &= 10x^6+35x^5-58x^4-18x^3+77x^2-43x-10 \end{aligned}$$

cuya derivada es:

$$f'(x)=60x^5+175x^4-232x^3-54x^2+154x-43.$$

Este resultado es el mismo que el obtenido en (B). En efecto, basta que realice las operaciones (los productos) indicados en (B) para obtener la expresión anterior.

⋆

Una extensión natural del teorema 5.1.3 es cuando consideramos un producto de k funciones derivables. Comencemos por considerar el caso $k=3$. Obtengamos entonces la derivada del producto $F(x)=(f_1f_2f_3)(x)$ en donde $f_1(x)$, $f_2(x)$ y $f_3(x)$ son funciones derivables. Asociamos primeramente las funciones f_1 y f_2, para considerar a la función $F(x)$ como el producto de $(f_1f_2)(x)$ por la función $f_3(x)$, y obtener entonces su derivada con el teorema 5.1.3. Se tiene:

$$(f_1f_2f_3)'(x)=[(f_1(x)f_2(x))\,(f_3(x))]'$$

$$=(f_1(x)f_2(x))\,f_3'(x)+f_3(x)\,(f_1(x)f_2(x))'$$

$$=f_1(x)f_2(x)f_3'(x)+f_3(x)\,(f_1(x)f_2'(x)+f_2(x)f_1'(x))$$

$$=f_1(x)f_2(x)f_3'(x)+f_1(x)f_2'(x)f_3(x)+f_1'(x)f_2(x)f_3(x).$$

Entonces observamos que la derivada de un producto de tres funciones derivables está formado por tres sumandos. En cada uno de los sumandos aparecen las tres funciones, pero sólo una de ellas derivada cada vez. Éste es el mismo esquema que en el caso de la derivada del producto de dos funciones, tal como fue presentado en el teorema 5.1.3: en tal caso la derivada está formada por dos sumandos, en cada uno de los cuales aparecían las dos funciones en el producto, sólo una de ellas derivada cada vez.

Si vamos ahora al caso de la derivada de un producto de cuatro funciones derivables, no es difícil aceptar que el resultado es:

$$(f_1f_2f_3f_4)'(x)=f_1(x)f_2(x)f_3(x)f_4'(x)+f_1(x)f_2(x)f_3'(x)f_4(x)+$$

$$+f_1(x)f_2'(x)f_3(x)f_4(x)+f_1'(x)f_2(x)f_3(x)f_4(x),$$

y que el caso general de la derivada de un producto de k funciones derivables se ve como:

$$\begin{aligned}(f_1 f_2 \dots f_k)'(x) = \quad & f_1(x)f_2(x)\dots f_{k-1}(x)f_k'(x) \quad + \\ + \quad & f_1(x)f_2(x)\dots f_{k-1}'(x)f_k(x) \quad + \\ & \dots \\ + \quad & f_1'(x)f_2(x)\dots f_k(x).\end{aligned}$$

EJEMPLO 5.1.5. Obtener la derivada de la función $f(x) = (x^2+6)(4x-5)(x^3+8)$.

SOLUCIÓN. Podríamos realizar el producto de los tres binomios que aparecen en la expresión que define a $f(x)$ para luego derivar término a término la expresión resultante (todos los términos son del tipo ax^m). Sin embargo, haremos la derivada usando la generalización del teorema 5.1.3 que hemos estudiado anteriormente. Se tiene:

$$\begin{aligned}f'(x) &= (x^2+6)(4x-5)(x^3+8)' + (x^2+6)(4x-5)'(x^3+8) + (x^2+6)'(4x-5)(x^3+8) \\ &= (x^2+6)(4x-5)(3x^2) + (x^2+6)(4)(x^3+8) + (2x)(4x-5)(x^3+8).\end{aligned}$$

⋆

EJEMPLO 5.1.6. Calcular la derivada de la función $f(x) = 12x\sqrt{x}\,(1+3x^2)$.

SOLUCIÓN. Se puede ver esta función como un producto de las tres funciones $y = 12x$, $y = \sqrt{x}$ y $y = 1+3x^2$, en cuyo caso la derivada quedaría como:

$$f'(x) = 12x\sqrt{x}\,(1+3x^2)' + (12x)\left(\sqrt{x}\right)'(1+3x^2) + (12x)'\sqrt{x}\,(1+3x^2)$$

$$= 12x\sqrt{x}(6x) + (12x)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(1+3x^2) + (12)\sqrt{x}(1+3x^2)$$

$$= 72x^2\sqrt{x} + 6\sqrt{x}(1+3x^2) + 12\sqrt{x}(1+3x^2) \overset{\text{efectuando los productos}}{=\!\!\longrightarrow}$$

$$= 72x^{\frac{5}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} + 18x^{\frac{5}{2}} + 12x^{\frac{1}{2}} + 36x^{\frac{5}{2}} = 18x^{\frac{1}{2}} + 126x^{\frac{5}{2}}.$$

O bien, podemos hacer primeramente los productos indicados en la expresión de $f(x)$ y luego derivar cada sumando. La simplificación de $f(x)$ se ve como:

$$f(x) = 12x\sqrt{x}\,(1+3x^2) = 12(x)(x^{\frac{1}{2}})(1+3x^2) = 12x^{\frac{3}{2}}(1+3x^2) = 12x^{\frac{3}{2}} + 36x^{\frac{7}{2}},$$

cuya derivada es:

$$f'(x) = 12\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}-1} + 36\left(\frac{7}{2}\right)x^{\frac{7}{2}-1} = 18x^{\frac{1}{2}} + 126x^{\frac{5}{2}}.$$

$12x\sqrt{x}(1+3x^2)$

⋆

5.1.4 DERIVADA DE UN COCIENTE DE FUNCIONES

TEOREMA 5.1.4. *Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables, entonces la función cociente $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ es derivable (en cualquier punto en el que $g(x) \neq 0$) y su derivada es igual a un cociente: el denominador formado por la función del denominador $g(x)$ elevada al cuadrado, y el numerador formado por una resta: el denominador $g(x)$ multiplicado por la derivada del numerador $f(x)$ menos el numerador $f(x)$ multiplicado por la derivada del denominador $g(x)$. Es decir:*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

En efecto, según la definición de derivada aplicada a la función $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ tenemos que:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x+h) - \left(\frac{f}{g}\right)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)f(x+h) - f(x)g(x+h)}{hg(x)g(x+h)} \underset{\longrightarrow}{=} {}^{\text{sumando y restando } g(x)f(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(g(x)f(x+h) - g(x)f(x)) - (f(x)g(x+h) - f(x)g(x))}{hg(x)g(x+h)} \underset{\text{teoremas sobre límites}}{\overset{\text{agrupando y usando los}}{=}}$$

$$= \frac{\left(\lim_{h\to 0} g(x)\right)\left(\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) - \left(\lim_{h\to 0} f(x)\right)\left(\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)}{\left(\lim_{h\to 0} g(x)\right)\left(\lim_{h\to 0} g(x+h)\right)}$$

$$= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Así hemos probado la fórmula de la derivada de un cociente de funciones:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Veamos un par de ejemplos.

EJEMPLO 5.1.7. Obtener la derivada de la función $F(x) = \frac{2x^2+13}{6x^3-8x-1}$.
SOLUCIÓN. Según el teorema 5.1.4 tenemos:

$$F'(x) = \frac{(6x^3 - 8x - 1)(2x^2 + 13)' - (2x^2 + 13)(6x^3 - 8x - 1)'}{(6x^3 - 8x - 1)^2}$$

$$= \frac{(6x^3 - 8x - 1)(4x) - (2x^2 + 13)(18x^2 - 8)}{(6x^3 - 8x - 1)^2}.$$

EJEMPLO 5.1.8. Obtener la derivada de la función $f(x) = \frac{2+5\sqrt{x}}{10+\sqrt{x}}$.
SOLUCIÓN. Usamos la regla de la derivada de un cociente de funciones:

$$f'(x) = \frac{(10 + \sqrt{x})(2 + 5\sqrt{x})' - (2 + 5\sqrt{x})(10 + \sqrt{x})'}{(10 + \sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{(10 + \sqrt{x})(5)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) - (2 + 5\sqrt{x})\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(10 + \sqrt{x})^2} = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(5(10 + \sqrt{x}) - (2 + 5\sqrt{x}))}{(10 + \sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{50 + 5\sqrt{x} - 2 - 5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(10 + \sqrt{x})^2} = \frac{24}{\sqrt{x}(10 + \sqrt{x})^2}.$$

Un caso particular del teorema 5.1.4 se presenta cuando la función del numerador en el cociente es una constante. Más concretamente, se tiene el siguiente corolario:

COROLARIO. *Sea $f(x)$ una función derivable. La función $F(x) = \frac{c}{f(x)}$, en donde c es una constante, es derivable (en todo punto donde no se anule $f(x)$) y su derivada es igual al negativo de la constante c dividida por la función $f(x)$ elevada al cuadrado (todo) multiplicado por la derivada de la función $f(x)$. Es decir*

$$\left(\frac{c}{f(x)}\right)' = -\frac{c}{f^2(x)} f'(x).$$

En efecto, según el teorema 5.1.4 tenemos que:

$$\left(\frac{c}{f(x)}\right)' = \frac{f(x)(c)' - cf'(x)}{f^2(x)} = \frac{f(x)(0) - cf'(x)}{f^2(x)} = -\frac{c}{f^2(x)} f'(x).$$

EJEMPLO 5.1.9. Obtener la derivada de la función $f(x) = \frac{4}{x^2+3}$.
SOLUCIÓN. Según el corolario anterior tenemos que:

$$f'(x) = -\frac{4}{(x^2+3)^2}(x^2+3)' = -\frac{4}{(x^2+1)^2}(2x) = -\frac{8x}{(x^2+1)^2},$$

el cual es el mismo resultado al que llegamos en el ejemplo 4.3.1 del capítulo anterior, usando directamente la definición de derivada.

★

Si en el cociente de funciones, la función del denominador es una constante, podemos obtener la derivada del cociente como un caso particular del teorema 5.1.4, o bien, como un caso particular del corolario del teorema 5.1.3, pues:

$$\left(\frac{f(x)}{c}\right)' \stackrel{\text{teo. 5.1.4}}{=\!=\!=} \frac{cf'(x) - f(x)(c)'}{c^2} = \frac{cf'(x) - f(x)(0)}{c^2} = \frac{cf'(x)}{c^2} = \frac{f'(x)}{c},$$

o bien,

$$\left(\frac{f(x)}{c}\right)' = \left(\frac{1}{c}f(x)\right)' \stackrel{\text{cor. del teo. 5.1.3}}{=\!=\!=} \frac{1}{c}f'(x) = \frac{f'(x)}{c}.$$

Así que cuando tengamos que obtener la derivada de un cociente en el que el denominador es una constante, el resultado será simplemente la derivada del numerador dividida entre la constante en el cociente.

EJEMPLO 5.1.10. Obtener la derivada de la función $f(x) = \frac{x^3+15x^2-2x+5}{12}$.
SOLUCIÓN. Según la observación hecha previamente al ejemplo, tenemos que:

$$f'(x) = \frac{(x^3+15x^2-2x+5)'}{12} = \frac{3x^2+30x-2}{12}.$$

★

5.1.5 DERIVADA DE UNA FUNCIÓN ELEVADA A UNA POTENCIA

Sea $f(x)$ una función derivable. Consideremos la función $F(x) = f^2(x)$ (es decir, $F(x)$ es la función $f(x)$ elevada al cuadrado). Para obtener la derivada de $F(x)$ podemos proceder con el teorema 5.1.3, viendo a esta función como el producto de $f(x)$ por $f(x)$. Entonces:

$$F'(x) = (ff)'(x) = f(x)f'(x) + f(x)f'(x) = 2f(x)f'(x).$$

Es decir:

$$\left(f^2\right)'(x) = 2f(x)f'(x).$$

Considerando ahora la función $F(x) = f^3(x)$ podemos escribir ésta como $F(x) = f^2(x)f(x)$, de modo que su derivada, usando el mismo teorema 5.1.3 (y el resultado que acabamos de obtener de la derivada de $f^2(x)$) sería:

$$F'(x) = (f^2 f)'(x) = f^2(x)f'(x) + f(x)(f^2)'(x) = f^2(x)f'(x) + f(x)\left(2f(x)f'(x)\right)$$

$$= f^2(x)f'(x) + 2f^2(x)f'(x) = 3f^2(x)f'(x).$$

Es decir:

$$\left(f^3\right)'(x) = 3f^2(x)f'(x).$$

Un argumento inductivo (es decir, yendo de uno en uno en la potencia de $f(x)$) nos conduce al caso general: si n es un número natural cualquiera, la derivada de la función $F(x) = f^n(x)$ es:

$$\left(f^n\right)'(x) = nf^{n-1}(x)f'(x).$$

Más aún, suponga que n es un número entero negativo. Escribamos $n = -m$ en donde m es un número natural. Entonces $f^n(x) = f^{-m}(x) = \frac{1}{f^m(x)}$ y la derivada de esta función sería, usando el corolario del teorema 5.1.4 (la derivada de un cociente de una constante entre una función) nos quedaría:

$$(f^n)'(x) = \left(\frac{1}{f^m}\right)'(x) = -\frac{1}{(f^m(x))^2}(f^m)'(x).$$

Ahora bien, la derivada que quedó indicada es la derivada de la potencia $m-$ésima de la función $f(x)$ en donde *m es un número natural*. Vimos que en este caso se aplica la fórmula $(f^m)'(x) = mf^{m-1}(x)f'(x)$. Entonces la derivada de $f^n(x)$ nos queda como:

$$(f^n)'(x) = \left(\frac{1}{f^m}\right)'(x) = -\frac{1}{(f^m(x))^2}(f^m)'(x) = -\frac{1}{f^{2m}(x)}mf^{m-1}(x)f'(x)$$

$$= -mf^{m-1-2m}(x)f'(x) = (-m)f^{(-m)-1}(x)f'(x) = nf^{n-1}(x)f'(x).$$

Es decir, vale la misma fórmula anteriormente establecida para la derivada de la potencia de una función, en caso de que el exponente sea entero negativo (el caso $n = 0$ vale también de manera trivial, pues en este caso estaríamos derivando una función constante —la función constante uno—, y su derivada sería cero). Así pues, podemos concluir de este análisis que si $f(x)$ es una función derivable y n es un número entero cualquiera, entonces vale la fórmula:

$$\left(f^n\right)'(x) = nf^{n-1}(x)f'(x).$$

Observe la analogía que existe entre los dos primeros factores del segundo miembro y la derivada de x^n (que sabemos que es nx^{n-1}). El primer factor $nf^{n-1}(x)$ que aparece en la fórmula anterior parece ser la derivada de x^n con la x sustituida por $f(x)$, y el segundo factor es la derivada de la función $f(x)$. En realidad éste es un caso particular de uno de los principales resultados que vamos a estudiar en el próximo capítulo: la derivada de una composición de funciones. En efecto, podemos ver la función $F(x) = f^n(x)$ como la composición de la función $g(x) = x^n$ con la función $f(x)$. Es decir, $F(x) = g(f(x))$.

Veremos en el capítulo 6 que la derivada de esta composición es $F'(x) = g'(f(x))f'(x)$. Como $g'(x) = (x^n)' = nx^{n-1}$, tenemos que $g'(f(x)) = n(f(x))^{n-1} = nf^{n-1}(x)$, de donde $F'(x) = g'(f(x))f'(x) = nf^{n-1}(x)f'(x)$, que es la fórmula que acabamos de obtener como consecuencia del teorema sobre la derivada de un producto de funciones.

Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 5.1.11. Obtener la derivada de la función $F(x) = (4x^2+5)^3$.

SOLUCIÓN. Se trata de la función $f(x) = 4x^2+5$ elevada al cubo. Según lo que acabamos de ver, la derivada de $F(x)$ es:

$$F'(x) = 3(4x^2+5)^2(4x^2+5)' = 3(4x^2+5)^2(8x) = 24x(4x^2+5)^2.$$

Hubiéramos podido primeramente desarrollar el binomio al cubo que define a $F(x)$ y después calcular su derivada. El resultado, por supuesto, debe ser el mismo. En efecto:

$$\begin{aligned} F(x) &= (4x^2+5)^3 = (4x^2)^3 + 3(4x^2)^2(5) + 3(4x^2)(5)^2 + (5)^3 \\ &= 64x^6 + 240x^4 + 300x^2 + 125, \end{aligned}$$

cuya derivada es:

$$F'(x) = 384x^5 + 960x^3 + 600x = 24x(16x^4 + 40x^2 + 25) = 24x(4x^2+5)^2,$$

como habíamos obtenido anteriormente.

★

EJEMPLO 5.1.12. Obtener la derivada de la función $F(x) = \left(\frac{5x^2-7}{7x^4+9}\right)^{-6}$.

SOLUCIÓN. Se trata de la función $f(x) = \frac{5x^2-7}{7x^4+9}$ elevada a potencia -6. Entonces:

$$F'(x) = -6\left(\frac{5x^2-7}{7x^4+9}\right)^{-6-1}\left(\frac{5x^2-7}{7x^4+9}\right)' \overset{\text{teo. 5.1.4}}{\longrightarrow}$$

$$= -6\left(\frac{5x^2-7}{7x^4+9}\right)^{-7}\left(\frac{(7x^4+9)(5x^2-7)' - (5x^2-7)(7x^4+9)'}{(7x^4+9)^2}\right)$$

$$= -6\left(\frac{5x^2-7}{7x^4+9}\right)^{-7}\left(\frac{(7x^4+9)(10x) - (5x^2-7)(28x^3)}{(7x^4+9)^2}\right).$$

★

EJEMPLO 5.1.13. Obtener la derivada de la función $f(x) = \left(\frac{1+5x}{1+6\sqrt{x}}\right)^3$.

SOLUCIÓN. Al usar la fórmula de la derivada de una función elevada a una potencia (sección 5.1.5), obtenemos:

$$f'(x) = 3\left(\frac{1+5x}{1+6\sqrt{x}}\right)^2 \left(\frac{(1+6\sqrt{x})(1+5x)' - (1+5x)(1+6\sqrt{x})'}{(1+6\sqrt{x})^2}\right)$$

$$= 3\left(\frac{1+5x}{1+6\sqrt{x}}\right)^2 \left(\frac{(1+6\sqrt{x})\,(5) - (1+5x)(6)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(1+6\sqrt{x})^2}\right)$$

$$= 3\left(\frac{1+5x}{1+6\sqrt{x}}\right)^2 \left(\frac{5\sqrt{x}(1+6\sqrt{x}) - 3(1+5x)}{\sqrt{x}(1+6\sqrt{x})^2}\right)$$

$$= 3\left(\frac{1+5x}{1+6\sqrt{x}}\right)^2 \left(\frac{5\sqrt{x}+30x-3-15x}{\sqrt{x}(1+6\sqrt{x})^2}\right) = \frac{3(1+5x)^2(5\sqrt{x}+15x-3)}{\sqrt{x}(1+6\sqrt{x})^4}.$$

★

En resumen, las "fórmulas de derivación" que hemos visto hasta este momento (y que debemos tener bien presentes) son:

1. $(c)' = 0$
2. $(x^n)' = nx^{n-1} \begin{cases} (x)' = 1 & (n=1) \\ (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} & (n=\frac{1}{2}) \\ (\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2} & (n=-1) \end{cases}$
3. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
4. $(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$
5. $(cf)'(x) = cf'(x)$
6. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
7. $\left(\frac{c}{f}\right)'(x) = -\dfrac{c}{f^2(x)}f'(x)$
8. $\left(\frac{f}{c}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)}{c}$
9. $(f^n)'(x) = nf^{n-1}(x)f'(x)$

Las fórmulas 3 a la 9, con la notación de Leibniz para la derivada, en la cual la derivada de la función $y = f(x)$ se escribe como $\frac{dy}{dx}$ o $\frac{d}{dx}y$ (en lugar de la notación que hemos venido usando, y' o $f'(x)$), y escribiendo u y v en lugar de $f(x)$ y $g(x)$, respectivamente, toman el siguiente aspecto:

3. $\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$
4. $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$
5. $\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$
6. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$
7. $\frac{d}{dx}\left(\frac{c}{u}\right) = -\frac{c}{u^2}\frac{du}{dx}$
8. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{\frac{du}{dx}}{c}$
9. $\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$

EJERCICIOS (5.1)

Relacione las letras de los incisos de las funciones dadas a continuación, con el número de las derivadas de estas funciones. (Por ejemplo: a) →7.)

Funciones:

a) $f(x) = x$. **b)** $f(x) = 3x^4$. **c)** $f(x) = 3x + 2$.

d) $f(x) = 2x^5 + 7x^2$. **e)** $f(x) = \frac{5}{x}$. **f)** $f(x) = x + \sqrt{x}$.

g) $f(x) = \frac{2}{x^2+4}$. **h)** $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$. **i)** $f(x) = (x+3)(x+4)$.

j) $f(x) = (x^2+1)^{12}$. **k)** $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$. **l)** $f(x) = 23\pi^6$.

m) $f(x) = 9x + 234$. **n)** $f(x) = 3x + 8\sqrt{x}$. **o)** $f(x) = \frac{9}{x^4+1}$.

p) $f(x) = 23(x+1)$. **q)** $f(x) = 9 - 5\sqrt{x}$. **r)** $f(x) = \pi(x+\pi)$.

s) $f(x) = \frac{10}{x}$. **t)** $f(x) = 2(2x+3)$.

Derivadas:

1. $f'(x) = 10x^4 + 14x$. **2.** $f'(x) = 3$. **3.** $f'(x) = 9$.

4. $f'(x) = 23$. **5.** $f'(x) = 2x + 7$. **6.** $f'(x) = -\dfrac{5}{2\sqrt{x}}$.

7. $f'(x) = 1$. **8.** $f'(x) = -\dfrac{36x^3}{(x^4+1)^2}$. **9.** $f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$.

10. $f'(x) = \pi$. **11.** $f'(x) = -\dfrac{5}{x^2}$. **12.** $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

13. $f'(x) = 3 + \dfrac{4}{\sqrt{x}}$. **14.** $f'(x) = -\dfrac{10}{x^2}$. **15.** $f'(x) = 24x(x^2+1)$.

16. $f'(x) = -2\sqrt{x}$. **17.** $f'(x) = -\dfrac{4x}{(x^2+4)^2}$. **18.** $f'(x) = 4$.

19. $f'(x) = 12x^3$. **20.** $f'(x) = 0$.

Para cada una de las funciones $f(x)$ dadas en los ejercicios 21 al 80, calcule $f'(x)$.

21. $f(x) = x^2 + 3/x + 1$. **22.** $f(x) = \pi^2 + \pi^2 x + \pi^2 x^2$.

23. $f(x) = \pi + \pi x^{-1} + \pi x^{-2}$. **24.** $f(x) = \pi(\pi+1)x(x+1)$.

25. $f(x) = a^2x^2(a^2+x^2)$. **26.** $f(x) = \sqrt{\pi}x + \sqrt{\pi x}$.

27. $f(x) = \sqrt[3]{\pi}x + \sqrt[3]{\pi x}$. **28.** $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x + 1$.

29. $f(x) = (2x+1)^2$. **30.** $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$.

31. $f(x) = \dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^2}$. **32.** $f(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$.

33. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. **34.** $f(x) = (3x+1)(5x+4)$.

35. $f(x) = x(2x+7)(4x+9)$. **36.** $f(x) = x(x^2+1)(x^2+2)$.

37. $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x^2+2}$. **38.** $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$.

39. $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x+2}$. **40.** $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+2}$. **41.** $f(x) = \dfrac{3x^2+1}{2x^3+1}$.

42. $f(x) = (x^2 + 3x + 1)(x^2 + 2x + 7)$.

43. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2x + 7}$.

44. $f(x) = \dfrac{1 + \frac{2}{x}}{3 + \frac{4}{x}}$.

45. $f(x) = (x^{-1} + 3x^{-3})(2x^{-2} + 4x^{-4})$.

46. $f(x) = (x^{-1} + x^{-2})(x^{-3} + x^{-4})$.

47. $f(x) = 2x\sqrt{x} + \sqrt[3]{2x}$.

48. $f(x) = 4\sqrt{2x\sqrt{3x}}$.

49. $f(x) = 4x\sqrt{2x\sqrt[3]{3x}}$.

50. $f(x) = x^{0.1}(2 + x + x^{0.2})$.

51. $f(x) = \dfrac{3 + \sqrt{2x}}{4 + \sqrt{5x}}$.

52. $f(x) = \dfrac{3 + x\sqrt{2x}}{4 + x\sqrt{5x}}$.

53. $f(x) = \dfrac{(4 + \sqrt[3]{x})^2}{2\sqrt{x}}$.

54. $f(x) = x^2(x^2 + 2)(x^2 + 3)$.

55. $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2)(x^2 + 3)$.

56. $f(x) = \left(2x + \sqrt{3x}\right)\left(5x^2 + \sqrt{3\sqrt{x}}\right)$.

57. $f(x) = (2x^2 + 3x + 1)(x^2 - x + 2)(x^2 + 3x + 3)$.

58. $f(x) = \dfrac{2}{x^2}(3x + 2)(4x + 5)$.

59. $f(x) = \left(\dfrac{2}{x} + 3\right)\left(\dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{x} + 2\right)(x^2 + x + 1)$.

60. $f(x) = \dfrac{4 + \sqrt{x}}{3 + x + x^3}$.

61. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1} + \dfrac{x}{x + 2}$.

62. $f(x) = \dfrac{\pi\sqrt{\pi}}{x^2 + x + 1}$.

63. $f(x) = \sqrt{\dfrac{4}{(x^2 + x + 4)^2}}$.

64. $f(x) = (3x + 1)^2 + 4(3x + 1)^4$.

65. $f(x) = (3x + 1)^2(4x + 1)^4$.

66. $f(x) = (3x^2 + 1)^2(4x^2 + 1)^4$.

67. $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2)^2(x^2 + 3)^3$.

68. $f(x) = \left(\dfrac{1}{x + 1}\right)^3 + \left(\dfrac{x}{x + 2}\right)^{-3}$.

69. $f(x) = \left(\dfrac{2x + 3}{x^2 + 1}\right)^5$.

70. $f(x) = \left(\dfrac{2x + 3}{x^2 + 1}\right)^{-3}$.

71. $f(x) = \left(2 + \sqrt{2x}\right)^3$.

72. $f(x) = \sqrt{x}\left(2 + \sqrt{2x}\right)^{-2}$.

73. $f(x) = \dfrac{(x^2 + 3)^3}{(x^2 + 1)^2}$.

74. $f(x) = (x^2 + 3x + 2)^4 x^5$.

75. $f(x) = \left(\dfrac{x}{x^{\frac{1}{6}}\left(3x^{\frac{1}{2}} + 4x^{\frac{2}{5}} + 3\right)} \right)^3$.

76. $f(x) = \dfrac{(x^2+1)(x^2+2)^2}{(x^2+3)^3}$.

77. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{(x^2+3)^3(x^2+4)^4}$.

78. $f(x) = \dfrac{(x^2+1)(x^2+2)^2}{(x^2+3)^3(x^2+4)^4}$.

79. $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\left(2 + \dfrac{2}{x}\right)^2\left(3 + \dfrac{3}{x}\right)^3$.

80. $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^2\left(2 + \dfrac{1}{x^3}\right)^4\left(3 + \dfrac{1}{x^5}\right)^{-3}$.

En los ejercicios 81 al 95, suponga que $f(x)$ *y* $g(x)$ *son dos funciones derivables cuyas gráficas se cortan en los puntos* $(-2, 3)$ *y* $(3, 1)$. *Si* $f'(-2) = 0$, $f'(3) = 1$, $g'(-2) = -1$ *y* $g'(3) = 2$, *calcule en cada caso la derivada indicada.*

81. $(f + 2g)'(-2)$.

82. $(fg)'(3)$.

83. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(-2)$.

84. $(3f)'(3)$.

85. $\varphi'(3)$, en donde $\varphi(x) = xf(x)$.

86. $\varphi'(-2)$, en donde $\varphi(x) = xf(x)g(x)$.

87. $(4 + 3g)'(-2)$.

88. $\left(4 + \dfrac{1}{f}\right)'(3)$.

89. $\left(\dfrac{3g}{2f}\right)'(3)$.

90. $\varphi'(-2)$, en donde $\varphi(x) = \dfrac{xf(x)}{g(x)}$.

91. $\varphi'(-2)$, en donde $\varphi(x) = (x^2+1)\left(1 + \dfrac{1}{f(x)}\right)\left(1 + \dfrac{1}{g(x)}\right)$.

92. $\varphi'(3)$, en donde $\varphi(x) = \dfrac{(x^2+x+1)g(x)}{x + f(x)}$.

93. $(3f^2)'(-2)$.

94. $(2f^3g^2)(-2)$.

95. $\left(4(2f + 3g^2)^4\right)'(-2)$.

En los ejercicios 96 al 110, suponga que $f(x)$, $g(x)$ *y* $h(x)$ *son funciones derivables cuyas gráficas pasan por el punto* $(1, 1)$. *Si* $f'(1) = 0$, $g'(1) = 1$ *y* $h'(1) = 2$, *calcule en cada caso la derivada indicada.*

96. $(f + g + h)'(1)$.

97. $(3f + 2g - 6h)'(1)$.

98. $\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{g} + \frac{1}{h}\right)'(1)$.

99. $\left(\frac{f}{g+h}\right)'(1)$.

100. $\left(\frac{f+g}{f+h}\right)'(1)$. **101.** $(fgh)'(1)$.

102. $(f^2+g^3+h^4)'(1)$. **103.** $(f^2g^3h^4)'(1)$.

104. $\varphi'(1)$, en donde $\varphi(x) = xf(x)g(x)h(x)$.

105. $\varphi'(1)$, en donde $\varphi(x) = (x+1)(f(x)+1)(g(x)+1)(h(x)+1)$.

106. $\varphi'(1)$, en donde $\varphi(x) = (x+1)(f(x)+1)^2(g(x)+1)^3(h(x)+1)^4$.

107. $\varphi'(1)$, en donde $\varphi(x) = (4x+1)^4(3f(x)+1)^3(2g(x)+1)^2(h(x)+1)$.

108. $\varphi'(1)$, en donde $\varphi(x) = x(f(x)+x)(g(x)+x^2)(h(x)+x^3)$.

109. $\varphi'(1)$, en donde $\varphi(x) = \dfrac{f(x)g(x)}{(f(x)+1)(h(x)+1)}$.

110. $\varphi'(1)$, en donde $\varphi(x) = \dfrac{xf^2(x)g^3(x)}{(x+1)(f^2(x)+1)^2(h^3(x)+1)^3}$.

5.2 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

En esta sección veremos los teoremas que nos dicen que las funciones trigonométricas son derivables en todos los puntos de su dominio, y nos dan los resultados de las derivadas de cada una de ellas.

TEOREMA 5.2.1. *La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es derivable para toda $x \in \mathbb{R}$, y su derivada es:*

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x.$$

En efecto, la definición de derivada aplicada a la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ nos da:

$$(\operatorname{sen} x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\cos x \frac{\operatorname{sen} h}{h} - \operatorname{sen} x \frac{1-\cos h}{h}\right]$$

$$= \left(\lim_{h\to 0} \cos x\right)\left(\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}\right) - \left(\lim_{h\to 0} \operatorname{sen} x\right)\left(\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h}\right)$$

$$= (\cos x)(1) - (\operatorname{sen} x)(0) = \cos x.$$

(en donde hemos usado que $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$ según se vio en el capítulo 2, y que $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h} = 0$, resultado que se obtuvo en el ejemplo 2.5.3 del capítulo 2).

TEOREMA 5.2.2. *La función $f(x) = \cos x$ es derivable para toda $x \in \mathbb{R}$ y su derivada es:*

$$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x.$$

En efecto, la definición de derivada aplicada a la función $f(x) = \cos x$ nos da:

$$\begin{aligned}
(\cos x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h - \cos x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[-\operatorname{sen} x \frac{\operatorname{sen} h}{h} - \cos x \frac{1-\cos h}{h} \right] \\
&= -\left(\lim_{h\to 0} \operatorname{sen} x\right)\left(\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}\right) - \left(\lim_{h\to 0} \cos x\right)\left(\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h}\right) \\
&= (-\operatorname{sen} x)(1) - (\cos x)(0) = -\operatorname{sen} x.
\end{aligned}$$

(en donde nuevamente usamos los resultados del capítulo 2: $\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$ y $\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h} = 0$).

TEOREMA 5.2.3. *La función $f(x) = \tan x$ es derivable para toda x de su dominio, y su derivada es:*

$$(\tan x)' = \sec^2 x.$$

Para ver la validez de esta afirmación, podemos proceder directamente con la definición de derivada aplicada a la función $f(x) = \tan x$, análogamente a las verificaciones de los dos teoremas anteriores. Pero también podemos usar que la función $f(x) = \tan x$ es el cociente de la función $y = \operatorname{sen} x$ entre la función $y = \cos x$, y aplicar los teoremas 5.1.4 (la derivada de un cociente de funciones) y los resultados de los dos teoremas anteriores. Hagámoslo de esta última manera. Se tiene:

$$\begin{aligned}
(\tan x)' &= \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' \overset{\text{teo. 5.1.4}}{=} \frac{(\cos x)(\operatorname{sen} x)' - (\operatorname{sen} x)(\cos x)'}{\cos^2 x} \underset{\text{teo. 5.2.2}}{\overset{\text{teo. 5.2.1 y}}{=}} \\
&= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.
\end{aligned}$$

(en donde usamos la identidad trigonométrica $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$).

TEOREMA 5.2.4. *La función $f(x) = \cot x$ es derivable para toda x de su dominio, y su derivada es:*

$$(\cot x)' = -\csc^2 x.$$

En efecto, al usar que $f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ y al proceder como en la verificación del teorema anterior, tenemos que:

$$(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)' \overset{\text{teo. 5.1.4}}{=\!=\!\longrightarrow\!=} \frac{(\operatorname{sen} x)(\cos x)' - (\cos x)(\operatorname{sen} x)'}{\operatorname{sen}^2 x} \underset{\text{teo. 5.2.2}}{\overset{\text{teo. 5.2.1 y}}{=\!\longrightarrow}}$$

$$= \frac{(\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x) - (\cos x)(\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{-\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\csc^2 x.$$

Para ver la validez de la fórmula de la derivada de la función $f(x) = \cot x$ habríamos podido tomar otro camino: esta función es igual a $f(x) = \frac{1}{\tan x}$ y, para obtener su derivada, podemos usar el corolario del teorema 5.1.4 (derivada de una constante entre una función), y el resultado del teorema 5.2.3. En efecto:

$$(\cot x)' = \left(\frac{1}{\tan x}\right)' \overset{\text{cor. del teo. 5.1.4}}{=\!\longrightarrow\!=} -\frac{1}{\tan^2 x}(\tan x)' \overset{\text{teo. 5.2.3}}{=\!\longrightarrow}$$

$$= -\frac{1}{\tan^2 x}(\sec^2 x) = -\frac{1}{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\csc^2 x.$$

TEOREMA 5.2.5. *La función $f(x) = \sec x$ es derivable para toda x de su dominio, y su derivada es:*

$$(\sec x)' = \sec x \tan x.$$

En efecto, si usamos que $f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$ y aplicamos el corolario del teorema 5.1.4 y el teorema 5.2.2, nos queda:

$$(\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' \overset{\text{cor. del teo. 5.1.4}}{=\!\longrightarrow\!=} -\frac{1}{\cos^2 x}(\cos x)' \overset{\text{teo. 5.2.2}}{=\!\longrightarrow}$$

$$= -\frac{1}{\cos^2 x}(-\operatorname{sen} x) = \left(\frac{1}{\cos x}\right)\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) = \sec x \tan x.$$

TEOREMA 5.2.6. *La función $f(x) = \csc x$ es derivable para toda x de su dominio, y su derivada es:*

$$(\csc x)' = -\csc x \cot x.$$

En efecto, si usamos que $f(x) = \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$ y aplicamos el corolario del teorema 5.1.4 y el teorema 5.2.1, nos queda:

$$(\csc x)' = \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)' \overset{\text{cor. del teo. 5.1.4}}{=\!\longrightarrow\!=} -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}(\operatorname{sen} x)' \overset{\text{teo. 5.2.1}}{=\!\longrightarrow}$$

$$= -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}(\cos x) = -\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right) = -\csc x \cot x.$$

Resumimos a continuación las fórmulas que acabamos de obtener sobre las derivadas de funciones trigonométricas:

1. $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$	**4.** $(\cot x)' = -\csc^2 x$
2. $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$	**5.** $(\sec x)' = \sec x \tan x$
3. $(\tan x)' = \sec^2 x$	**6.** $(\csc x)' = -\csc x \cot x$

EJEMPLO 5.2.1. Calcular la derivada de la función $f(x) = 9 \operatorname{sen} x + 14 \cos x$.
SOLUCIÓN. Las operaciones "paso a paso" se ven como:

$$f'(x) = (9 \operatorname{sen} x + 14 \cos x)' = (9 \operatorname{sen} x)' + (14 \cos x)'$$

$$= 9(\operatorname{sen} x)' + 14(\cos x)' = 9 \cos x + 14(-\operatorname{sen} x) = 9 \cos x - 14 \operatorname{sen} x.$$

★

EJEMPLO 5.2.2. Calcular la derivada de la función $f(x) = \frac{1-\operatorname{sen} x}{1-\cos x}$.
SOLUCIÓN. Se trata de un cociente de funciones. Entonces, si aplicamos el teorema 5.1.4. nos queda:

$$f'(x) = \left(\frac{1-\operatorname{sen} x}{1-\cos x}\right)' = \frac{(1-\cos x)(1-\operatorname{sen} x)' - (1-\operatorname{sen} x)(1-\cos x)'}{(1-\cos x)^2}$$

$$= \frac{(1-\cos x)(-\cos x) - (1-\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x)}{(1-\cos x)^2} = \frac{-\cos x + \cos^2 x - \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x}{(1-\cos x)^2}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - \operatorname{sen} x - \cos x}{(1-\cos x)^2} = \frac{1 - \operatorname{sen} x - \cos x}{(1-\cos x)^2}.$$

★

EJEMPLO 5.2.3. Calcular la derivada de la función $f(x) = (2x^3 + 1) \tan x$.
SOLUCIÓN. Se trata de un producto de funciones. Las operaciones para obtener la derivada de esta función se ven como:

$$f'(x) = (2x^3+1)(\tan x)' + (2x^3+1)' \tan x = (2x^3+1)\sec^2 x + 6x^2 \tan x.$$

★

EJEMPLO 5.2.4. Calcular la derivada de la función $f(x) = (2x + 7 \operatorname{sen} x)^4$.
SOLUCIÓN. La función $f(x)$ es la cuarta potencia de la función $y = 2x + 7 \operatorname{sen} x$. Si tomamos, entonces, el resultado de la sección 5.1.5, obtenemos que:

$$f'(x) = 4(2x + 7 \operatorname{sen} x)^3 (2x + 7 \operatorname{sen} x)' = 4(2x + 7 \operatorname{sen} x)^3 (2 + 7 \cos x).$$

★

EJEMPLO 5.2.5. Calcular la derivada de la función $f(x) = 5\sec x(2x^2 + \csc x)^3$.

SOLUCIÓN. La función $f(x)$ es un producto de dos funciones, una de las cuales es, a su vez, potencia de otra función. Entonces debemos emplear los resultados correspondientes a la derivada de un producto y a la derivada de una potencia de una función, además, claro está, de las derivadas de las funciones involucradas en las potencias (x^n, $\sec x$ y $\csc x$). Las operaciones quedan como:

$$f'(x) = 5\sec x\left[(2x^2 + \csc x)^3\right]' + (2x^2 + \csc x)^3(5\sec x)'$$

$$= 5\sec x\left[3(2x^2 + \csc x)^2(2x^2 + \csc x)'\right] + (2x^2 + \csc x)^3(5\sec x\tan x)$$

$$= 5\sec x\left[3(2x^2 + \csc x)^2(4x - \csc x\cot x)\right] + (2x^2 + \csc x)^3(5\sec x\tan x)$$

$$= 5\sec x(2x^2 + \csc x)^2\left[3(4x - \csc x\cot x) + \tan x(2x^2 + \csc x)\right].$$

★

EJERCICIOS (5.2)

Para cada una de las funciones $f(x)$ dadas en los ejercicios 1 al 50, calcule $f'(x)$.

1. $f(x) = \operatorname{sen} x + 3\cos x$.

2. $f(x) = 5\operatorname{sen} x - 2\cos x$.

3. $f(x) = \operatorname{sen} x(3 + \cos x)$.

4. $f(x) = (4 + \operatorname{sen} x)(1 - 4\cos x)$.

5. $f(x) = \dfrac{3 + \cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$.

6. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + 4$.

7. $f(x) = \tan x + \operatorname{sen} x\cos x$.

8. $f(x) = (1 + 3\tan x)(2 + 5\cot x)$.

9. $f(x) = 1 + x + 4\tan x$.

10. $f(x) = 3\sec x$.

11. $f(x) = \dfrac{3x\operatorname{sen} x}{\cos x}$.

12. $f(x) = (2x + 3)(2\cos x + 3)$.

13. $f(x) = x\sqrt{x}\operatorname{sen} x$.

14. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

15. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{x + \sqrt{x}}$.

16. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{2 + \cos x}$.

17. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{\operatorname{sen} x + \cos x}$.

18. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}$.

19. $f(x) = \dfrac{\tan x}{x + \cot x}$.

20. $f(x) = x \operatorname{sen} x \cos x$.

21. $f(x) = (1+x)(1+\operatorname{sen} x)(1+\cos x)$.

22. $f(x) = (2 + 3\operatorname{sen} x)(4 + 5\cos x)\tan x$.

23. $f(x) = (\operatorname{sen} x + \cos x)^2$.

24. $f(x) = (3\operatorname{sen} x + 4\cos x)^3$.

25. $f(x) = (5x + 7\cos x)^2$.

26. $f(x) = \dfrac{x}{x + \tan x}$.

27. $f(x) = \dfrac{1+x}{1+\operatorname{sen}^3 x}$.

28. $f(x) = \operatorname{sen}^3 x + \cos^4 x$.

29. $f(x) = \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x$.

30. $f(x) = x \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x$.

31. $f(x) = (1+x)^2(1+\operatorname{sen} x)^3$.

32. $f(x) = (1-\cos x)^2(1+\operatorname{sen} x)^4$.

33. $f(x) = (1+\cos^2 x)^2(1+\operatorname{sen}^2 x)^4$.

34. $f(x) = (1-\cos^2 x)^2(1-\operatorname{sen}^2 x)^4$.

35. $f(x) = (1+x)^2(1+\operatorname{sen} x)^3(1+\cos x)^4$.

36. $f(x) = (3x + 2\tan x)^2$.

37. $f(x) = \tan^2 x(3x + 2\tan x)^2$.

38. $f(x) = \dfrac{x + \operatorname{sen}^2 x}{x - \cos^2 x}$.

39. $f(x) = \cos x\,(1+\operatorname{sen}^2 x)^3$.

40. $f(x) = \operatorname{sen} x\,(1-\cos^2 x)^3$.

41. $f(x) = \dfrac{1}{(3+4\tan^2 x)^2}$.

42. $f(x) = \dfrac{x}{(3+4\tan^2 x)^2}$.

43. $f(x) = (x + x^2 + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x)^2$.

44. $f(x) = \left(\dfrac{x + x\operatorname{sen} x}{1+2\tan^2 x}\right)^3$.

45. $f(x) = \sec x(x + 3\tan^2 x)^2$.

46. $f(x) = (1-\sec^2 x)^2(1+\sec^2 x)^3$.

47. $f(x) = (3x + 2\sec x)(2x + \operatorname{sen}^2 x)^2$.

48. $f(x) = (1 + x\operatorname{sen} x\cos x)^{-2}$.

49. $f(x) = (1 + x\operatorname{sen}^2 x\cos^3 x)^{-3}$.

50. $f(x) = (x^2+x+1)(\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x + 1)^2(\cos^2 x + \cos x + 1)^3$.

5.3 DERIVADAS DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES

Enunciaremos las derivadas de las funciones logarítmicas y exponenciales sin demostración. Recordemos que la función $f(x) = \log_a x$ (logaritmo base a de x, en donde $a > 0$ es dado —la base del logaritmo—) está definida para $x > 0$, mientras que la función $f(x) = a^x$ (exponencial de base a) está definida en todos los números reales. En particular, cuando a es el número $e \approx 2.7182818\ldots$ (el cual es un número irracional) se obtienen las importantes funciones $f(x) = \log_e x = \ln x$ (logaritmo natural de x) y $f(x) = e^x$ (llamada simplemente "función exponencial"). Los teoremas correspondientes sobre las derivadas de estas funciones son los siguientes.

TEOREMA 5.3.1. *La función $f(x) = \log_a x$ es derivable para toda x de su dominio, y su derivada es:*

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

TEOREMA 5.3.2. *La función $f(x) = a^x$ es derivable para toda $x \in \mathbf{R}$, y su derivada es:*

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Entonces, puesto que $\ln e = 1$, en particular tenemos que:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad (e^x)' = e^x.$$

Veamos funcionar estas nuevas fórmulas en algunos ejemplos.

EJEMPLO 5.3.1. Calcular la derivada de la función $f(x) = \frac{1}{x^2+\log_3 x}$.

SOLUCIÓN. Se trata de un cociente de funciones, en cuyo numerador se encuentra una constante. Entonces:

$$f'(x) = -\frac{1}{(x^2 + \log_3 x)^2}(x^2 + \log_3 x)'$$

$$= -\frac{1}{(x^2 + \log_3 x)^2}\left(2x + \frac{1}{x \ln 3}\right).$$

★

EJEMPLO 5.3.2. Calcular la derivada de la función $f(x) = x \ln x$.
SOLUCIÓN. La función $f(x)$ es el producto de la función $y = x$ y la función $y = \ln x$. Entonces, su derivada es:

$$f'(x) = x(\ln x)' + (\ln x)(x)' = (x)\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x(1) = 1 + \ln x.$$

⋆

EJEMPLO 5.3.3. Calcular la derivada de la función $f(x) = (x^2 + 3x + 10)(6^x)$.
SOLUCIÓN. Según la regla de la derivada de un producto, tenemos:

$$f'(x) = (x^2 + 3x + 10)(6^x)' + (6^x)(x^2 + 3x + 10)'$$

$$= (x^2 + 3x + 10)(6^x)(\ln 6) + (6^x)(2x + 3) = 6^x\left[(\ln 6)(x^2 + 3x + 10) + 2x + 3\right].$$

⋆

EJEMPLO 5.3.4. Obtener la derivada de la función $f(x) = (3^x)(5 + 4^x)^5$.
SOLUCIÓN. Se trata de un producto de dos funciones, la segunda de las cuales es, a su vez, la quinta potencia de una función. La derivada queda:

$$f'(x) = (3^x)\left[(5 + 4^x)^5\right]' + (5 + 4^x)^5(3^x)'$$

$$= (3^x)(5)(5 + 4^x)^4(5 + 4^x)' + (5 + 4^x)^5(3^x)(\ln 3)$$

$$= (3^x)(5)(5 + 4^x)^4(4^x \ln 4) + (5 + 4^x)^5(3^x)(\ln 3)$$

$$= (3^x)(5 + 4^x)^4\left[(5)(4^x)(\ln 4) + (5 + 4^x)(\ln 3)\right].$$

⋆

EJEMPLO 5.3.5. Obtener la derivada de la función $f(x) = (7 + 4\sqrt{x})e^x$.
SOLUCIÓN. Al aplicar la regla de la derivada de un producto obtenemos:

$$f'(x) = \left(7 + 4\sqrt{x}\right)\left(e^x\right)' + \left(e^x\right)\left(7 + 4\sqrt{x}\right)' = \left(7 + 4\sqrt{x}\right)\left(e^x\right) + (e^x)(4)\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= e^x\left(7 + 4\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right).$$

⋆

EJEMPLO 5.3.6. Calcular la derivada de la función $f(x) = \frac{x^2+5}{e^x+2}$.

SOLUCIÓN. Según la regla de la derivada de un cociente de funciones, tenemos:

$$f'(x) = \frac{(e^x+2)(x^2+5)' - (x^2+5)(e^x+2)'}{(e^x+2)^2} = \frac{(e^x+2)(2x) - (x^2+5)e^x}{(e^x+2)^2}.$$

★

EJEMPLO 5.3.7. Calcular la derivada de la función $f(x) = \left(\frac{e^x}{3e^x+x}\right)^7$.

SOLUCIÓN. Se trata de calcular la derivada de la función $y = \frac{e^x}{3e^x+x}$ elevada a la séptima potencia. Entonces:

$$f'(x) = 7\left(\frac{e^x}{3e^x+x}\right)^6\left(\frac{e^x}{3e^x+x}\right)' = 7\left(\frac{e^x}{3e^x+x}\right)^6\left(\frac{(3e^x+x)(e^x)' - (e^x)(3e^x+x)'}{(3e^x+x)^2}\right)$$

$$= 7\left(\frac{e^x}{3e^x+x}\right)^6\left(\frac{(3e^x+x)e^x - e^x(3e^x+1)}{(3e^x+x)^2}\right)$$

$$= 7\left(\frac{e^x}{3e^x+x}\right)^6\left(\frac{3e^{2x}+xe^x-3e^{2x}-e^x}{(3e^x+x)^2}\right)$$

$$= 7\left(\frac{e^x}{3e^x+x}\right)^6\left(\frac{xe^x-e^x}{(3e^x+x)^2}\right) = \frac{7\,(e^{6x})\,(e^x)\,(x-1)}{(3e^x+x)^8} = \frac{7e^{7x}(x-1)}{(3e^x+x)^8}.$$

★

EJEMPLO 5.3.8. Calcular la derivada de la función $f(x) = e^{nx}$, en donde n es un número entero.

SOLUCIÓN. Podemos ver la función dada como la n−ésima potencia de la función $y = e^x$. Es decir, $f(x) = (e^x)^n$. En tal caso, y aplicando la regla que aprendimos en la sección 5.1.5, podemos escribir la derivada como:

$$f'(x) = n(e^x)^{n-1}(e^x)' = ne^{(n-1)x}e^x = ne^{nx-x+x} = ne^{nx}.$$

Es decir, si n es cualquier entero se tiene la siguiente fórmula de derivación de la función $f(x) = e^{nx}$:

$$(e^{nx})' = ne^{nx}.$$

★

EJEMPLO 5.3.9. Calcular la derivada de la función $f(x) = \frac{e^{3x}}{e^{-2x}+5}$.

SOLUCIÓN. Se trata de la derivada de un cociente de funciones. En algún momento usaremos el resultado del ejemplo anterior. Las cuentas se ven como:

$$f'(x) = \frac{(e^{-2x}+5)(e^{3x})' - (e^{3x})(e^{-2x}+5)'}{(e^{-2x}+5)^2}$$

$$= \frac{(e^{-2x}+5)(3e^{3x}) - (e^{3x})(-2e^{-2x})}{(e^{-2x}+5)^2} = \frac{3e^{x}+15e^{3x}+2e^{x}}{(e^{-2x}+5)^2}$$

$$= \frac{5e^{x}+15e^{3x}}{(e^{-2x}+5)^2}.$$

★

EJEMPLO 5.3.10. Obtener la derivada de la función $f(x) = \frac{1}{xe^x+1} - \frac{2}{x^2e^{-x}+2}$.

SOLUCIÓN. Cada uno de los sumandos que aparecen en la expresión que define a $f(x)$ es una constante dividida por una función. Entonces, al aplicar la regla correspondiente (corolario del teorema 5.1.4) obtenemos:

$$f'(x) = -\frac{1}{(xe^x+1)^2}(xe^x+1)' + \left(-\frac{2}{(x^2e^{-x}+2)^2}(x^2e^{-x}+2)'\right)$$

$$= -\frac{1}{(xe^x+1)^2}\left((x)(e^x)' + (e^x)(x)'\right) - \frac{2}{(x^2e^{-x}+2)^2}\left((x^2)(e^{-x})' + (e^{-x})(x^2)' + (2)'\right)$$

$$= -\frac{1}{(xe^x+1)^2}\left(xe^x + e^x\right) - \frac{2}{(x^2e^{-x}+2)^2}\left(x^2(-e^{-x}) + (e^{-x})(2x)\right)$$

$$= -\frac{e^x(x+1)}{(xe^x+1)^2} - \frac{2xe^{-x}(2-x)}{(x^2e^{-x}+2)^2}.$$

★

EJERCICIOS (5.3)

Para cada una de las funciones $f(x)$ dadas en los ejercicios 1 al 50, calcule $f'(x)$.

1. $f(x) = x + 3e^x$. **2.** $f(x) = x^2 + 2xe^x$. **3.** $f(x) = x^3 + e^{3x}$.

4. $f(x) = 3x^3e^x$. **5.** $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$. **6.** $f(x) = x\sqrt{x}\sqrt{e^x}$.

7. $f(x) = \frac{2+e^x}{1+x^2}$. **8.** $f(x) = e^x(x+3e^x)$. **9.** $f(x) = (x^2+6x+1)e^x$.

10. $f(x) = 2\sqrt{e^{-x}} + 5\sqrt{e^x}$. **11.** $f(x) = 2e^{3x} + 3e^{2x} - 2e^x + 1$.

12. $f(x) = (x^3 + 2x + 1)e^{-2x}$. **13.** $f(x) = \dfrac{2e^x + 3e^{-x}}{e^x}$.

14. $f(x) = \dfrac{e^x}{2e^x + 3e^{-x}}$. **15.** $f(x) = \dfrac{e^{3x} + 5e^{2x}}{e^{6x}}$. **16.** $f(x) = \dfrac{e^{6x}}{e^{3x} + x}$.

17. $f(x) = 3^x + 2^{-x}$. **18.** $f(x) = x\,(3^x)\,(2^{-x})$. **19.** $f(x) = \dfrac{3^x + 2^x}{e^x}$.

20. $f(x) = \dfrac{e^x}{2^x + 3^x}$. **21.** $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^3}$. **22.** $f(x) = x^5 \ln x$.

23. $f(x) = \dfrac{2 + \ln x}{x - \ln x}$. **24.** $f(x) = \dfrac{e^x \ln x}{e^x + \ln x}$. **25.** $f(x) = \ln^2 x + 3\ln x$.

26. $f(x) = x^2 \ln^3 x$. **27.** $f(x) = (x + \ln^2 x)^3$. **28.** $f(x) = \dfrac{\ln^3 x}{e^{3x}}$.

29. $f(x) = x^2 2^x + x^3 3^x$. **30.** $f(x) = \dfrac{(1 + 3^{-x})^3}{e^x}$. **31.** $f(x) = (3e)^x + (3e^{-1})^x$.

32. $f(x) = (x + e^x)(2x + e^{2x})(3x + e^{3x})$. **33.** $f(x) = (\ln x)\left(1 + \ln^2 x\right)^2\left(2 + \ln^3 x\right)^3$.

34. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{x}{\ln x}$. **35.** $f(x) = \dfrac{x + 1}{x \ln x}$.

36. $f(x) = \left(1 + (1 + \ln x)^2\right)^3$. **37.** $f(x) = (1 + \ln^2 x)e^{3x}$.

38. $f(x) = xe^x e^{2x} e^{3x}$. **39.** $f(x) = x2^x 3^x 4^x$.

40. $f(x) = \dfrac{1}{e^x + e^{3x}}(x + \ln x)$. **41.** $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$.

42. $f(x) = e^{-x} \cos x$. **43.** $f(x) = \dfrac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)$.

44. $f(x) = e^x (\ln x) \operatorname{sen} x \cos x$. **45.** $f(x) = (3 \operatorname{sen} x + 2\cos x)e^{3x}$.

46. $f(x) = (3^x \operatorname{sen} x + 2^x \cos x)\, e^{3x}$. **47.** $f(x) = (e^x \operatorname{sen} x + e^{-x} \cos x)^3$.

48. $f(x) = (1 + \ln^2 x)^2 \tan x$. **49.** $f(x) = \left(1 + e^x\sqrt{xe^{-x}}\right)^2 (1 + \ln^2 x)^4$.

50. $f(x) = e^x \cot x + \dfrac{1}{\operatorname{sen} x + \ln x}$.

5.4 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Vamos a trabajar con unas nuevas funciones, llamadas funciones hiperbólicas, las cuales aparecen en muchos problemas prácticos. Estas funciones se definen en términos de la función exponencial $y = e^x$ de la siguiente manera:

- La función **seno hiperbólico** de x se define como senh : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

- La función **coseno hiperbólico** de x se define como cosh : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Observe que tanto el seno hiperbólico como el coseno hiperbólico están definidos en todos los números reales, pues la función exponencial tiene ese dominio. Además, la función seno hiperbólico es una función impar, pues:

$$\operatorname{senh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -\operatorname{senh}(x),$$

y la función coseno hiperbólico es una función par, pues:

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh(x),$$

de modo que la gráfica de $y = \operatorname{senh} x$ es simétrica respecto del origen de coordenadas y la gráfica de $y = \cosh x$ es simétrica respecto del eje y. Estas gráficas muestran en la figura 5.4.1.

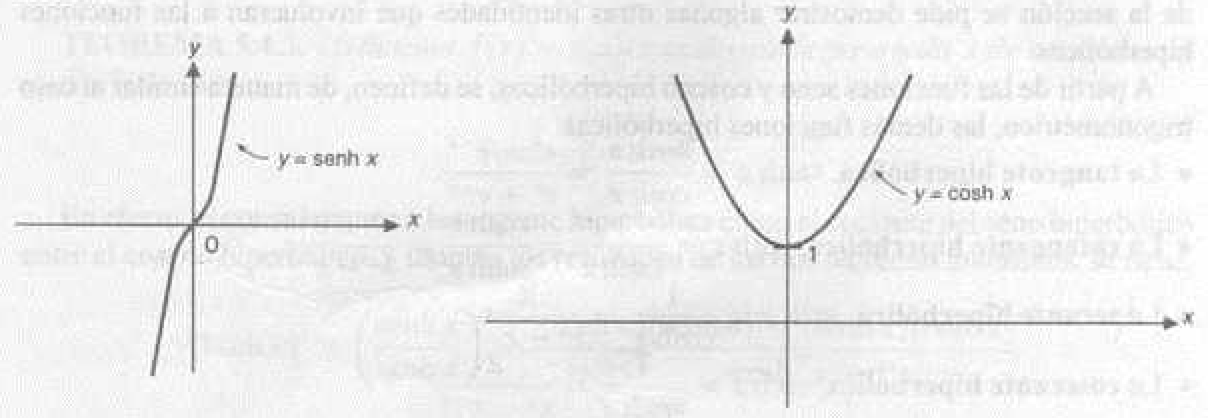


Figura 5.4.1. Gráficas de las funciones hiperbólicas $y = \operatorname{senh} x$ y $y = \cosh x$.

La gráfica del coseno hiperbólico de x es conocida como **catenaria.** En la nota histórica al final de este capítulo se podrá encontrar una breve reseña de la interesante historia que encierra el nombre de esta curva.

El porqué estas funciones tienen el mismo nombre que las funciones trigonométricas seno y coseno (con un calificativo adicional), se entiende en el estudio de los orígenes de estas

funciones. Recordemos que las funciones $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ son llamadas "funciones circulares", pues su origen se encuentra en el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$. Se puede demostrar que una definición completamente análoga a la hecha en este caso, pero, a partir de la hipérbola unitaria $x^2 - y^2 = 1$, conduce a las funciones seno y coseno hiperbólicos. De hecho, existe una gran analogía entre las propiedades (por ejemplo, las identidades) que tienen las funciones circulares con las funciones hiperbólicas: acabamos de ver que $y = \operatorname{senh} x$ es una función impar, al igual que $y = \operatorname{sen} x$, y que $y = \cosh x$ es una función par, al igual que $y = \cos x$. Las funciones circulares satisfacen que $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$. En el caso de las funciones hiperbólicas se tiene una identidad análoga:

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 \qquad \text{(H)}$$

la cual se puede verificar haciendo directamente las operaciones:

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left[(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2\right] \xrightarrow[\text{cuadrados}]{\text{diferencia de}}$$

$$= \frac{1}{4}\left[(e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x})\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[(2e^x)(2e^{-x})\right] = \frac{1}{4}(4e^x e^{-x}) = 1.$$

(Usaremos la identidad (C) en la verificación del teorema 5.4.3.) En los ejercicios al final de la sección se pide demostrar algunas otras identidades que involucran a las funciones hiperbólicas.

A partir de las funciones seno y coseno hiperbólicos, se definen, de manera similar al caso trigonométrico, las demás funciones hiperbólicas:

- La **tangente hiperbólica**, $\tanh x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.
- La **cotangente hiperbólica**, $\coth x = \dfrac{1}{\tanh x} = \dfrac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.
- La **secante hiperbólica**, $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$.
- La **cosecante hiperbólica**, $\operatorname{csch} x = \dfrac{1}{\operatorname{senh} x} = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$.

Los análogos a los teoremas 5.2.1 a 5.2.6 (las derivadas de las funciones trigonométricas) se exponen a continuación. Se podrá notar la similitud de las fórmulas de derivación en el caso de funciones hiperbólicas, con sus correspondientes de funciones trigonométricas. En la verificación de estos teoremas usaremos la fórmula de derivación $(e^{nx})' = ne^{nx}$ que establecimos en el ejemplo 5.3.8. Más concretamente usaremos que (el caso $n = -1$): $(e^{-x}) = -e^{-x}$.

TEOREMA 5.4.1. *La función $f(x) = \operatorname{senh} x$ es derivable para toda $x \in \mathbb{R}$ y su derivada es:*

$$(\operatorname{senh} x)' = \cosh x.$$

En efecto, se tiene:

$$(\operatorname{senh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{(e^x - e^{-x})'}{2} = \frac{(e^x)' - (e^{-x})'}{2} = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2}$$

$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

TEOREMA 5.4.2. *La función $f(x) = \cosh x$ es derivable para toda $x \in \mathbb{R}$ y su derivada es:*

$$(\cosh x)' = \operatorname{senh} x.$$

En efecto, se tiene:

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{(e^x + e^{-x})'}{2} = \frac{(e^x)' + (e^{-x})'}{2} = \frac{e^x + (-e^{-x})}{2}$$

$$= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh} x.$$

TEOREMA 5.4.3. *La función $f(x) = \tanh x$ es derivable para toda x de su dominio, y su derivada es:*

$$(\tanh x)' = \operatorname{sech}^2 x.$$

En efecto, si consideramos a la tangente hiperbólica como el cociente del seno hiperbólico entre el coseno hiperbólico, y usamos los resultados de los dos teoremas anteriores, se tiene:

$$(\tanh x)' = \left(\frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}\right)' = \frac{(\cosh x)(\operatorname{senh} x)' - (\operatorname{senh} x)(\cosh x)'}{\cosh^2 x}$$

$$= \frac{(\cosh x)(\cosh x) - (\operatorname{senh} x)(\operatorname{senh} x)}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x}$$

$$\underset{\text{identidad (H)}}{=} \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x.$$

TEOREMA 5.4.4. *La función* $f(x) = \coth x$ *es derivable para toda* x *de su dominio, y su derivada es:*

$$(\coth x)' = -\operatorname{csch}^2 x.$$

En efecto,

$$(\coth x)' = \left(\frac{1}{\tanh x}\right)' = -\frac{1}{\tanh^2 x}(\tanh x)' = -\frac{1}{\tanh^2 x}\operatorname{sech}^2 x$$

$$= -\frac{1}{\frac{\operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x}}\left(\frac{1}{\cosh^2 x}\right) = -\frac{1}{\operatorname{senh}^2 x} = -\operatorname{csch}^2 x.$$

TEOREMA 5.4.5. *La función* $f(x) = \operatorname{sech} x$ *es derivable para toda* x *de su dominio, y su derivada es:*

$$(\operatorname{sech} x)' = -\operatorname{sech} x \tanh x.$$

En efecto,

$$(\operatorname{sech} x)' = \left(\frac{1}{\cosh x}\right)' = -\frac{1}{\cosh^2 x}(\cosh x)' = -\frac{1}{\cosh^2 x}\operatorname{senh} x$$

$$= -\frac{1}{\cosh x}\left(\frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}\right) = -\operatorname{sech} x \tanh x.$$

TEOREMA 5.4.6. *La función* $f(x) = \operatorname{csch} x$ *es derivable para toda* x *de su dominio, y su derivada es:*

$$(\operatorname{csch} x)' = -\operatorname{csch} x \coth x.$$

En efecto,

$$(\operatorname{csch} x)' = \left(\frac{1}{\operatorname{senh} x}\right)' = -\frac{1}{\operatorname{senh}^2 x}(\operatorname{senh} x)' = -\frac{1}{\operatorname{senh}^2 x}\cosh x$$

$$= -\frac{1}{\operatorname{senh} x}\left(\frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}\right) = -\operatorname{csch} x \coth x.$$

Resumimos a continuación las fórmulas que obtuvimos de las derivadas de las funciones hiperbólicas. Escribimos de nuevo las correspondientes fórmulas de las derivadas de las funciones trigonométricas para resaltar las analogías y diferencias entre ellas.

Funciones Trigonométricas	**Funciones Hiperbólicas**
$(\operatorname{sen} x)' = \cos x$	$(\operatorname{senh} x)' = \cosh x$
$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$	$(\cosh x)' = \operatorname{senh} x$
$(\tan x)' = \sec^2 x$	$(\tanh x)' = \operatorname{sech}^2 x$
$(\cot x)' = -\csc^2 x$	$(\coth x)' = -\operatorname{csch}^2 x$
$(\sec x)' = \sec x \tan x$	$(\operatorname{sech} x)' = -\operatorname{sech} x \tanh x$
$(\csc x)' = -\csc x \cot x$	$(\operatorname{csch} x)' = -\operatorname{csch} x \coth x$

EJEMPLO 5.4.1. Obtener la derivada de la función $f(x) = x \operatorname{senh} x \cosh x$.
SOLUCIÓN. Se trata de la derivada de un producto de tres funciones, la cual es:

$$f'(x) = x \operatorname{senh} x(\cosh x)' + x(\operatorname{senh} x)' \cosh x + (x)' \operatorname{senh} x \cosh x$$

$$= x \operatorname{senh} x \operatorname{senh} x + x \cosh x \cosh x + (1) \operatorname{senh} x \cosh x$$

$$= x(\operatorname{senh}^2 x + \cosh^2 x) + \operatorname{senh} x \cosh x.$$

★

EJEMPLO 5.4.2. Obtener la derivada de la función $f(x) = x \tanh x + e^{4x} \cosh x$.
SOLUCIÓN. La función dada es una suma de dos productos de dos funciones. Su derivada es:

$$f'(x) = (x)(\tanh x)' + (\tanh x)(x)' + (e^{4x})(\cosh x)' + (\cosh x)(e^{4x})'$$

$$= x \operatorname{sech}^2 x + \tanh x + e^{4x} \operatorname{senh} x + 4e^{4x} \cosh x.$$

★

EJEMPLO 5.4.3. Obtener la derivada de la función $f(x) = \frac{\cosh x}{1+\ln x}$.
SOLUCIÓN. Si usamos la regla de la derivada de un cociente de funciones, nos queda:

$$f'(x) = \frac{(1+\ln x)(\cosh x)' - (\cosh x)(1+\ln x)'}{(1+\ln x)^2}$$

$$= \frac{(1+\ln x)(\operatorname{senh} x) - (\cosh x)\left(\frac{1}{x}\right)}{(1+\ln x)^2} = \frac{x(1+\ln x)(\operatorname{senh} x) - \cosh x}{x(1+\ln x)^2}.$$

★

EJEMPLO 5.4.4. Obtener la derivada de la función $f(x) = \left(\frac{2+\operatorname{senh} x}{3-\cosh x}\right)^5$.

SOLUCIÓN. Se trata de la derivada de la función $y = \frac{2+\operatorname{senh} x}{3-\cosh x}$ elevada a la quinta potencia. Se tiene entonces:

$$f'(x) = 5\left(\frac{2+\operatorname{senh} x}{3-\cosh x}\right)^4 \left(\frac{(3-\cosh x)(2+\operatorname{senh} x)' - (2+\operatorname{senh} x)(3-\cosh x)'}{(3-\cosh x)^2}\right)$$

$$= 5\left(\frac{2+\operatorname{senh} x}{3-\cosh x}\right)^4 \left(\frac{(3-\cosh x)(\cosh x) - (2+\operatorname{senh} x)(-\operatorname{senh} x)}{(3-\cosh x)^2}\right)$$

$$= 5\left(\frac{2+\operatorname{senh} x}{3-\cosh x}\right)^4 \left(\frac{3\cosh x - \cosh^2 x + 2\operatorname{senh} x + \operatorname{senh}^2 x}{(3-\cosh x)^2}\right)$$

$$= 5\left(\frac{2+\operatorname{senh} x}{3-\cosh x}\right)^4 \left(\frac{3\cosh x + 2\operatorname{senh} x - 1}{(3-\cosh x)^2}\right)$$

$$= \frac{5(2+\operatorname{senh} x)^4(3\cosh x + 2\operatorname{senh} x - 1)}{(3-\cosh x)^6}.$$

★

EJERCICIOS (5.4)

En los ejercicios 1 al 10, demuestre la identidad indicada.

1. $\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$.
2. $\operatorname{senh}(x-y) = \operatorname{senh} x \cosh y - \cosh x \operatorname{senh} y$.
3. $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$.
4. $\cosh(x-y) = \cosh x \cosh y - \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$.
5. $\operatorname{senh} 2x = 2\operatorname{senh} x \cosh x$.
6. $\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$.
7. $\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$.
8. $\tanh(x-y) = \dfrac{\tanh x - \tanh y}{1 - \tanh x \tanh y}$.
9. $\tanh 2x = \dfrac{2\tanh x}{1 + \tanh^2 x}$.
10. $\tanh^2 x + \operatorname{sech}^2 x = 1$.

Para cada una de las funciones $f(x)$ dadas en los ejercicios 11 al 60, calcule $f'(x)$.

11. $f(x) = 4\operatorname{senh} x - 2\cosh x$.

12. $f(x) = \operatorname{senh} x \cosh x$.

13. $f(x) = \dfrac{3 + \cosh x}{1 + \tanh^2 x}$.

14. $f(x) = \operatorname{senh}^2 x - \cosh^2 x + 4$.

15. $f(x) = \operatorname{senh}^2 x - \cos^2 x + 4$.

16. $f(x) = \operatorname{senh}^2 x + \cosh^2 x$.

17. $f(x) = \dfrac{1 + \operatorname{senh} x}{1 + \cosh x}$.

18. $f(x) = x \tanh x$.

19. $f(x) = x \operatorname{senh}^2 x \cosh^3 x$.

20. $f(x) = \dfrac{\operatorname{senh} x}{x} + \dfrac{x}{\cosh x}$.

21. $f(x) = \operatorname{sen} x \operatorname{senh} x + \cos x \cosh x$.

22. $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{senh} x \cosh x$.

23. $f(x) = \operatorname{sen} x \operatorname{senh} x \cos x \cosh x$.

24. $f(x) = x^2 \operatorname{senh} x - 3x \cosh x$.

25. $f(x) = (3x^2 - 2x + 1) \operatorname{senh} x$.

26. $f(x) = x^2 \operatorname{senh} x \cosh x$.

27. $f(x) = e^{2x} \cosh x + e^{-x} \operatorname{senh} x$.

28. $f(x) = 2^x \operatorname{senh}^2 x + 3^x \cosh^3 x$.

29. $f(x) = (x^2 + 1)(\operatorname{senh}^2 x + 1)(\cosh^2 x + 1)$.

30. $f(x) = \dfrac{1}{1 + \operatorname{senh} x} + \dfrac{1}{1 + \cosh^2 x}$.

31. $f(x) = \dfrac{3 + \operatorname{senh} x \cosh x}{\tanh^2 x}$.

32. $f(x) = x^3 \operatorname{senh}^2 x + x^2 \cosh^2 x$.

33. $f(x) = \operatorname{senh}(\ln x)$. (Sugerencia: recuerde que $e^{\ln x} = x$ para toda $x > 0$).

34. $f(x) = \operatorname{senh}^2(\ln x) + \cosh^2(\ln x)$.

35. $f(x) = (1 + \operatorname{senh}^2 x + \cosh^2 x)^4$.

36. $f(x) = x^2 \operatorname{senh}^3 x \cosh^4 x$.

37. $f(x) = \tan x \tanh x$.

38. $f(x) = \sqrt{x} \operatorname{senh} x + x\sqrt{x} \cosh x$.

39. $f(x) = \operatorname{senh} x \left(3 + \cosh^2 x\right)^2$.

40. $f(x) = e^x \operatorname{sen} x \operatorname{senh} x$.

41. $f(x) = e^{-x} \cos(-x) \cosh(-x)$.

42. $f(x) = e^x \tan(-x) \tanh(-x)$.

43. $f(x) = x e^x \operatorname{senh} x \cosh x$.

44. $f(x) = \operatorname{senh} x \cosh^2 x \tanh^3 x$.

45. $f(x) = \operatorname{sen} x \operatorname{senh} x \cos x \cosh x$.

46. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x \cos x \tan x \operatorname{senh}^2 x \cosh x \tanh x$.

47. $f(x) = x^2 \ln x + \tanh^2 x$.

48. $f(x) = \dfrac{x + \operatorname{senh} x}{x + \cosh x}$.

49. $f(x) = \dfrac{x + \operatorname{senh} x}{x^2 + \cosh^2 x}$.

50. $f(x) = \dfrac{(x + \operatorname{senh} x)^2}{x^2 + \cosh^2 x}$.

51. $f(x) = \dfrac{(x^2 + \operatorname{senh}^2 x)^2}{(x^2 + \cosh^2 x)^4}$.

52. $f(x) = x(x - \operatorname{senh} x)^2(x + \cosh x)^3$.

53. $f(x) = \dfrac{x + 3 + 2\operatorname{sen} x}{2x - 4 + 5\cosh x}$.

54. $f(x) = (1 + \operatorname{senh} x)^2(1 + \operatorname{senh}^2 x)$.

55. $f(x) = (2 + e^x)(3 + e^x)^3 \operatorname{senh}^4 x$.

56. $f(x) = (1 + x^2)(1 + \operatorname{senh}^2 x)^2(1 + \cosh^2 x)^3$.

57. $f(x) = (1 + 3x + 4x^2)(1 + 3\operatorname{senh} x + 4\operatorname{senh}^2 x)(1 + 3\cosh x + 4\cosh^2 x)$.

58. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1} + \dfrac{1}{\operatorname{senh}^2 x + x}$.

59. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1} + \dfrac{\cosh x}{\operatorname{senh}^2 x + x}$.

60. $f(x) = (x + 3\cos x)^3(2 + 5\cosh x)^5(5 + 7\operatorname{sen} x)^7(2 + 9\operatorname{sen} x)^9$.

RESUMEN: ¡DESCIFRA EL MENSAJE!

El objetivo de esta última sección del capítulo es asegurarnos de que estamos ya familiarizados con las fórmulas de derivación que fueron estudiadas aquí. Se pide que se conteste una pregunta que está en clave secreta. Las reglas del juego son las siguientes: a continuación se muestran unos espacios con números que deberán ser cambiados por letras. Estos números corresponden a la numeración de cada uno de 26 ejercicios que se deberán resolver, las respuestas de los cuales tienen otra numeración (por ejemplo, la respuesta correcta del ejercicio 1 es la 5). Se deben cambiar entonces todos los números que vienen en la pregunta por los de sus respuestas correctas. Una vez hecho esto, simplemente se cambian los números por las letras del alfabeto que les corresponden, según el orden estándar: $A = 1, B = 2, \ldots, Z = 26$. Así, se descubrirá la pregunta secreta que se está haciendo. *Ojalá y la respuesta sea* **SÍ.**

El mensaje es:

¿(24)(3)
(3)(21)(13)(1)(18)(10)(17)(12)(22)(1)
(4)(17)(1)(18)
(5)(3)(12)
(8)(26)(13)(6)(14)(5)(3)(12)
(10)(1)
(10)(1)(13)(17)(23)(3)(2)(17)(26)(18)
(10)(1)
(1)(12)(22)(1)
(2)(3)(21)(17)(22)(14)(5)(26)?

Preguntas: *Las funciones son* $f(x) =$

1. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$.
2. $\sqrt{x}\cos x$.
3. $x \operatorname{sen} x$.
4. $x + \operatorname{sen} x$.
5. $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$.
6. $\operatorname{sen} x \cos x$.
7. $x \operatorname{senh} x \cosh x$.
8. $x^2 + 3x + 1$.
9. $x^3 \operatorname{senh} x$.
10. $\dfrac{1-x^2}{x}$.
11. $x^2(1+x)^2$.
12. $\sec x \tan x$.
13. $e^x \ln x$.
14. $x^2 \ln x$.
15. $\operatorname{sen} x \sec^2 x$.
16. $x^4 e^{4x}$.
17. $(x^3 + 2x)^4$.
18. $x - \tan x$.
19. $\dfrac{\cos x}{\cosh x}$.
20. $(\operatorname{sen} x + \operatorname{senh} x)^2$.
21. $\operatorname{sen} x + \tan x$.
22. $x \operatorname{sen} x \cos x$.
23. $x(1+x)^3$.
24. $\dfrac{e^x}{1+x^2}$.
25. $\dfrac{\ln x}{x^4}$.
26. $x^2 + 3\sqrt{x}$.

Respuestas: *Las derivadas de las funciones anteriores son* $f'(x) =$

1. $x\cos x + \operatorname{sen} x$.
2. $1 + \cos x$.
3. $\dfrac{\cos x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\operatorname{sen} x$.
4. $-x^{-2} - 1$.
5. $(1+\cos x)^{-1}$.
6. $2x + 3$.
7. $x^3 \cosh x + 3x^2 \operatorname{senh} x$.
8. $\operatorname{senh} x \cosh x + x(\operatorname{senh}^2 x + \cosh^2 x)$.
9. $4(3x^2+2)(x^3+2x)^3$.
10. $2(\cos x + \cosh x)(\operatorname{sen} x + \operatorname{senh} x)$.
11. $-\dfrac{\cosh x \operatorname{sen} x + \cos x \operatorname{senh} x}{\cosh^2 x}$.
12. 0.
13. $\cos 2x$.
14. $-\tan^2 x$.
15. $2x + \dfrac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}$.
16. $\cos x + \sec^2 x$.
17. $2x^2(1+x) + 2x(1+x)^2$.
18. $x^{-1}e^x + e^x \ln x$.
19. $\sec^3 x + \sec x \tan^2 x$.
20. $\operatorname{sen} x \cos x + x\cos 2x$.
21. $x + 2x\ln x$.
22. $3x(1+x)^2 + (1+x)^3$.
23. $\dfrac{1-4\ln x}{x^5}$.
24. $(1 + 2\tan^2 x)\sec x$.
25. $\dfrac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$.
26. $4x^3 e^{4x}(1+x)$.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 5

EXAMEN TIPO (A)

1. Calcule la derivada de la función $f(x) = 3x\sqrt{x} + \dfrac{1}{2+\sqrt{x}}$.

2. Calcule la derivada de la función $f(x) = (x+3)^3(x+4)^4(x+5)^5$.

3. Calcule la derivada de la función $f(x) = \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}$.

4. Calcule la derivada de la función $f(x) = \dfrac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}}$.

5. Calcule la derivada de la función $f(x) = e^x(1+e^{-2x})(1+4^x)$.

6. Calcule la derivada de la función $f(x) = \left(\dfrac{1+e^x}{1-e^{-x}}\right)^4$.

7. Calcule la derivada de la función $f(x) = \ln x + \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x}$.

8. Calcule la derivada de la función $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x + \frac{1}{\cos x+1}}$.

9. Calcule la derivada de la función $f(x) = \dfrac{x + \operatorname{senh} x}{x + \operatorname{sen} x}$.

10. Calcule la derivada de la función $f(x) = e^x\,(1+\tanh x)^3$.

EXAMEN TIPO (B)

1. Calcule la derivada de la función $f(x) = \dfrac{(2+x\sqrt{x})^3}{x^{\frac{1}{3}}}$.

2. Calcule la derivada de la función $f(x) = (x^3+3)^3(x^4+4)^4(x^5+5)^5$.

3. Calcule la derivada de la función $f(x) = \dfrac{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}}$.

4. Considere la función $f(x) = (x^2+3x+1)e^x$. Sea $g(x) = f'(x)$. Calcule $g'(x)$.

5. Sea $f(x)$ una función derivable cuya gráfica pasa por el punto $(1,1)$, tal que $f'(1) = -2$. Sea $\varphi(x) = \frac{1}{x^2 f^5(x)}$. Calcule $\varphi'(1)$.

6. Si $f(x) = \left(\dfrac{3^x+2^x}{5^x}\right)^4$, calcule $f'(0)$.

7. Calcule la derivada de la función $f(x) = \operatorname{sen}^4 x + 2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x + \cos^4 x$. (El resultado es un número.)

8. Calcule la derivada de la función $f(x) = \dfrac{(1+\operatorname{senh} x)(1+\cosh x)}{3+\tanh^2 x}$.

9. Sea $f(x)$ una función derivable cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas, tal que $f'(0) = \sqrt{2}$. Sea $\varphi(x) = (1+\operatorname{sen}^2 x)^5(2-\cos^2 x)^6(2+\operatorname{senh}^2 x)^9(4+\cosh^2 x)^{11} f(x)$.

Calcule $\varphi'(0)$. (Sugerencia: piense un momento antes de comenzar a hacer sus operaciones; se puede ahorrar mucho trabajo.)

10. Sea $f(x) = x^2e^{2x} + xe^x + x^{-1}e^{-x} + x^{-2}e^{-2x}$. Calcule $f'(x)$.

NOTA HISTÓRICA: LOS BERNOULLI Y LA CATENARIA.



Cuando en música se habla de Bach, todos pensamos en Johann Sebastian Bach, uno de los autores más prolíficos de todos los tiempos. Sin embargo, este autor perteneció a una familia que por varias generaciones dio al mundo grandes músicos (todos ellos con el mismo apellido), aunque no tan conocidos como Johann Sebastian. Una situación similar aconteció en Matemática con la familia suiza de los Bernoulli. Varias generaciones de esta familia estuvieron figurando en el mundo de la Matemática de los siglos XVII - XVIII, a saber:

- Nicolás (1623-1708) →
  - Jakob I (1654-1705)
  - Nicolás I (1662-1716) →
    - Nicolás II (1687-1759)
  - Johann I (1667-1748) →
    - Nicolás III (1695-1726)
    - Daniel (1700-1782)
    - Johann II (1710-1790) →
      - Johann III (1746-1807)
      - Jakob II (1759-1789)

Dos de los personajes más importantes de esta familia fueron Jakob I y Johann I. Jakob I comenzó a estudiar teología por insistencia de su padre, pero muy pronto se le cruzó en su camino el Cálculo de Newton y Leibniz, y abandonó todo por la Matemática. Fue profesor en Basilea, Suiza, desde 1687 hasta su muerte. Su trabajo en Matemática se concentró fundamentalmente en el estudio de las series infinitas, algunas curvas planas, así como la teoría de probabilidades. En cuanto a su hermano menor, Johann I, también empezó su carrera fuera de la Matemática. Llegó a doctorarse en Medicina con una tesis sobre la contracción de los músculos. Sin embargo, al igual que su hermano, quedó atrapado en las redes del Cálculo cuando lo comenzó a estudiar, y abandonó su profesión de médico para dedicarse de lleno a la Matemática.

Durante el tiempo en que estuvieron los dos hermanos dedicados de lleno a la Matemática, llegaron a plantear varios problemas importantes y a resolverlos. Uno de los más famosos es el problema de la braquistócrona, sobre el cual hablaremos en un capítulo posterior. Otro de estos problemas es el de la catenaria: en el año de 1690, Jakob propone el problema de determinar la forma (la ecuación de la curva) que toma una cadena homogénea que cuelga libremente por su propio peso (la palabra catenaria proviene de la raíz latina *catena* que significa cadena). Este problema había sido ya considerado en el siglo XV por Leonardo da Vinci, y en el siglo XVI por Galileo, quien pensaba que tal curva era una parábola. Un año después de que apareció el problema propuesto, se presentaron casi simultáneamente tres soluciones independientes: una de Leibniz, otra de Huygens y la otra de Johann, el hermano menor. La curva solución era la de un coseno hiperbólico.

Una de las características de la familia Bernoulli, que dejaron huella en la historia de la Matemática (además, claro está, de la calidad de su trabajo), fue el carácter tan explosivo de algunos de ellos. Muchas de las discusiones que tenían Johann y Jakob sobre los problemas en los que trabajaban, terminaban en alegatos álgidos, entre gritos y manotazos, en los que llegaban a emplear un vocabulario que, dice el matemático E. T. Bell en su libro *Men of mathematics*, era más propio de "ladrones de caballos" (quizás una equivalencia para nosotros sería "de cargadores de la central de abasto"). El mismo Bell justifica el comportamiento de estos matemáticos diciendo que "... después de todo, si la irracionalidad del ser humano llega a explotar a causa de juegos de cartas, ¿por qué no podría explotar por cuestiones matemáticas, que son infinitamente más emocionantes?" Otra anécdota famosa, que muestra la controversial personalidad de Johann I, es la referente al premio de la Academia Francesa, premio que Johann tenía muchos años deseando ganar. Cuando en uno de los concursos participó su hijo Daniel, y ganó el premio, fue echado violentamente de su casa por su propio padre.

Respecto del problema de la catenaria, se conoce una carta que mandó Johann I a Pierre Rémond de Montmort, amigo de la familia, fechada el 29 de septiembre de 1718, parte de la cual reproducimos a continuación:

"Los esfuerzos de mi hermano [Jakob] no tuvieron éxito; por mi parte, fui más afortunado, porque encontré la habilidad (y lo digo sin jactarme, ¿por qué no diría la verdad?) para resolverlo... Es cierto que me costó mucho estudio que me robó el descanso de una noche entera... pero a la mañana siguiente, lleno de regocijo, corrí hacia mi hermano quien todavía se esforzaba miserablemente pensando siempre como Galileo, que la catenaria era una parábola. ¡Detente! ¡detente! le dije, no te tortures más tratando de probar la identidad de la catenaria y la parábola, porque es completamente falsa... la curva es tan diferente que una es algebraica y la otra, trascendente... Entonces me quedé atónito cuando usted me dijo que mi hermano había encontrado un método para resolver el problema... Yo le pregunto, ¿cree realmente que si mi hermano hubiera resuelto el problema, habría sido tan condescendiente como para no aparecer en la lista de los que sí pudimos resolverlo, cediéndome la gloria de aparecer solo en calidad del primero que dio la respuesta, junto a Huygens y Leibniz?"

CAPÍTULO 6
DERIVADAS DE FUNCIONES COMPUESTAS, INVERSAS E IMPLÍCITAS

"El Método de Fluxiones [el Cálculo] es la clave general para ayudar ahí en donde la Matemática moderna abre los secretos de la Geometría y, consecuentemente, de la Naturaleza."

Berkeley

En el capítulo anterior aprendimos a calcular derivadas de funciones "sencillas". Ciertamente esto representa ya un logro en nuestro curso. Pero, como suele ocurrir con frecuencia, cuando estamos disfrutando de nuestras metas alcanzadas, acontece que nos damos cuenta de que la vida no es tan fácil como parece: en la realidad nos podemos encontrar con funciones "más complicadas" de las que aprendimos a derivar en el pasado capítulo. El espíritu del presente capítulo es el mismo que el del anterior: queremos seguir desarrollando habilidades operativas para calcular derivadas de funciones de una manera eficiente, con "reglas de derivación" (como los teoremas que ya vimos sobre cómo derivar funciones) que nos permitan obtener la derivada de una función sin recurrir a su definición.

Por supuesto que existen muchos tipos de complicaciones que se nos pueden presentar en las funciones que queremos derivar, pero en un primer acercamiento al Cálculo es suficiente con estudiar tres de las complicaciones que más aparecen en los problemas de aplicaciones que estudiaremos posteriormente: veremos cómo derivar las funciones compuestas, cómo derivar funciones que son inversas de otras funciones dadas y cómo derivar funciones implícitas, las cuales, son, cierto tipo de funciones que no están dadas (de manera explícita) como las que hemos venido trabajando $y = f(x)$. (Estos términos —funciones inversas y funciones implícitas— serán explicados en su momento. La parte de composición de funciones fue estudiada ya en el capítulo uno.)

6.1 DERIVACIÓN DE FUNCIONES COMPUESTAS

En el capítulo uno estudiamos la operación de composición de funciones. En el capítulo tres vimos que la propiedad de continuidad "se conservaba" al hacer la operación de composición entre funciones continuas: una función que sea composición de funciones continuas, es una función continua. En el capítulo cuatro explicamos la propiedad de derivabilidad de una función. Surge de manera natural la pregunta: ¿sigue siendo válida la propiedad de derivabilidad al componer funciones derivables? Y, en el caso de respuesta afirmativa, ¿existe alguna relación entre la derivada de la función compuesta y las derivadas de las funciones que se componen?

En esta sección daremos respuesta a estas interrogantes. El teorema correspondiente es uno de los resultados más importantes del Cálculo Diferencial. Y así, sin más preámbulos, lo presentamos a continuación.

TEOREMA 6.1.1. *Sea $\psi : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función derivable en $x \in I$, (es decir, $\psi'(x)$ existe), y sea $\varphi : J \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, una función [definida en el conjunto J que contiene al rango de ψ, es decir que $\psi(I) = \{y \in \mathbf{R} \mid y = \psi(x), x \in I\} \subseteq J$] derivable en $y = \psi(x)$. Entonces la función compuesta $\varphi \circ \psi : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $(\varphi \circ \psi)(x) = \varphi(\psi(x))$ es derivable en $x \in I$, y su derivada (en x) es:*

$$(\varphi \circ \psi)'(x) = \varphi'(\psi(x))\,\psi'(x).$$

Esquemáticamente podemos ver esta situación de la siguiente manera:

la derivada de ψ en x es $\psi'(x)$ (I)

la derivada de φ en $\psi(x)$ es $\varphi'(\psi(x))$ (II)

$$x \xrightarrow{\ \psi\ } \psi(x) \xrightarrow{\ \varphi\ } \varphi(\psi(x))$$

$\varphi \circ \psi$

la derivada de la composición $\varphi \circ \psi$ en x es el producto de (II) y (I). Es decir

$$(\varphi \circ \psi)'(x) = \varphi'(\psi(x))\psi'(x)$$

Una demostración rigurosa de este hecho va más allá del nivel al que se pretende llegar en un primer curso de Cálculo. No obstante sí podemos dar un argumento que, aunque no es

general, sí nos permite ver de una manera muy sencilla lo plausible del resultado establecido en el teorema anterior. En efecto, dejémonos llevar por las definiciones y escribamos:

$$(\varphi \circ \psi)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(\varphi \circ \psi)(x+h) - (\varphi \circ \psi)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(\psi(x+h)) - \varphi(\psi(x))}{h}.$$

Observe que el valor $\psi(x+h)$ es, para h pequeño, "casi igual" que el valor $\psi(x)$, pues esta función, al ser derivable (así lo estamos suponiendo), es continua. No tiene nada de extraño entonces que escribamos $\psi(x+h) = \psi(x) + k$, en donde k es esa pequeña desviación que sufre $\psi(x)$ cuando x pasa a $x+h$. Entonces:

$$(\varphi \circ \psi)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(\psi(x)+k) - \varphi(\psi(x))}{h}.$$

Multipliquemos y dividamos este último cociente por $k = \psi(x+h) - \psi(x)$, y observemos que si $h \to 0$, entonces $\psi(x+h) \to \psi(x)$ (por la continuidad de ψ) y por lo tanto $k \to 0$. Podemos escribir entonces:

$$(\varphi \circ \psi)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(\psi(x)+k) - \varphi(\psi(x))}{h} = \lim_{h\to 0} \left[\left(\frac{\varphi(\psi(x)+k) - \varphi(\psi(x))}{k}\right)\left(\frac{k}{h}\right)\right]$$

$$\underset{k=\psi(x+h)-\psi(x)}{\overset{\text{escribiendo}}{=\!=\!=}} \left(\lim_{k\to 0} \frac{\varphi(\psi(x)+k) - \varphi(\psi(x))}{k}\right)\left(\lim_{h\to 0} \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h}\right)$$

(en donde usamos que el límite de un producto es el producto de los límites). Los dos límites que obtuvimos en esta última expresión son justamente las definiciones de derivada de φ en $\psi(x)$ y de ψ en x, a saber:

$$\lim_{k\to 0} \tfrac{\varphi(\psi(x)+k)-\varphi(\psi(x))}{k} = \varphi'(\psi(x)) \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0} \tfrac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h} = \psi'(x).$$

Así obtenemos el resultado establecido en el teorema 6.1.1:

$$(\varphi \circ \psi)'(x) = \varphi'(\psi(x))\,\psi'(x).$$

El estudiante al que le gusten este tipo de delicias lógicas en las demostraciones puede tratar de seguir el argumento anterior en el caso de que ψ sea una función constante (para la cual el teorema debe funcionar, pues es una función derivable), para que se convenza de que el argumento anterior no es una demostración general del resultado establecido en el teorema. No podemos negar, sin embargo, la gran sencillez del argumento que nos deja convencidos de la naturalidad de la fórmula de derivación de una función compuesta.

La fórmula establecida en el teorema 6.1.1 es conocida como **Regla de la Cadena para la derivación:** lo que en ella se establece es, esencialmente, que la derivada de una composición de funciones es el producto de las derivadas de cada una de las funciones que se están componiendo. De hecho, podríamos escribir tal fórmula como:

$$(\varphi \circ \psi)' = \varphi'\psi'$$

en donde debemos recordar que si la función ψ se evalúa en x (al igual que su derivada), la función φ se evalúa en $\psi(x)$ (al igual que su derivada). No es, pues, la derivada de un

producto de funciones la que es igual al producto de las derivadas de cada una de las funciones que se están multiplicando. Esto lo vimos en el capítulo anterior (teorema 5.1.3). La derivada de la composición de funciones es igual al producto de las derivadas de cada una de las funciones que se están componiendo.

Antes de ver algunos ejemplos, retomemos el problema visto en la sección anterior sobre la derivada de una función elevada a una potencia (sección 5.1.5). Si $f(x)$ es una función derivable, consideremos la composición de ésta con la función $\varphi(x) = x^n$. Es decir, consideremos la función

$$F(x) = (\varphi \circ f)(x) = \varphi(f(x)) = (f(x))^n = f^n(x).$$

Ciertamente la función $\varphi(x) = x^n$ es derivable, al igual que la función $f(x)$, de modo que estamos en condiciones de aplicar la regla de la cadena y obtener que la derivada de la composición $F(x)$ es:

$$F'(x) = (\varphi \circ f)'(x) = \varphi'(f(x))\, f'(x).$$

Como $\varphi'(x) = (x^n)' = nx^{n-1}$, tenemos que $\varphi'(f(x)) = n(f(x))^{n-1} = nf^{n-1}(x)$, de modo que:

$$F'(x) = (f^n)'(x) = \varphi'(f(x))\, f'(x) = nf^{n-1}(x) f'(x)$$

el cual es el mismo resultado establecido en el capítulo anterior, y al cual llegamos (en el caso de n entero positivo) usando el teorema sobre la derivada de un producto de funciones. Como la fórmula $(x^n)' = nx^{n-1}$ dijimos ya en el capítulo 4 que vale para cualquier n real (aunque sólo la demostramos para n entero positivo), podremos usar ahora la fórmula de derivación de una función elevada a una potencia en el caso de que n sea cualquier número real.

Veamos algunos ejemplos. En ellos tendremos que poner en práctica los procesos de "descomposición de funciones" que vimos en el capítulo uno (ver una función dada como composición de otras funciones simples).

EJEMPLO 6.1.1. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables definidas en todos los reales. Suponer que la gráfica de la función $g(x)$ pasa por el origen de coordenadas. Suponer también que $f'(0) = 5$ y $g'(0) = 3$. Calcular $(f \circ g)'(0)$.

SOLUCIÓN. Según la regla de la cadena tenemos $(f \circ g)'(0) = f'(g(0))\, g'(0)$. El hecho de que la gráfica de $g(x)$ pase por el origen de coordenadas significa que $g(0) = 0$. Entonces $(f \circ g)'(0) = f'(0)g'(0) = (5)(3) = 15$.

★

EJEMPLO 6.1.2. Calcular la derivada de la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 10}$.

SOLUCIÓN. La función dada es la composición de la función $\varphi(x) = \sqrt{x}$ con $\psi(x) = x^2 + 6x + 10$. Es decir, $f(x) = (\varphi \circ \psi)(x)$. Las derivadas de cada una de las funciones φ y ψ son: $\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ y $\psi'(x) = 2x + 6$. Entonces, según la regla de la cadena tenemos:

$$f'(x) = (\varphi \circ \psi)'(x) = \varphi'(\psi(x))\, \psi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\psi(x)}}(2x + 6)$$

$$= \left\{ \underbrace{\left[\frac{1}{2\sqrt{x^2+6x+10}}\right]}_{\text{derivada de } \varphi(x)=\sqrt{x} \text{ evaluada en } \psi(x)} \right\} \left\{ \cdot \underbrace{(2x+6)}_{\text{derivada de } \psi(x)} \right\} = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x+10}}.$$

★

EJEMPLO 6.1.3. Calcule la derivada de la función $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$.

SOLUCIÓN. La función dada es la composición de las función $\varphi(x) = \operatorname{sen} x$ con $\psi(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Las derivadas de cada una de estas funciones son:

$$\varphi'(x) = \cos x \quad \text{y} \quad \psi'(x) = -\frac{1}{(x^2+1)^2}(2x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Entonces, según la regla de la cadena se tiene:

$$f'(x) = (\varphi \circ \psi)'(x) = \varphi'(\psi(x))\,\psi'(x) = (\cos \psi(x))\left(-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right)$$

$$= \left(\cos\frac{1}{x^2+1}\right)\left(-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right).$$

★

EJEMPLO 6.1.4. Calcule la derivada de la función $f(x) = 3\ln(e^x + x^2 + 1)$.

SOLUCIÓN. La función dada es la composición de la función $\varphi(x) = 3\ln x$ con $\psi(x) = e^x + x^2 + 1$. Las derivadas de cada una de estas funciones son: $\varphi'(x) = \frac{3}{x}$ y $\psi'(x) = e^x + 2x$. Entonces, según la regla de la cadena se tiene:

$$f'(x) = (\varphi \circ \psi)'(x) = \varphi'(\psi(x))\,\psi'(x) = \left(\frac{3}{\psi(x)}\right)(e^x + 2x) = \frac{3(e^x + 2x)}{e^x + x^2 + 1}.$$

★

La regla de la cadena se puede generalizar para el caso en que se tenga una composición de más de dos funciones. Por ejemplo, si $\varphi(x)$, $\psi(x)$ y $\xi(x)$ son funciones derivables (con dominios adecuados para que se pueda efectuar la composición), entonces la función compuesta $F(x) = (\varphi \circ \psi \circ \xi)(x) = \varphi(\psi(\xi(x)))$ es derivable y su derivada es:

$$(\varphi \circ \psi \circ \xi)'(x) = [\varphi'(\psi(\xi(x)))]\,[\psi'(\xi(x))]\,[\xi'(x)]\,.$$

Más generalmente, si $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ son k funciones derivables, entonces la composición $F(x) = (\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_k)(x) = \varphi_1(\varphi_2(\varphi_3(\ldots(\varphi_k(x))\ldots)))$ es derivable y su derivada es:

$$(\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_k)'(x) = [\varphi_1'(\varphi_2(\varphi_3(\ldots(\varphi_k(x)))))]\,[\varphi_2'(\varphi_3(\ldots(\varphi_k(x))))]\ldots[\varphi_k'(x)]\,.$$

EJEMPLO 6.1.5. Calcule la derivada de la función $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(2x^3 + 9))$.

SOLUCIÓN. La función dada es la composición de las función $\varphi_1(x) = \operatorname{sen} x$ con $\varphi_2(x) = \cos x$ y con $\varphi_3(x) = 2x^3 + 9$. Es decir. $f(x) = \varphi_1(\varphi_2(\varphi_3(x)))$. Las derivadas de cada una de estas funciones son $\varphi_1'(x) = \cos x$, $\varphi_2'(x) = -\operatorname{sen} x$ y $\varphi_3'(x) = 6x^2$. Entonces, la regla de la cadena nos dice que la derivada de $f(x)$ es:

$$f'(x) = (\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_3)'(x) = \varphi_1'(\varphi_2(\varphi_3(x)))\, \varphi_2'(\varphi_3(x))\, \varphi_3'(x)$$

$$= [\cos(\varphi_2(\varphi_3(x)))]\,[-\operatorname{sen}(\varphi_3(x))]\,[6x^2] = [\cos(\cos(x^3+1))]\,[-\operatorname{sen}(x^3+1)]\,[6x^2].$$

★

EJEMPLO 6.1.6. Calcule la derivada de la función $f(x) = \operatorname{sen}^2\left(\sqrt[3]{\cos x + 1}\right)$.

SOLUCIÓN. La función dada es una composición de cuatro funciones, a saber $\varphi_1(x) = x^2$, $\varphi_2(x) = \operatorname{sen} x$, $\varphi_3(x) = \sqrt[3]{x}$ y $\varphi_4(x) = \cos x + 1$. Es decir,

$$f(x) = (\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_3 \circ \varphi_4)(x).$$

Las derivadas de cada una de estas funciones son: $\varphi_1'(x) = 2x$, $\varphi_2'(x) = \cos x$, $\varphi_3'(x) = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ y $\varphi_4'(x) = -\operatorname{sen} x$. Entonces:

$$f'(x) = (\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_3 \circ \varphi_4)'(x)$$

$$= \underbrace{\varphi_1'(\varphi_2(\varphi_3(\varphi_4(x))))}_{2\operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{\cos x+1}\right)} \underbrace{\varphi_2'(\varphi_3(\varphi_4(x)))}_{\cos\left(\sqrt[3]{\cos x+1}\right)} \underbrace{\varphi_3'(\varphi_4(x))}_{\frac{1}{3}(\cos x+1)^{-\frac{2}{3}}} \underbrace{\varphi_4'(x)}_{-\operatorname{sen} x}$$

$$= \left[2\operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{\cos x + 1}\right)\right]\left[\cos\left(\sqrt[3]{\cos x + 1}\right)\right]\left[\frac{1}{3}(\cos x + 1)^{-\frac{2}{3}}\right][-\operatorname{sen} x]$$

$$= -\frac{2\operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{\cos x + 1}\right)\cos\left(\sqrt[3]{\cos x + 1}\right)\operatorname{sen} x}{3\sqrt[3]{(\cos x + 1)^2}}.$$

★

EJEMPLO 6.1.7. Calcule la derivada de la función $F(x) = e^{-e^{-x}}$.

SOLUCIÓN. Observe que $F(x)$ es la composición de la función $f(x) = e^{-x}$ con ella misma. Es decir, $F(x) = f(f(x)) = f(e^{-x}) = e^{-e^{-x}}$. Entonces, según la regla de la cadena, tenemos que $F'(x) = f'(f(x))\, f'(x)$. Como $f'(x) = -e^{-x}$, nos queda:

$$F'(x) = \left(-e^{-e^{-x}}\right)(-e^{-x}) = e^{-x-e^{-x}}.$$

★

EJEMPLO 6.1.8. Calcule la derivada de la función $F(x) = \operatorname{sen}(e^{\operatorname{sen} x})$.

SOLUCIÓN. La función dada es la composición $F(x) = f(g(f(x)))$ en donde $f(x) = \operatorname{sen} x$ (cuya derivada es $f'(x) = \cos x$) y $g(x) = e^x$ (cuya derivada es $g'(x) = e^x$). Entonces:

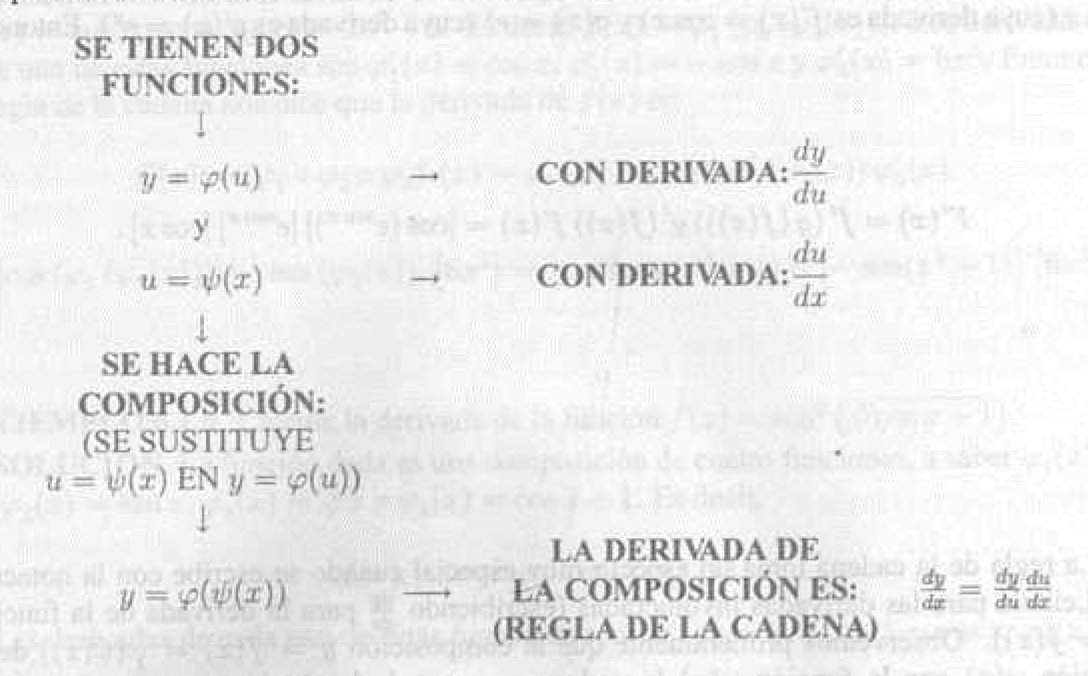
$$F'(x) = f'(g(f(x)))\, g'(f(x))\, f'(x) = [\cos(e^{\operatorname{sen} x})]\, [e^{\operatorname{sen} x}]\, [\cos x].$$

La regla de la cadena toma un aspecto muy especial cuando se escribe con la notación de Leibniz para las derivadas involucradas (escribiendo $\frac{dy}{dx}$ para la derivada de la función $y = f(x)$). Observemos primeramente que la composición $y = f(x) = \varphi(\psi(x))$ de la función $\varphi(x)$ con la función $\psi(x)$ la podemos pensar de la siguiente manera: tenemos una función $y = \varphi(u)$ y una función $u = \psi(x)$. Al sustituir esta última en la primera obtenemos la función compuesta $y = \varphi(\psi(x))$. La regla de la cadena nos dice que la derivada de esta composición es igual al producto de las derivadas de las funciones que se componen. Es decir, la derivada de la función compuesta $y = \varphi(\psi(x))$, que la escribimos con la notación de Leibniz como $\frac{dy}{dx}$, es igual al producto de la derivada de la función $y = \varphi(u)$, que la escribimos como $\frac{dy}{du}$, por la derivada de la función $u = \psi(x)$, que la escribimos como $\frac{du}{dx}$. Así, la regla de la cadena se escribe como:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

La desventaja de esta manera de escribir la fórmula de la derivación de una función compuesta es que en ella no se hace explícito en dónde están calculadas las derivadas involucradas (este inconveniente lo podemos subsanar con un poco más de atención al momento de escribir el resultado final). En contraste, tal fórmula es de una sencillez y belleza asombrosas: hace parecer la regla de la cadena un resultado trivial (algún alumno ingenuo puede pensar que la igualdad que plantea esta fórmula es trivial, pues en el segundo miembro basta con "cancelar" las du's para obtener lo que está en el primer miembro).

En resumen, desde esta nueva perspectiva, el problema de la derivación de funciones compuestas se ve como:



o bien, con el esquema que habíamos presentado anteriormente:

$$x \underbrace{\longrightarrow}_{\substack{\text{la derivada es} \\ \frac{du}{dx} \\ \text{(I)}}} u \underbrace{\longrightarrow}_{\substack{\text{la derivada es} \\ \frac{dy}{du} \\ \text{(II)}}} y$$

$$\overbrace{y = f(x)}$$

la derivada de la composición es el producto de (II) y (I). Es decir $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$

EJEMPLO 6.1.9. Repita el ejemplo 6.1.2 (calcular la derivada de la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 10}$), usando la notación de Leibniz.

SOLUCIÓN. La función dada es la composición de la función $y = \sqrt{u}$ (que tiene por derivada a $\frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$), con la función $u = x^2 + 6x + 10$ (que tiene por derivada a $\frac{du}{dx} = 2x + 6$). Entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}(2x+6) \xrightarrow{\text{sustituya } u} = \frac{2x+6}{2\sqrt{x^2+6x+10}} = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x+10}}.$$

★

EJEMPLO 6.1.10. Repita el ejemplo 6.1.5 (calcule la derivada de la función $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(2x^3+9)))$, usando la notación de Leibniz.

SOLUCIÓN. En este caso tenemos la composición de tres funciones:

- $y = \operatorname{sen} u$, con derivada $\frac{dy}{du} = \cos u$,
- $u = \cos w$, con derivada $\frac{du}{dw} = -\operatorname{sen} w$, y
- $w = 2x^3 + 9$, con derivada $\frac{dw}{dx} = 6x^2$.

Entonces la derivada de la composición $y = f(x)$ es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dw}\frac{dw}{dx} = (\cos u)(-\operatorname{sen} w)(6x^2) = \left[\cos\left(\cos(x^3+1)\right)\right]\left[-\operatorname{sen}(x^3+1)\right]\left[6x^2\right].$$

⋆

EJEMPLO 6.1.11. Sea $y = 3u^4 + 2u + 4$, en donde $u = \tan w$, en donde a su vez $w = 7x^3 + 13x + 6$. Calcule $\frac{dy}{dx}$.

SOLUCIÓN. Si aplicamos directamente la regla de la cadena, tenemos:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dw}\frac{dw}{dx} = (12u^3+2)(\sec^2 w)(21x^2+13).}$$

Si queremos nuestro resultado en términos solamente de x, sustituimos a u y a w :

$$\frac{dy}{dx} = (12u^3+2)(\sec^2 w)(21x^2+13)$$

$$= \left(12\tan^3(7x^3+13x+6)+2\right)\left(\sec^2(7x^3+13x+6)\right)(21x^2+13).$$

⋆

Otra idea que es conveniente tener presente cuando se están derivando funciones compuestas es pensar en la composición de funciones en términos de "funciones externas" y "funciones internas": cuando se tiene una composición expresada, por ejemplo, por la fórmula $y = \varphi(\psi(x))$, decimos que φ es la función externa y ψ es la función interna de la composición (ψ es la función que está adentro de φ, o bien φ es la función que está afuera de ψ). La regla de la cadena nos dice que al derivar una función compuesta lo que debemos hacer es empezar a derivar de la función más externa a la función más interna, y multiplicar todas estas derivadas. Por supuesto que debemos respetar el hecho de que las funciones externas están evaluadas, al igual que sus derivadas, en las funciones internas correspondientes. Por ejemplo, supongamos que queremos obtener la derivada de la función

$$f(x) = \operatorname{sen}(\cosh x).$$

Si leemos esta fórmula de izquierda a derecha vemos que la función externa es $\operatorname{sen} x$ (que está evaluada en $\cosh x$) y la función interna es $\cosh x$. Así, al calcular la derivada de la función $f(x)$ comenzamos a derivar la función externa (que quedará evaluada en $\cosh x$) y multiplicamos por la derivada de la función interna $\cosh x$. Es decir,

$$f'(x) = \left[\underbrace{\cos(\cosh x)}_{\text{derivada de sen evaluada en } \cosh x}\right]\left[\underbrace{\operatorname{senh} x}_{\text{derivada de } \cosh x}\right] = (\cos(\cosh x))\,(\operatorname{senh} x).$$

Si tenemos composiciones de más de dos funciones, la idea para aplicar la regla de la cadena será la misma: debemos identificar, primeramente, cómo es la composición que queremos derivar, de la función externa hacia dentro (hacia la función más interna) y comenzar a derivar estas funciones, multiplicando los resultados de las derivadas.

Por ejemplo, si queremos derivar la función $f(x) = \ln^2(x^6 + 2)$, debemos identificar que la función más externa en esta composición (la que está más a la izquierda) es la función que eleva al cuadrado, luego viene la función ln, y por último, la función más interna es $y = x^6 + 2$. Entonces:

$$f'(x) = \left[\underbrace{2\ln(x^6+2)}_{\text{derivada de la función } (\cdot)^2}\right]\left[\underbrace{\frac{1}{x^6+2}}_{\text{derivada de } \ln}\right]\left[\underbrace{6x^5}_{\text{derivada de } x^6+2}\right]$$

$$= \left[2\ln(x^6+2)\right]\left[\frac{1}{x^6+2}\right](6x^5).$$

Esta manera de aplicar la regla de la cadena es la que debemos llegar a manejar con soltura. Esto implica que:

1. Sepamos reconocer cómo es que una función dada es la composición de otras funciones más simples, si sabemos bien el orden en que éstas están escritas (de la más externa a la más interna).
2. Sepamos calcular las derivadas de las funciones simples que identificamos en el paso 1.), (estas derivadas son del tipo de las que calculamos en el capítulo anterior).

Veamos algunos ejemplos "más difíciles". En ellos indicaremos la función que se está derivando y denotaremos con $(\cdot)$ el argumento en donde esta función está evaluada.

EJEMPLO 6.1.12. Calcular la derivada de $f(x) = 3\sqrt{5 + \ln^4 x}$.
SOLUCIÓN. Tenemos:

$$f'(x) = \left[\underbrace{\frac{3}{2\sqrt{5+\ln^4 x}}}_{\text{derivada de } 3\sqrt{\cdot}}\right]\left[\underbrace{4\ln^3 x}_{\text{derivada de } 5+(\cdot)^4}\right]\left[\underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{derivada de } \ln}\right] = \frac{6\ln^3 x}{x\sqrt{5+\ln^4 x}}.$$

★

EJEMPLO 6.1.13. Calcular la derivada de la función compuesta $f(x) = 4\ln^3(3+\ln(2+\ln^5 x))$.

SOLUCIÓN. Tenemos:

$$f'(x) =$$

$$= \left[\underbrace{12\ln^2\left(3+\ln(2+\ln^5 x)\right)}_{\text{derivada de }4(\cdot)^3}\right]\left[\underbrace{\frac{1}{3+\ln(2+\ln^5 x)}}_{\text{derivada de }\ln(\cdot)}\right]\left[\underbrace{\frac{1}{2+\ln^5 x}}_{\text{derivada de }3+\ln(\cdot)}\right]\left[\underbrace{5\ln^4 x}_{\text{derivada de }2+(\cdot)^5}\right]\left[\underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{derivada de }\ln(\cdot)}\right]$$

$$= \frac{60\ln^2\left(3+\ln(2+\ln^5 x)\right)\ln^4 x}{x\left[3+\ln(2+\ln^5 x)\right]\left[2+\ln^5 x\right]}.$$

★

EJEMPLO 6.1.14. Calcular la derivada de la función $f(x) = \sqrt{x + e^{\cos^2(1+x^3)}}$.

SOLUCIÓN. Tenemos:

$$f'(x) = \left[\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x+e^{\cos^2(1+x^3)}}}}_{\text{derivada de }\sqrt{\cdot}}\right]\left[\underbrace{1+\left[e^{\cos^2(1+x^3)}\right]'}_{\text{derivada de }x+e^{\cos^2(1+x^3)}}\right]$$

$$= \left\{\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x+e^{\cos^2(1+x^3)}}}}_{\text{derivada de }\sqrt{\cdot}}\right\}\left\{1+\left[\underbrace{e^{\cos^2(1+x^3)}}_{\text{derivada de }e^{(\cdot)}}\right]\left[\underbrace{2\cos(1+x^3)}_{\text{derivada de }(\cdot)^2}\right]\left[\underbrace{-\operatorname{sen}(1+x^3)}_{\text{derivada de }\cos(\cdot)}\right]\left[\underbrace{3x^2}_{\text{derivada de }1+x^3}\right]\right\}$$

$$= \frac{1-6x^2e^{\cos^2(1+x^3)}\cos(1+x^3)\operatorname{sen}(1+x^3)}{2\sqrt{x+e^{\cos^2(1+x^3)}}}.$$

★

EJEMPLO 6.1.15. Sea $\varphi(x)$ una función derivable. Calcular la derivada de la función $F(x) = e^x\varphi(e^{2x})$.

SOLUCIÓN. La función dada es el producto de la función e^x con la función $\varphi(e^{2x})$, la cual es la composición de $\varphi(x)$ con e^{2x}. Al derivar esta composición aplicamos la regla de la cadena: es claro que la función externa es $\varphi(x)$ y la función interna es e^{2x}. Así, se tiene:

$$F'(x) = e^x \left(\varphi(e^{2x})\right)' + \varphi(e^{2x})(e^x)'$$

$$= e^x\varphi'(e^{2x})e^{2x}(2) + \varphi(e^{2x})e^x = 2e^{3x}\varphi'(e^{2x}) + e^x\varphi(e^{2x}).$$

★

EJEMPLO 6.1.16. Sean $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ funciones derivables. Calcular la derivada de la función $F(x) = \varphi^2\left(1 + \psi^4(\operatorname{sen}^3 x)\right)$.

SOLUCIÓN. La función dada es "una gran cadena" de composiciones que esta vez no haremos explícitas. Finalmente lo que buscamos es desarrollar esa capacidad de identificación casi mecánica de las cadenas de funciones que se componen, sin tener que hacerlas explícitas, para poder derivar adecuadamente tal composición. La derivada de la función dada queda:

$$F'(x) =$$
$$\left[2\varphi\left(1 + \psi^4\left(\operatorname{sen}^3 x\right)\right)\right]\left[\varphi'\left(1 + \psi^4\left(\operatorname{sen}^3 x\right)\right)\right]\left[4\psi^3\left(\operatorname{sen}^3 x\right)\right]\left[\psi'\left(\operatorname{sen}^3 x\right)\right]\left(3\operatorname{sen}^2 x\right)\left(\cos x\right).$$

★

EJERCICIOS (6.1)

En los ejercicios 1 al 40, obtenga la derivada de la función dada.

1. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

2. $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$.

3. $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.

4. $f(x) = \operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}(x+1)\right)$.

5. $f(x) = \cos\left(\operatorname{sen}(\cos x)\right)$.

6. $f(x) = \cos^2(\operatorname{sen}^3 x)$.

7. $f(x) = \operatorname{sen}^2(\cos^3 x) + \operatorname{sen}^3(\cos^2 x)$.

8. $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$.

9. $f(x) = \operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}^3(\operatorname{sen}^4 x^5))$.

10. $f(x) = \operatorname{sen}(\ln x) + \ln(\operatorname{sen} x)$.

11. $f(x) = x\ln(\ln(2x))$.

12. $f(x) = \ln(x\ln x)$.

13. $f(x) = \ln x \ln(\ln x)$.

14. $f(x) = \ln(\ln(\ln x)) + \ln^2(\ln x)$.

15. $f(x) = \sqrt{1+\ln^2(5x)}$.

16. $e^{x\operatorname{sen} x}$.

17. $f(x) = \ln(x + e^{\cos x})$.

18. $f(x) = x^2e^{x^2+3x+2}$.

19. $f(x) = e^{\cos e^x}$.

20. $f(x) = e^{\operatorname{sen} x} + \operatorname{sen} e^x$.

21. $f(x) = \operatorname{senh} \operatorname{senh} \operatorname{senh}(4x)$.

22. $f(x) = \operatorname{senh} \cosh \operatorname{senh} x$.

23. $f(x) = \sqrt{x + \operatorname{senh}^2(2 + x)}$.

24. $f(x) = \left(x + \ln^2\left(1 + \sqrt{x}\right)\right)^4$.

25. $f(x) = e^{x^e} + e^{e^x}$.

26. $f(x) = e^{e^{e^x}} + e^{e^{x^e}}$.

27. $f(x) = e^x e^{e^x}$.

28. $f(x) = e^{x + e^{2x + e^{3x}}}$.

29. $f(x) = \operatorname{sen}\left(1 + \cos(1 + \operatorname{sen}(3x))\right)$.

30. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x^2$.

31. $f(x) = \ln\left(x + e^{x^2}\right)$.

32. $f(x) = \ln\left(1 + \ln^2(x \ln x)\right)$.

33. $f(x) = \sqrt{x^2 + \ln^2(1 + \operatorname{sen}^2 x)}$.

34. $f(x) = \operatorname{senh} \operatorname{sen} \cosh \cos x$.

35. $f(x) = \operatorname{senh}(x \cosh x)$.

36. $f(x) = \cosh\left(x^2 e^{x \operatorname{senh} x}\right)$.

37. $f(x) = \operatorname{sen}\left(x + \cos\left(e^x + e^{\operatorname{sen} x + \cos x}\right)\right)$.

38. $f(x) = \cosh^2\left(x^2 + \sqrt{e^{\operatorname{senh} x + \cosh(2x)} + e^{\operatorname{sen}(2x) + \cos x}}\right)$.

39. $\operatorname{senh}^2\left(x^2 + \sqrt{e^{\cosh x + \operatorname{senh}(2x)} + e^{\cos(2x) + \operatorname{sen} x}}\right)$.

40. $f(x) = \operatorname{senh}^2 \cosh^3 x + \operatorname{senh}^2 x \cosh^3 x + \cosh^3 \operatorname{senh}^2 x$.

En los ejercicios 41 al 80, suponga que $f(x)$ *es una función derivable definida en todo* $\mathbb{R}$. *Calcule la derivada de la función* $F(x)$ *indicada.*

41. $F(x) = f(x+1)$.

42. $F(x) = f(x+2)$.

43. $F(x) = f(2x+1)$.

44. $F(x) = (2x+1)f(x)$.

45. $F(x) = xf(2x+1)$.

46. $F(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

47. $F(x) = \frac{f(x)}{x}$.

48. $F(x) = \frac{1}{f(x)}$.

49. $F(x) = f\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

50. $F(x) = f\left(x + \frac{1}{x}\right)$.

51. $F(x) = f^2(x)$.

52. $F(x) = f(x^2)$.

53. $F(x) = f(1 + f(x))$.

54. $F(x) = f(x + f(x))$.

55. $F(x) = f(1 + f(1 + f(x)))$.

56. $F(x) = f(x + f(x + f(x)))$.

57. $F(x) = f\left(xf(x)\right)$.

58. $F(x) = f\left(x^2 f\left(x^3\right)\right)$.

59. $F(x) = f\left(x^2 + f(x^3)\right)$.

60. $F(x) = f^2\left(x^3\right)$.

61. $F(x) = f^2\left(f^3(x)\right)$.

62. $F(x) = f^3\left(x^2 f^4(x^5)\right)$.

63. $F(x) = \sqrt{1 + f\left(\sqrt{1+x}\right)}$.

64. $F(x) = \sqrt{1 + f^2\left(\sqrt{1+x^2}\right)}$.

65. $F(x) = f\left(1 + \sqrt{1 + f^2(x)}\right)$.

66. $F(x) = f\left(e^{f(x)}\right)$.

67. $F(x) = f\left(f(e^x)\right)$.

68. $F(x) = f\left(e^x + f(x)\right)$.

69. $F(x) = f\left(e^x f(x)\right)$.

70. $F(x) = f(\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} f(x)$.

71. $F(x) = f^2\left(\operatorname{sen}^3 x\right)$.

72. $F(x) = f\left(\cos f(x)\right)$.

73. $F(x) = f\left(f(x)\cos x\right)$.

74. $F(x) = f\left(xf(x\operatorname{sen} x)\right)$.

75. $F(x) = \operatorname{senh} f\left(\cosh x\right)$.

76. $F(x) = f\left(\cosh f(x)\right)$.

77. $F(x) = 1 + \ln^2\left(2 + f(1 + \ln x)\right)$.

78. $F(x) = f\left(\ln^2 f\left(1 + \ln^3 x\right)\right)$.

79. $F(x) = \operatorname{senh} f\left(\cosh f(x)\right)$.

80. $F(x) = f\left(\operatorname{sen} f\left(\cos f\left(\tan f(x)\right)\right)\right)$.

En los ejercicios 81 al 90, suponga que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables definidas en todo R. *Calcule la derivada de la función $F(x)$ indicada.*

81. $F(x) = f^2\left(4g^2(3x)\right)$.

82. $F(x) = f\left(3e^{g(-x)}\right)$.

83. $F(x) = f\left(g(x) + f(-x)\right)$.

84. $F(x) = g\left(f(x) - g\left(f(x) + g(x)\right)\right)$.

85. $F(x) = f\left(-xg(-x)\right)$.

86. $F(x) = g\left(g(2x^2) f\left(3x^3\right)\right)$.

87. $F(x) = f\left(e^x g(e^{f(x)})\right)$.

88. $F(x) = f\left(e^{g(e^x)}\right)$.

89. $F(x) = e^{f(-x)} g\left(-e^{g(-x)} f(-x)\right)$.

90. $F(x) = g\left(\sqrt{1 + g^2(-x)} + \sqrt{1 + f^2(x)}\right)$.

91. Sea $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función derivable par. Demuestre que su derivada $f'(x)$ es una función impar.

92. Sea $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función derivable impar. Demuestre que su derivada $f'(x)$ es una función par.

6.2 DERIVACIÓN DE FUNCIONES INVERSAS

En esta sección vamos a introducir el concepto de función inversa y a estudiar cómo se derivan este tipo de funciones.

6.2.1 FUNCIONES INVERSAS

Consideremos una función $f : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida en el subconjunto I de $\mathbf{R}$. Estamos interesados en considerar una función g que tenga la propiedad de "deshacer" las imágenes de f. Por ejemplo, supongamos que f manda el 2 a la imagen $f(2) = 8$. Entonces nuestra función g deberá deshacer lo que f hizo: mandará el 8 a la imagen $g(8) = 2$. Más generalmente, supongamos que lo que hace la función f con x es elevarla al cubo, es decir, $f(x) = x^3$. Queremos una función g que a x^3 lo mande a x, es decir, tal que $g(x^3) = x$. ¿Qué es lo que debe hacer esta función con un valor arbitrario y? Es claro que para pasar de x^3 a x lo que debemos hacer es tomarle la raíz cúbica a x^3. Así, la función g que procuramos debe ser $g(x) = \sqrt[3]{x}$, de tal manera que, si $f(2) = 2^3 = 8$, entonces $g(8) = \sqrt[3]{8} = 2$.

Para que una función f tenga asociada una función g con las características anteriormente mencionadas, es necesario que tenga una propiedad importante: no puede mandar a dos x's diferentes de su dominio a la misma imagen. Es decir, no pueden haber x_1 y x_2 en el dominio de f tales que $f(x_1) = f(x_2)$. En efecto, si éste fuera el caso (como por ejemplo, con la función $f(x) = x^2$ tenemos $f(2) = f(-2) = 4$), la función g que se encargaría de deshacer la acción de f no puede existir, puesto que al valor común $y_0 = f(x_1) = f(x_2)$ le tendría que asignar *dos* valores x_1 y x_2. Es decir, tal "función" g debería ser tal que $g(y_0) = x_1$ y $g(y_0) = x_2 \ldots$ ¡pero en tal caso g no sería una función! (recuerde: una función debe asociar a cada elemento de su dominio *una única imagen*). Así pues, debemos considerar funciones $f : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ que tengan la propiedad de que las x's de su dominio *nunca comparten imágenes*. Más precisamente, tales que:

$$x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Una función que tiene esta propiedad se llama **función inyectiva.** Ejemplos de funciones inyectivas son las funciones lineales $f(x) = mx + b$, la función $f(x) = x^3$, la función $f(x) = e^x$, la función $f(x) = \ln x$, entre otras. Observe que la gráfica de una función inyectiva tiene una propiedad importante: *si trazamos cualquier recta horizontal, ésta puede cortar la gráfica de la función cuando mucho en un punto*. En efecto, tal recta horizontal es del tipo $y = y_0$ (constante), de modo que si cruza la gráfica de la función es en un punto cuya abscisa x tiene por imagen justamente a y_0. Siendo inyectiva la función, solamente puede haber un valor de x que tenga por imagen a y_0. Esto no ocurre, por ejemplo, con la función $f(x) = x^2$. Su gráfica, como sabemos, es una parábola con vértice en el origen que abre hacia arriba. La recta horizontal $y = 1$ corta a tal parábola en los puntos $p_1 = (-1, 1)$ y $p_2 = (1, 1)$. Esta función, como habíamos observado anteriormente, no es inyectiva.

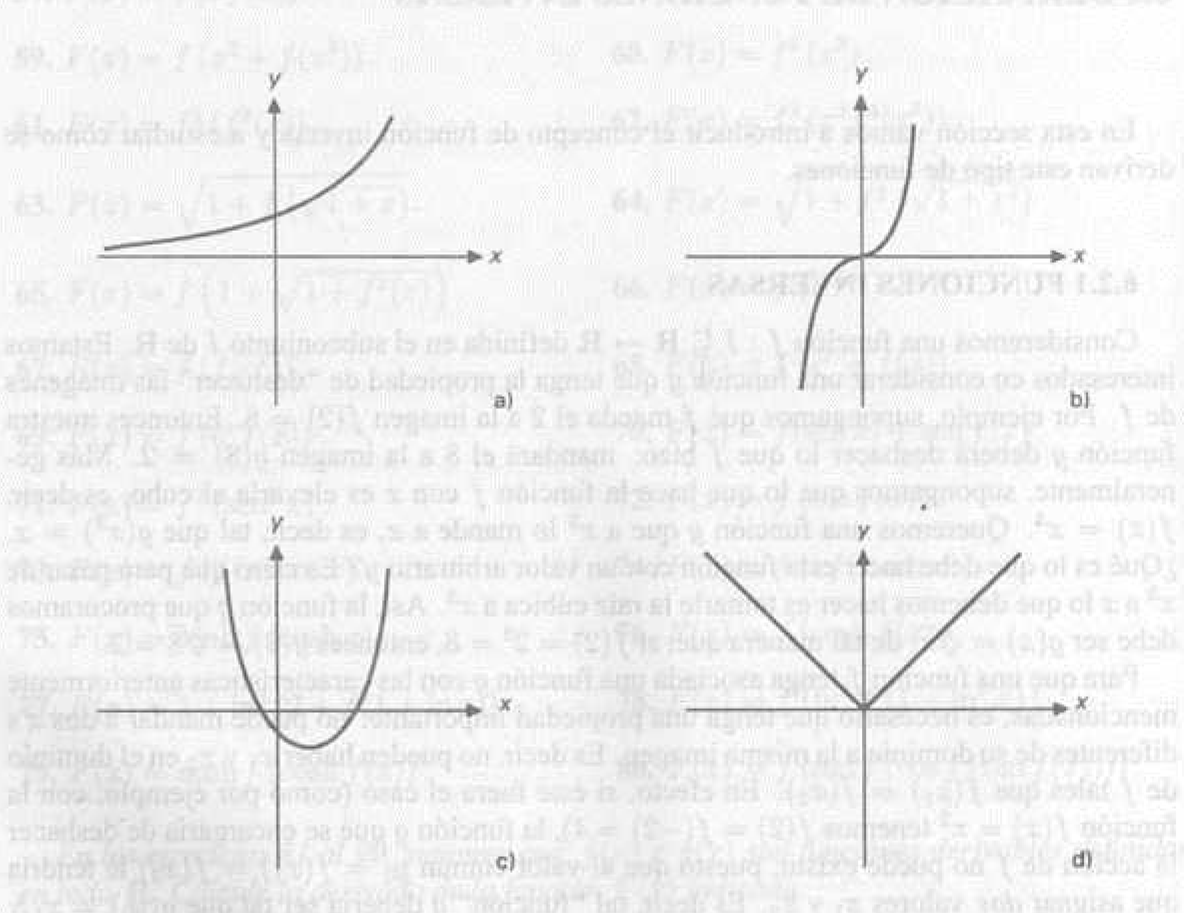


Figura 6.2.1. Las gráficas de los incisos (a) y (b) representan funciones inyectivas. Las gráficas de los incisos (c) y (d) representan funciones no inyectivas.

Sea entonces $f : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función inyectiva. La función g que deshace las imágenes de f se llama **función inversa de** f, y se denota con f^{-1}. Observe que esta última función tendrá como dominio las imágenes de f. Es decir, el dominio de f^{-1} es el rango de f. Y recíprocamente, el rango de f^{-1} es el dominio de f. La función f^{-1} tiene entonces la propiedad fundamental:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}\left(f(x)\right) = x \text{ para toda } x \text{ del dominio de } f$$

y

$$(f \circ f^{-1})(y) = f\left(f^{-1}(y)\right) = y \text{ para toda } y \text{ en el dominio de } f^{-1} \text{ (en el rango de } f).$$

Esquemáticamente tenemos:

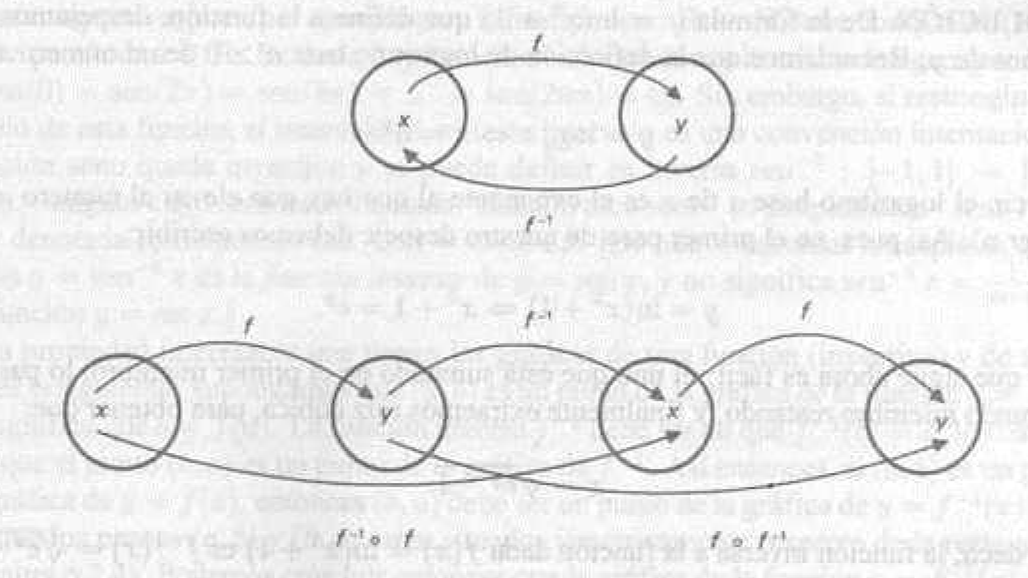


Figura 6.2.2. La función inversa de f.

ADVERTENCIA IMPORTANTE: la notación f^{-1} para la inversa de la función f, *es simplemente una notación*. Las reminiscencias de los cursos de álgebra elemental, en donde "algo elevado a la -1 significa el recíproco de ese algo", es decir, en donde $a^{-1} = \frac{1}{a}$, con $a \neq 0$, pueden llevar a errores y confusiones graves. Debemos ser cuidadosos al distinguir la notación $f^{-1}(x)$ para la función inversa de $f(x)$, de $(f(x))^{-1}$, la cual sí significa $\frac{1}{f(x)}$. Las confusiones pueden venir de que para denotar $(f(x))^2$ usamos $f^2(x)$, o, en general, si n es un número natural cualquiera, para $(f(x))^n$, usamos $f^n(x)$. *Pero esto lo haremos solamente para exponentes enteros positivos*. Por ejemplo, si estamos hablando de la función $f(x) = x^3$, su inversa $f^{-1}(x)$ *no es* $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^3}$, sino $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Pensemos cómo podemos hacer para encontrar la inversa de una función inyectiva dada $y = f(x)$. Si en esta fórmula se nos está diciendo qué es lo que hace f con x para obtener su imagen $y = f(x)$, y nosotros buscamos una función f^{-1} que a y la regrese a x, lo que debemos buscar es *qué debemos hacer con la y para obtener nuevamente el valor x*. Así que una buena idea para conseguir esta función es, de la fórmula $y = f(x)$, *despejar a x en términos de y*. La fórmula en la que se muestra x en términos de y es la expresión $x = f^{-1}(y)$ de la función inversa buscada.

EJEMPLO 6.2.1. Determine la inversa de la función $f(x) = 3x + 8$.

SOLUCIÓN. De la fórmula $y = 3x + 8$ que define a la función, despejamos a x en términos de y para obtener $x = \frac{y-8}{3}$. Así, la función inversa es $f^{-1}(y) = \frac{y-8}{3}$. Como es tradición, seguimos escribiendo con la letra x la variable de una función, de modo que la función inversa de $f(x) = 3x + 8$ es $f^{-1}(x) = \frac{x-8}{3}$.

★

EJEMPLO 6.2.2. Determine la inversa de la función $f(x) = \ln(x^3 + 1)$.

SOLUCIÓN. De la fórmula $y = \ln(x^3 + 1)$ que define a la función, despejamos x en términos de y. Recordemos que la definición de logaritmo base $a > 0$ de un número $x > 0$ es:

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

(es decir, el logaritmo base a de x es el exponente al que hay que elevar al número a para obtener x). Así pues, en el primer paso de nuestro despeje debemos escribir:

$$y = \ln(x^3 + 1) \Rightarrow x^3 + 1 = e^y.$$

Lo que sigue ahora es fácil: el uno que está sumando en el primer miembro, lo pasamos al segundo miembro restando, y finalmente extraemos raíz cúbica, para obtener que:

$$x = \sqrt[3]{e^y - 1}.$$

Es decir, la función inversa a la función dada $f(x) = \ln(x^3 + 1)$ es $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{e^x - 1}$.

⋆

Algunas funciones importantes no son inyectivas, de modo que de ellas no podemos obtener una inversa. El caso más simple es la función cuadrática $f(x) = x^2$. Sin embargo, es común que *se restrinja el dominio de la función para que ésta quede inyectiva, y entonces podamos definir su inversa*. Por ejemplo, si para la función $f(x) = x^2$, cuyo dominio (natural) son todos los reales, restringimos su dominio a las x no negativas, obtenemos la función $f_1 : \{x \in \mathbf{R} \,|\, x \geq 0\} \to \mathbf{R}$, $f_1(x) = x^2$ que sí es inyectiva (su gráfica es la semiparábola derecha de $y = x^2$, que tiene la propiedad de que cualquier recta horizontal se corta con ella a lo más en un punto). Similarmente la función $f_2 : \{x \in \mathbf{R} \,|\, x \leq 0\} \to \mathbf{R}$, $f_2(x) = x^2$ es también inyectiva (cuya gráfica es la semiparábola izquierda de $y = x^2$). Para estas funciones tenemos sus inversas $f_1^{-1}(x) = \sqrt{x}$ y $f_2^{-1}(x) = -\sqrt{x}$, como puede verificarse directamente.

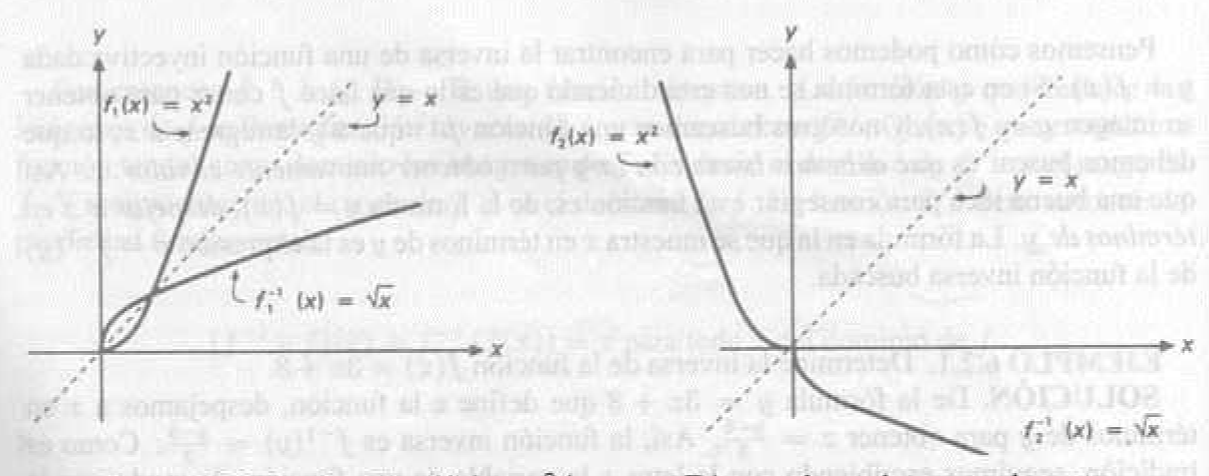


Figura 6.2.3. La función $f(x) = x^2$ (con $x \in \mathbf{R}$) no es inyectiva, y por lo tanto no tiene inversa. Pero las funciones $f_1(x) = x^2$ con $x \geq 0$ y $f_2(x) = x^2$ con $x \leq 0$ sí son inyectivas, y tienen por inversas a $f_1^{-1}(x) = \sqrt{x}$ y a $f_2^{-1}(x) = -\sqrt{x}$, respectivamente.

Esta situación es la que se presenta con las funciones trigonométricas: es claro que ninguna de ellas es inyectiva, pues, por ejemplo para la función sen : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, tenemos que $\operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen} x$ para toda $x \in \mathbf{R}$. Es decir, hay "muchas" x's que tienen la misma imagen (por ejemplo, $\operatorname{sen}(0) = \operatorname{sen}(2\pi) = \operatorname{sen}(4\pi) = \ldots = \operatorname{sen}(2n\pi) = 0$). Sin embargo, si restringimos el dominio de esta función al intervalo $[0, \pi]$ (este intervalo es una convención internacional), la función seno queda inyectiva y se puede definir su inversa $\operatorname{sen}^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$, $\operatorname{sen}^{-1} x =$ángulo cuyo seno es x, llamada "función arco seno" (o simplemente "seno inverso") y denotada comúnmente con $f(x) = \operatorname{arcsen} x$. [De nuevo hacemos hincapié en que la función $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ es la *función inversa* de $y = \operatorname{sen} x$, y no significa $\operatorname{sen}^{-1} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$ que es la función $y = \csc x$.]

Una propiedad interesante que tienen las gráficas de una función (inyectiva) y de su inversa es la siguiente: supongamos que (a, b) es un punto de la gráfica de la función $y = f(x)$. Esto significa que $b = f(a)$. La función inversa f^{-1} debe ser tal que $f^{-1}(b) = a$, lo cual significa que el punto (b, a) es un punto de la gráfica de f^{-1}. Así entonces, si (a, b) es un punto de la gráfica de $y = f(x)$, entonces (b, a) debe ser un punto de la gráfica de $y = f^{-1}(x)$. Observe que los puntos (a, b) y (b, a) están situados simétricamente respecto de la recta $y = x$ (ver figura 6.2.4). Podemos concluir entonces que la gráfica de la función $y = f^{-1}(x)$ es un reflejo, respecto de la recta $y = x$, de la gráfica de la función $y = f(x)$.

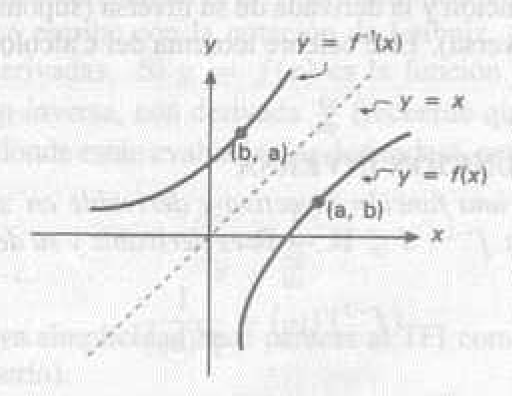


Figura 6.2.4. Las gráficas de una función $f(x)$ y de su inversa $f^{-1}(x)$ son simétricas respecto de la recta $y = x$.

La situación anterior se puede comprobar, por ejemplo, con la función:

$$f : \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\} \to \mathbf{R}$$
$$f(x) = x^2$$

cuya inversa es $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

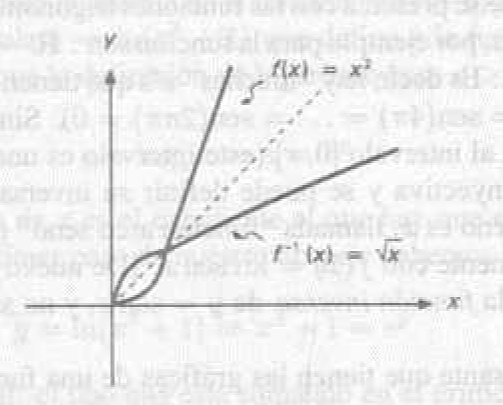


Figura 6.2.5. Las gráficas de la función $f(x) = x^2$, $(x \geq 0)$ y de su inversa $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

6.2.2 EL TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA

Uno de los resultados más importantes del Cálculo es el que establece la relación que existe entre la derivada de una función y la derivada de su inversa (suponiendo que la función dada es derivable y que tiene inversa). Este célebre teorema del Cálculo es el que nos ocupará en esta subsección.

TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA

Sea $f : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *una función inyectiva y derivable en* $x_0 \in I$. *Si* $f'(x_0) \neq 0$, *entonces la función inversa* $f^{-1} : J \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *es derivable y su derivada en* $y_0 = f(x_0)$ *es*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

No haremos la demostración rigurosa de este teorema (al cual nos referiremos de manera abreviada como TFI). Sin embargo, sí podemos darnos cuenta de que la fórmula que en tal teorema se plantea es bastante natural. En efecto, al ser f^{-1} la función inversa de f, sabemos que$(f^{-1} \circ f)(x) = x$ para toda $x \in I$. Si tomamos la derivada respecto de x en ambos miembros de la expresión anterior nos queda que:

$$(f^{-1} \circ f)'(x) = (x)' = 1.$$

La derivada de la composición del lado izquierdo es, según la regla de la cadena,

$$(f^{-1} \circ f)'(x) = (f^{-1})'(f(x))\, f'(x)$$

(es decir, según se establece en la regla de la cadena, la derivada de la composición $(f^{-1} \circ f)(x)$ es igual al producto de la derivada de f^{-1} evaluada en $f(x)$ multiplicada por la derivada de $f(x)$). Si juntamos las dos expresiones anteriores y ponemos la x como x_0 nos queda que

$$(f^{-1})'(f(x_0))\,f'(x_0) = 1$$

de donde, como $y_0 = f(x_0)$ y $f'(x_0) \neq 0$, nos queda finalmente (despejando $(f^{-1})'(y_0)$) la fórmula establecida en el TFI.

Esta fórmula revela un comportamiento sumamente interesante de la derivada de una función respecto de la derivada de su inversa. Hemos presentado el concepto de inversa para una función de manera precisa, como aquella función que al componerse con la función dada produce la función identidad. La palabra "inversa" había ya aparecido en los cursos de álgebra elemental haciendo referencia al "inverso de un número real no nulo": si $z \in \mathbf{R}$ y $z \neq 0$, entonces el inverso de z es $z^{-1} = \frac{1}{z}$. El TFI establece que la derivada de la función *inversa* (con la palabra "inversa" en el sentido de funciones) es la *inversa* (con la palabra "inversa" en el sentido del álgebra elemental) de la derivada de la función dada. Es decir,

$$(f^{-1})'(y_0) = (f'(x_0))^{-1}.$$

Lo llamativo de este resultado es, por una parte, su sencillez y elegancia, y, por otra, el hecho interesante de que el exponente -1 que aparece dos veces en esta fórmula es interpretado de dos maneras distintas: en el lado izquierdo, es simplemente una notación para la función inversa de f, y en el lado derecho denota el inverso multiplicativo del álgebra elemental.

Cuando esta fórmula se escribe con la notación de Leibniz, aparece una relación muy sugestiva entre las dos derivadas. Si $y = f(x)$ es la función dada, con derivada $\frac{dy}{dx}$, y $x = f^{-1}(y)$ es su función inversa, con derivada $\frac{dx}{dy}$ (recuerde que con esta notación no se hace explícito el lugar en donde están evaluadas las derivadas), entonces el TFI nos dice que:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}},$$

la cual es una fórmula cuya simplicidad hace parecer al TFI como una igualdad algebraica trivial (por supuesto, sin serlo).

Veamos cómo funciona este teorema, con algunos ejemplos.

EJEMPLO 6.2.3. Verificar el TFI con la función $f(x) = 2x - 3$ en el punto $x_0 = 1$.

SOLUCIÓN. La función $f(x) = 2x - 3$ es inyectiva y por lo tanto tiene inversa. Como es polinomial, es derivable y $f'(x) = 2$. En particular $f'(1) = 2 \neq 0$, de tal modo que se cumplen todas las hipótesis del TFI. Como $f(1) = 2(1) - 3 = -1$, el TFI nos dice que la derivada de f^{-1} en $y_0 = -1$ es igual a

$$(f^{-1})(-1) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2}.$$

En efecto, si obtenemos explícitamente la inversa de la función dada, despejando a x de $y = 2x - 3$, obtenemos $x = \frac{1}{2}(y + 3)$, de modo que $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x + 3)$, cuya derivada es $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2}$, y, en particular $(f^{-1})'(-1) = \frac{1}{2}$ como habíamos obtenido aplicando el TFI. ★

EJEMPLO 6.2.4. Verifique el TFI con la función $f(x) = 4x^3$ en el punto $x_0 = 2$.

SOLUCIÓN. La función $f(x) = 4x^3$ es inyectiva y por lo tanto tiene inversa. Es también una función derivable en todo su dominio (en particular lo es en $x_0 = 2$) y $f'(2) = 12(2)^2 = 48 \neq 0$. Como $y_0 = f(x_0) = f(2) = 4(2)^3 = 32$, el TFI nos dice que la derivada de $f^{-1}(y)$ evaluada en $y_0 = 32$ es:

$$(f^{-1})'(32) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{48}.$$

En efecto, sabemos que la inversa de la función dada es $f^{-1}(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$, cuya derivada es $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{3}-1}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{12}\left(\frac{x}{4}\right)^{-\frac{2}{3}}$. Poniendo $x = 32$ nos queda:

$$(f^{-1})'(32) = \frac{1}{12}\left(\frac{32}{4}\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{12\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{(12)(4)} = \frac{1}{48}.$$

★

EJEMPLO 6.2.5. Considere la función inyectiva $f(x) = x^5 + x + 3$. Calcule la derivada de la función inversa $f^{-1}(y)$ en $y_0 = 5$.

SOLUCIÓN. Al pedirse la derivada de la función $x = f^{-1}(y)$ lo primero que se nos puede ocurrir es hacer explícita esta función. Sin embargo, esto no siempre es posible (de hecho, en este ejemplo no es posible, pues para lograrlo tendríamos que resolver la ecuación de quinto grado $y = x^5 + x + 3$, y las obstrucciones algebraicas de esta ecuación impiden hacer explícita esta solución). Sin embargo el TFI nos dice cómo podemos calcular la derivada deseada sin recurrir a la fórmula de la inversa de la función. Queremos calcular $(f^{-1})'(5)$. Si $5 = f(x_0)$ para algún x_0 (el cual debe ser único, pues la función es inyectiva), el TFI nos dice que tal derivada es $(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(x_0)}$. Es fácil adivinar cuál es el x_0 que tiene por imagen a $y_0 = 5$. Se trata de $x_0 = 1$, pues $f(1) = (1)^5 + 1 + 3 = 5$. Como $f'(x) = 5x^4 + 1$, tenemos $f'(1) = 5(1)^4 + 1 = 6$, de modo que

$$(f^{-1})'(5) = \frac{1}{6}.$$

★

EJEMPLO 6.2.6. Verifique el TFI con la función $f(x) = 5\ln x + 2$ en el punto $p = (1, 2)$.

SOLUCIÓN. El TFI establece que la derivada de la función inversa en $y = 2 = f(1)$ se puede calcular como: $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)}$. Como $f'(x) = 5\left(\frac{1}{x}\right)$, tenemos $f'(1) = 5$. Entonces, usando el TFI nos queda que:

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{5}.$$

Por otra parte, podemos hacer explícita la función $f^{-1}(y)$, despejando x en términos de y de la expresión de la función dada $y = 5\ln x + 2$. Obtenemos que $x = f^{-1}(y) = e^{\frac{y-2}{5}}$. Al derivar directamente esta expresión obtenemos:

$$(f^{-1})'(y) = e^{\frac{y-2}{5}}\left(\frac{1}{5}\right),$$

de modo que al poner $y = 2$, obtenemos:

$$(f^{-1})'(2) = e^{\frac{2-2}{5}}\left(\frac{1}{5}\right) = e^{0}\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5},$$

que es el mismo resultado obtenido anteriormente con el TFI.

★

EJEMPLO 6.2.7. Considere la función inyectiva $y = f(x) = x^7 + 3x^3 + 2$. Calcular la derivada de la función inversa f^{-1} en $y = 6$.

SOLUCIÓN. Observe que para $x = 1$ tenemos $f(1) = (1)^7 + 3(1)^3 + 2 = 6$, de modo que según el TFI tenemos:

$$(f^{-1})'(6) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{[7x^6 + 9x^2]_{x=1}} = \frac{1}{7(1)^6 + 9(1)^2} = \frac{1}{16}.$$

(Uamos la notación $[*]_{x=a}$ para indicar el valor de $*$ en $x = a$.)

★

6.2.3 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Ahora vamos a usar el TFI que vimos en la subsección anterior para obtener las derivadas de algunas funciones trigonométricas inversas con las que trabajaremos en este curso. En particular, obtendremos las derivadas de las funciones $y = \operatorname{arcsen} x$, $y = \arccos x$ y $y = \arctan x$. Como sabemos, estas funciones son las inversas de $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$ y $y = \tan x$, respectivamente, las cuales no son inyectivas. Lo que se hace es convenir en un intervalo del dominio de estas últimas funciones en las que sean inyectivas y ahí definir su inversa: para $y = \operatorname{sen} x$ se toma $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, para $y = \cos x$ se toma $0 \leq x \leq \pi$, y para $y = \tan x$ se toma $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. En concreto, las funciones inversas quedan como $\operatorname{arcsen} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$, y $\arctan : \mathbf{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Enunciaremos los correspondientes resultados sobre las derivadas de estas funciones trigonométricas inversas como teoremas.

TEOREMA 6.2.3.1. *La función* $f(x) = \operatorname{arcsen} x$ *es derivable en el intervalo* $(-1, 1)$ *y su derivada es*

$$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

En efecto, la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es inyectiva y derivable en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y su derivada es $f'(x) = \cos x \neq 0$ para toda $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. El TFI establece que la función inversa $f^{-1}(x) = \operatorname{arcsen} x$ es derivable en cualquier $y = f(x)$, con $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, y que su derivada evaluada en tal y es $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$. Es decir:

$$(\text{arcsen})'(\text{sen}\, x) = \frac{1}{(\text{sen}\, x)'} = \frac{1}{\cos x}. \tag{A}$$

Para tener esta fórmula de una manera más explícita, debemos decir cuál es la derivada de la función arcsen *evaluada en* x, *y no en* $\text{sen}\, x$. Se trata de un simple cambio de variable: llamemos $y = \text{sen}\, x$. En tal caso, de la identidad trigonométrica $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, obtenemos que $\cos x = \sqrt{1 - \text{sen}^2 x} = \sqrt{1 - y^2}$ (en realidad de la identidad trigonométrica mencionada se concluye que $\cos x = \pm\sqrt{1 - y^2}$, pero, para el intervalo que estamos considerando $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, se tiene $\cos x > 0$). Entonces la fórmula (A) se ve como:

$$(\text{arcsen})'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}},$$

o bien, usando como es costumbre la letra x,

$$(\text{arcsen}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Un argumento completamente análogo al anterior nos conduce a los siguientes resultados.

TEOREMA 6.2.3.2. *La función* $f(x) = \arccos x$ *es derivable en el intervalo* $(-1, 1)$ *y su derivada es*

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

TEOREMA 6.2.3.3. *La función* $f(x) = \arctan x$ *es derivable en el intervalo* $(-1, 1)$ *y su derivada es*

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

En resumen, tenemos tres nuevas fórmulas de derivación que debemos aprender:

1. $(\text{arcsen}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
2. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
3. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

EJEMPLO 6.2.8. Obtenga la derivada de la función $f(x) = 7x^2 \arctan x$.
SOLUCIÓN. Se trata de un producto de funciones, de modo que:

$$f'(x) = (7x^2 \arctan x)' = (7x^2)(\arctan x)' + (\arctan x)(7x^2)'$$

$$= (7x^2)\left(\frac{1}{1 + x^2}\right) + (\arctan x)(14x) = \frac{7x^2}{1 + x^2} + 14x \arctan x.$$

⋆

EJEMPLO 6.2.9. Obtenga la derivada de la función $F(x) = 2\operatorname{arcsen}\left(\frac{3}{x}\right)$.

SOLUCIÓN. La función dada es la composición de la función $f(x) = 2\operatorname{arcsen} x$ con la función $g(x) = \frac{3}{x}$ (es decir, $F(x) = f(g(x))$). De modo que, por la regla de la cadena, tenemos:

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x) = \left[(2\operatorname{arcsen})'\left(\frac{3}{x}\right)\right]\left(\frac{3}{x}\right)'$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{x}\right)^2}}\left(-\frac{3}{x^2}\right) = -\frac{6}{x^2\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}.$$

★

EJEMPLO 6.2.10. Obtenga la derivada de la función $F(x) = \arctan^5\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$.

SOLUCIÓN. La función dada es la composición de las funciones $f(x) = x^5$ (cuya derivada es $f'(x) = 5x^4$), con $g(x) = \arctan x$ (cuya derivada es $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$) y con $h(x) = \frac{x}{1+x^2}$ (cuya derivada es $h'(x) = \frac{(1+x^2)(x)' - x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$). Es decir, $F(x) = f\left(g\left(h(x)\right)\right)$. Por la regla de la cadena, la derivada de $F(x)$ es:

$$F'(x) = f'\left(g\left(h(x)\right)\right) g'\left(h(x)\right) h'(x)$$

$$= \left[5\arctan^4\left(\frac{x}{1+x^2}\right)\right]\left[\frac{1}{1+\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2}\right]\left[\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\right] \xrightarrow{\text{simplificamos el segundo corchete}}$$

$$= \left[5\arctan^4\left(\frac{x}{1+x^2}\right)\right]\left[\frac{(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2+x^2}\right]\left[\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\right] = \frac{5(1-x^2)\arctan^4\left(\frac{x}{1+x^2}\right)}{x^4+3x^2+1}.$$

★

EJEMPLO 6.2.11. Calcule la derivada de la función $F(x) = 2^{2\arctan(2^{2\operatorname{arcsen} x})}$.

SOLUCIÓN. La función dada es la composición $F(x) = f\left(g\left(f\left(h(x)\right)\right)\right)$ en donde $f(x) = 2^{2x}$ (cuya derivada es $f'(x) = 2^{2x}(2)\ln 2$), $g(x) = \arctan x$ (cuya derivada es $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$) y $h(x) = \operatorname{arcsen} x$ (cuya derivada es $h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$). Entonces, la derivada de $F(x)$ es:

$$F'(x) = f'\left(g\left(f\left(h(x)\right)\right)\right) g'\left(f\left(h(x)\right)\right) f'\left(h(x)\right) h'(x)$$

$$= \left[2^{2\arctan(2^{2\operatorname{arcsen} x})}(2)\ln 2\right]\left[\frac{1}{1+\left(2^{2\operatorname{arcsen} x}\right)^2}\right]\left[2^{2\operatorname{arcsen} x}(2)\ln 2\right]\left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$

$$= \frac{4\left(\ln^2 2\right)\left(2^{2\,\text{arcsen}\,x}\right)\left(2^{2\arctan(2^{2\,\text{arcsen}\,x})}\right)}{\left[1+2^{4\,\text{arcsen}\,x}\right]\sqrt{1-x^2}}.$$

★

EJERCICIOS (6.2)

En los ejercicios 1 al 10, verifique que la función dada es inyectiva y determine su inversa; indique el dominio y el rango de esta última.

1. $f(x) = 3x - 2$.
2. $f(x) = 1 - 10x$.
3. $f(x) = x^3 + 1$.
4. $f(x) = (2x+1)^3 - 2$.
5. $f(x) = \frac{1}{x+1}$.
6. $f(x) = 2 - \frac{3}{1-x}$.
7. $f(x) = (x-1)^2 + 1, x \geq 1$.
8. $f(x) = (x-1)^2 + 1, x \leq 1$.
9. $f(x) = \sqrt[3]{3x+4} + 1$.
10. $f(x) = 3 - 2(1-x^5)^3$.

11. Sea $f(x)$ una función inyectiva cuya gráfica pasa por el punto $(1,1)$. Suponga que $f'(1) = 3$. Determine $(f^{-1})'(1)$.

12. Sea $f(x)$ una función inyectiva cuya gráfica pasa por el punto $(2,5)$ tal que $f'(2) = 4$. Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f^{-1}(x)$ en el punto de abscisa $x = 5$.

13. Sea $f(x)$ una función inyectiva cuya gráfica pasa por el punto (a,b). Suponga que $f'(a) = 1$. Determine $(f^{-1})'(b)$.

14. Verifique el TFI con la función $f(x) = (x-1)^3 + 1$, en el punto $(2,2)$.

15. Verifique el TFI con la función $f(x) = \frac{3}{x+2} + 1$, en el punto $(1,2)$.

En los ejercicios 16 al 25, suponga que $\varphi(x)$ es una función derivable. Determine la derivada de la función dada.

16. $f(x) = \arctan \varphi^2(x)$.
17. $f(x) = \varphi(\arctan x)$.
18. $f(x) = \text{arcsen}\,\frac{1}{\varphi(x)}$.
19. $f(x) = \text{arcsen}\,\varphi(x) + \arccos \varphi(x)$.
20. $f(x) = \varphi^3(x) \arccos x$.
21. $f(x) = \varphi(x + \text{arcsen}\,x)$.
22. $f(x) = \varphi(x \arccos x)$.
23. $f(x) = x^2 \varphi(\arctan^2 x)$.

24. $f(x) = \varphi(\arctan \varphi(x))$. **25.** $f(x) = \arctan(1 + \varphi(\operatorname{arcsen} x))$.

26. Verifique el TFI con la función $f(x) = 2\tan x$, en el punto $(0, 0)$.

27. Verifique el TFI con la función $f(x) = 3 \operatorname{sen} x + 2$, en el punto $(0, 2)$.

28. Verifique el TFI con la función $f(x) = 3 \arccos(3x)$, en el punto $(0, \frac{3\pi}{2})$.

6.3 DERIVACIÓN DE FUNCIONES IMPLÍCITAS

Todas las funciones con las que hemos trabajado hasta este momento son tales que la regla por medio de la cual se asocia a cada x del dominio de la función, su imagen $f(x) \in \mathbf{R}$, es una regla que se ve de manera explícita en la fórmula $y = f(x)$. Por ejemplo, en la función $f(x) = x^3 + 2$, vemos que cada $x \in \mathbf{R}$, sufre un proceso en el cual tal x se eleva al cubo y luego se le suma 2 a este resultado, con lo que se obtiene la imagen $f(x)$. A este tipo de funciones las llamaremos *funciones explícitas*, para distinguirlas (cuando así sea necesario) de una nueva manera de expresar a una función que producirá las llamadas *funciones implícitas* que estudiaremos en esta sección. Por ejemplo, si consideramos la expresión $y^5 + y + 2x = 0$, vemos que para cada valor $x = x_0 \in \mathbf{R}$, existe un único valor $y_0 \in \mathbf{R}$ que la satisface (es decir, tal que $y_0^5 + y_0 + 2x_0$ es idénticamente cero). Por ejemplo, para $x_0 = -1$, tenemos $y_0 = 1$, pues $y_0^5 + y_0 + 2x_0 = (1)^5 + 1 + 2(-1) = 0$. Para $x_0 = 2$, el valor correspondiente de y_0 lo obtenemos al resolver la ecuación $y^5 + y + 2(2) = 0$. Podemos entonces pensar en una función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, tal que $f(-1) = 2$, $f(2)$ =solución de la ecuación $y^5 + y + 4 = 0$, etcétera. Ésta es una regla tal que a cada $x \in \mathbf{R}$ le asocia un único $y \in \mathbf{R}$ que cumple con la expresión $y^5 + y + 2x = 0$. Es pues, una función. Acontece que en esta función *no vemos de manera explícita lo que la función f hace con x para obtener la imagen $f(x)$*. Decimos, entonces, que esta función está dada de manera *implícita* en la expresión $y^5 + y + 2x = 0$. En general, se tiene la siguiente definición:

Se dice que $f : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es una **función implícita** *dada en la expresión $F(x, y) = 0$ si $F(x, f(x)) = 0$ para toda $x \in I$.*

Observe que una función implícita podría hacerse explícita si pudiéramos despejar a y en términos de x, obteniendo así la expresión $y = f(x)$. Por ejemplo, si consideramos la función $y = f(x)$ dada implícitamente en la expresión $\ln(2x + y) - 8x + 5 = 0$, podemos de ésta despejar a y en términos de x quedándonos $y = f(x) = e^{8x-5} - 2x$. Ésta es la forma explícita de la función que dijimos que estaba dada implícitamente en la expresión $\ln(2x+y) - 8x + 5 = 0$.

Sin embargo, no siempre es posible hacer explícita una función que está dada en forma implícita: de hecho en el ejemplo expuesto previamente, $y^5+y+2x=0$, no es posible despejar a y en términos de x. Hay muchas funciones importantes en Matemática que se expresan implícitamente, y que no pueden hacerse explícitas. Eventualmente estaremos interesados en calcular la derivada de tales funciones. Así como en la sección anterior vimos que no era necesario hacer explícita la inversa de una función para calcular su derivada (pues conociendo la derivada de la función dada podemos conocer la de la inversa), también veremos que no hay necesidad de tener una función en forma explícita $y = f(x)$ para calcular su derivada. En esta sección aprenderemos a calcular derivadas de funciones implícitas.

Es importante aclarar que en una expresión del tipo $F(x, y) = 0$ pueden estar incluidas *varias* funciones implícitas $y = f(x)$. Por ejemplo, si consideramos la expresión $x^2 + y^2 - 1 = 0$, en ella se encuentran al menos dos funciones $y = f(x)$ (que las obtenemos al despejar la y en términos de x), a saber $f_1(x) = \sqrt{1-x^2}$ y $f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$. Podríamos pensar en alguna otra función más sofisticada que esté incluida en $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, como por ejemplo $f_3 : [-1, 1] \to \mathbf{R}$,

$$f_3(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{si } -1 \le x \le 0 \\ -\sqrt{1-x^2} & \text{si } 0 < x \le 1. \end{cases}$$

Ciertamente se tiene también $x^2 + (f_3(x))^2 - 1 = 0$ para toda $x \in [-1, 1]$. Es decir, $f_3(x)$ es también una función implícita incluida en $x^2 + y^2 = 1$. Cuando digamos "la función implícita dada en la expresión $x^2 + y^2 - 1 = 0$" nos estaremos refiriendo a *alguna* de las funciones $y = f(x)$ que en tal expresión se encuentran.

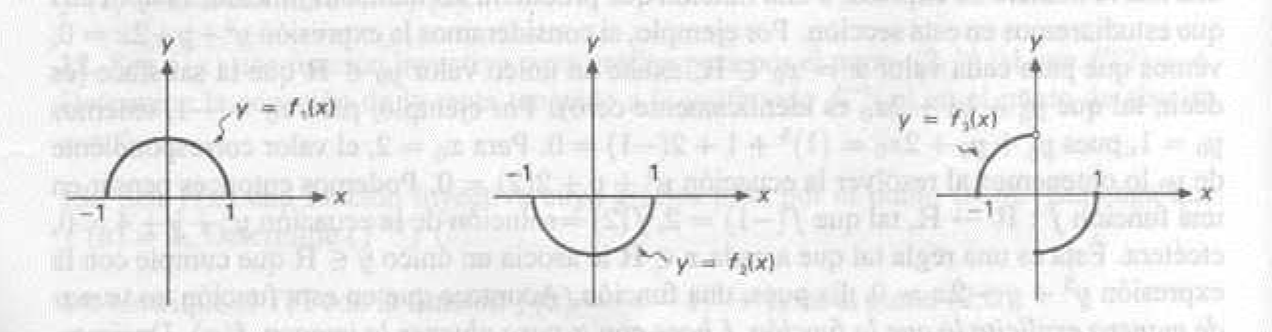


Figura 6.3.1. La expresión $x^2 + y^2 = 1$ contiene a las funciones implícitas $f_1(x) = \sqrt{1-x^2}$, $f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$ y $f_3(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{si } -1 \le x \le 0 \\ -\sqrt{1-x^2} & \text{si } 0 < x \le 1. \end{cases}$

La técnica por medio de la cual obtenemos la derivada de una función dada en forma implícita, se conoce como **derivación implícita.** En ella se establece que si la expresión $F(x, y) = 0$ define de manera implícita alguna función $y = f(x)$, la derivada de ésta se puede obtener derivando término a término (respecto de x) la expresión dada, *recordando siempre que y es una función de x y aplicando correctamente la regla de la cadena.* Este énfasis es fundamental al aplicar la derivación implícita. Por ejemplo, suponga que un término de la expresión $F(x, y) = 0$ es y^2. Al llegar a él pensamos: "Debemos derivar respecto de

x la función y^2". Entonces debemos recordar la regla de la cadena: en realidad y^2 es la función $y = f(x)$ elevada al cuadrado (es decir, es la composición de la función $z = u^2$ con $u = f(x)$), de modo que su derivada sería $(y^2)' = 2f(x)f'(x) = 2yy'$ (el producto de la derivada de $z = u^2$ evaluada en la función $u = f(x)$, multiplicada por la derivada de esta última función). Cuando se deriva término a término la expresión $F(x, y) = 0$ quedarán en algunas partes la derivada y' que aparecerá como factor de algunos de los sumandos. Ésta es justamente la derivada que queremos calcular. Entonces simplemente la despejamos y obtendremos a $y' = f'(x)$ en términos de x y de $y = f(x)$.

Nos podríamos preguntar qué sucede si aplicamos la derivación implícita a una expresión $F(x, y) = 0$ en la que esté definida más de una función $y = f(x)$, ¿de cuál de estas funciones es la derivada y' que se obtiene? La respuesta es muy sencilla: la expresión de y' que obtengamos es la de la derivada de *cualquiera* de las funciones que se encuentren involucradas en $F(x, y) = 0$. Por ejemplo, consideremos la expresión $x^2 + y^2 - 1 = 0$, en la cual, como ya vimos, están involucradas las funciones $f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$ y $f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$. Aplicando la técnica de derivación implícita, derivamos término a término la expresión $x^2 + y^2 - 1 = 0$ para obtener: $(x^2)' + (y^2)' - (1)' = 0$, en donde la $'$ significa, como dijimos anteriormente, derivada respecto de x. Si hacemos las derivadas indicadas, nos queda $2x + 2yy' = 0$, de donde, despejamos y' y obtenemos:

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

La pregunta que nos hacemos es: ¿de cuál de las dos funciones $y = f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$ o $y = f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ es $y' = -\frac{x}{y}$ la derivada? La respuesta es: de las dos. En efecto, si consideramos la primera función $y = f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$ y calculamos su derivada, obtenemos:

$$y' = \left(\frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}}\right)(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{y},$$

(el mismo resultado obtenido con derivación implícita), y si consideramos la segunda función $y = f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$, obtenemos su derivada como:

$$y' = \left(-\frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}}\right)(-2x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{-\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{y},$$

(de nuevo el mismo resultado obtenido con derivación implícita).

Con la técnica de derivación implícita, es posible justificar la fórmula para la derivada de la función $f(x) = x^n$ en el caso de que n sea un número racional (ya lo hemos hecho para n entero). En efecto, si $n = \frac{p}{q}$, en donde $p, q \in \mathbf{Z}$, $q \neq 0$, la función $f(x) = x^n$ se puede escribir como $y = x^{\frac{p}{q}}$, o bien como $y^q = x^p$. Si derivamos término por término (pensando en $y^q = x^p$ como una expresión que define implícitamente a $y = f(x)$), y em-

pleamos el conocido resultado de la derivada de x elevada a una potencia entera, nos queda $qy^{q-1}y' = px^{p-1}$, de donde

$$y' = \frac{p}{q}\left(\frac{x^{p-1}}{y^{q-1}}\right) = \frac{p}{q}\left(\frac{x^{p-1}}{\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1}}\right) = \frac{p}{q}\left(\frac{x^{p-1}}{x^{p-\frac{p}{q}}}\right) = \frac{p}{q}x^{p-1-p+\frac{p}{q}} = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1} = nx^{n-1}$$

con lo que se obtiene de nuevo la conocida fórmula de la derivada de $f(x) = x^n$.

Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 6.3.1. Obtenga la derivada de la función $y = f(x)$ dada implícitamente en la expresión $x^2y + 3x + 2y - 6 = 0$.

SOLUCIÓN. Al derivar el primer término de esta expresión nos encontramos con un producto de x^2 con y. Debemos recordar que y es una función de x. Por lo tanto, al derivar el primer término, lo tenemos que hacer con la regla de la derivada de un producto. Obtenemos:

$$(x^2y)' + (3x)' + (2y)' - (6)' = 0.$$

Al desarrollar las operaciones:

$$(x^2)(y)' + (y)(x^2)' + 3 + 2y' = 0,$$

o bien:

$$x^2y' + 2xy + 3 + 2y' = 0,$$

de donde, finalmente se obtiene:

$$y' = -\frac{3 + 2xy}{x^2 + 2}.$$

Ésta es la derivada de la función $y = f(x)$ dada implícitamente en $x^2y + 3x + 2y - 6 = 0$.

★

EJEMPLO 6.3.2. Obtenga la derivada de la función $y = f(x)$ dada implícitamente en la expresión $4\,\mathrm{sen}(x + y) + 3x + 2y = 0$.

SOLUCIÓN. Si derivamos término por término obtenemos:

$$(4\,\mathrm{sen}(x + y))' + (3x)' + (2y)' = 0.$$

Para obtener la derivada del primer sumando, debemos aplicar la regla de la cadena, pues se trata de la composición de la función $z = \mathrm{sen}\, u$ con $u = x + y$. Nos queda entonces:

$$4\,[\cos(x + y)]\,[1 + y'] + 3 + 2y' = 0,$$

de donde, al despejar y' se obtiene:

$$y' = -\frac{3 + 4\cos(x + y)}{2 + 4\cos(x + y)}.$$

★

EJEMPLO 6.3.3. Obtenga la derivada de la función $y = f(x)$ dada implícitamente en la expresión $3xy - 2\arctan\frac{y}{x} + \frac{\pi}{2} - 3 = 0$, en el punto $(1, 1)$.

SOLUCIÓN. Tomando la derivada de cada término nos queda:

$$(3xy)' - \left(2\arctan\frac{y}{x}\right)' + \left(\frac{\pi}{2} - 3\right)' = 0.$$

Nuevamente, al desarrollar la derivada del primer sumando, lo debemos hacer con la regla de la derivada de un producto. Para el segundo sumando debemos aplicar la regla de la cadena: se trata de la composición de las funciones $g(x) = \arctan x$ con $h(x) = \frac{y}{x}$ (recordando que a su vez, $y = f(x)$). Nos queda entonces:

$$3\left[xy' + y(x)\right] - 2\left(\frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}\right)\left(\frac{xy' - y(x)}{x^2}\right) = 0.$$

Al simplificar obtenemos:

$$3xy' + 3y - \frac{2(xy' - y)}{x^2 + y^2} = 0,$$

de donde, al despejar y' queda:

$$y' = -\frac{y(3x^2 + 3y^2 + 2)}{x(3x^2 + 3y^2 - 2)}.$$

Si evaluamos en el punto $(1, 1)$ (es decir, poniendo $x = 1$ y $y = 1$), obtenemos que:

$$y' = -\frac{(1)(3 + 3 + 2)}{(1)(3 + 3 - 2)} = -\frac{8}{4} = -2.$$

★

EJERCICIOS (6.3)

En los ejercicios 1 al 5, obtenga la derivada de la función $y = f(x)$ dada implícitamente por la expresión indicada: (a) haciendo primeramente explícita la función $y = f(x)$ y derivándola directamente, (b) derivando implícitamente la expresión dada.

1. $3x + 8y - xy = 1$.

2. $xe^{2y+1} + 1 - x = 0$.

3. $x^2 + 2y^3 - 2x = 1$.

4. $\tan(xy) + x = 2$.

5. $x\operatorname{sen} y + 3 - x^2 = 0$.

En los ejercicios 6 al 10, obtenga la derivada de la función $y = f(x)$ dada implícitamente por la expresión indicada.

6. $x^2 + 3xy + y^3 - 4 = 0.$

7. $\operatorname{sen}(x + y) + x + 3y = 2.$

8. $e^{xy} + x^2 - y^2 = 1.$

9. $\arctan(x^2 + y^2) + xy = 1.$

10. $\ln\left(1 + \sqrt{x^2 + y^2}\right) - x + y = 0.$

11. Considere la función $y = f(x)$ dada implícitamente por la expresión $x^3 + 3xy^3 + y = 5$. Calcule $f'(x)$ en el punto $(1, 1)$.

12. Considere la función $y = f(x)$ dada implícitamente por la expresión $\arctan(x+y)+y = \frac{\pi}{4}$. Calcule $f'(x)$ en el punto $(1, 0)$.

6.4 DERIVACIÓN LOGARÍTMICA

Algunas veces la expresión que define a una función $f(x)$ se simplifica enormemente si consideramos la nueva función $F(x) = \ln f(x)$. Esto ocurre, por ejemplo, si en $f(x)$ hay muchos productos, cocientes y/o potencias, pues en tal caso en $\ln f(x)$ aparecerán, respectivamente, sumas, restas y productos de las potencias por los logaritmos respectivos. Las propiedades que se encargan de estas simplificaciones son las conocidas propiedades de los logaritmos: si A y B son números positivos, entonces:

$$\ln(AB) = \ln A + \ln B$$

$$\ln\frac{A}{B} = \ln A - \ln B$$

y

$$\ln A^n = n \ln A$$

en donde n es un número real.

Por ejemplo, si consideramos la función

$$f(x) = \frac{(x+3)^4(3x+1)^5(x+8)^6}{(4x^2+3)^3(x^2+1)},$$

su logaritmo es la nueva función:

$$F(x) = \ln f(x) = \ln \frac{(x+3)^4(3x+1)^5(x+8)^6}{(4x^2+3)^3(x^2+1)}$$

$$= 4\ln(x+3) + 5\ln(3x+1) + 6\ln(x+8) - 3\ln(4x^2+3) - \ln(x^2+1).$$

Es claro que el cálculo de la derivada de una función $y = f(x)$ como la anterior es mucho más complicado que el cálculo de la derivada de $F(x) = \ln f(x)$. Esta idea sugiere que para obtener la derivada y' de este tipo de funciones $y = f(x)$, tomemos primeramente el logaritmo en ambos lados de la expresión que define a la función, para obtener $\ln y = \ln f(x)$ y veamos esta última expresión como una función $y = f(x)$ definida implícitamente. Al derivar obtendríamos:

$$\frac{1}{y}y' = (\ln f(x))',$$

de donde:

$$y' = y\,(\ln f(x))'$$

y se entiende que la derivada indicada es sencilla de calcular. Esta técnica es conocida como **derivación logarítmica** y se emplea, como ya decíamos, cuando en $f(x)$ hay productos, cocientes y/o potencias, o bien, en funciones del tipo $y = (\varphi(x))^{\psi(x)}$, pues en ellas se tendría $\ln y = \psi(x)\ln\varphi(x)$ cuya derivada se obtiene sin dificultad.

EJEMPLO 6.4.1. Sea $f(x) = \frac{(x+1)^2(x+2)^3}{x^2+1}$. Encontrar $f'(0)$ al obtener primeramente $f'(x)$ con derivación logarítmica.

SOLUCIÓN. De la expresión de la función $y = \frac{(x+1)^2(x+2)^3}{x^2+1}$ tomamos primeramente logaritmos en ambos lados para obtener:

$$\ln y = 2\ln(x+1) + 3\ln(x+2) - \ln(x^2+1).$$

Derivando implícitamente se obtiene:

$$\frac{1}{y}y' = \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+2} - \frac{1}{x^2+1}(2x).$$

Como en $x = 0$ se tiene $y = f(0) = \frac{(0+1)^2(0+2)^3}{0^2+1} = 8$, de la última expresión se obtiene que:

$$\frac{1}{8}y' = \frac{2}{0+1} + \frac{3}{0+2} - \frac{1}{0^2+1}(2(0)),$$

de donde $y' = 8\left(2 + \frac{3}{2}\right) = \frac{56}{2}$.

EJEMPLO 6.4.2. Sea $f(x) = x^x$. Encontrar $f'(x)$.
SOLUCIÓN. Si tomamos logaritmos en $y = x^x$ se obtiene:

$$\ln y = x \ln x.$$

Al derivar implícitamente:

$$\frac{1}{y}y' = x\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x,$$

de donde:

$$y' = y\,(1 + \ln x).$$

Es decir:

$$f'(x) = x^x(1 + \ln x).$$

★

EJEMPLO 6.4.3. Sea $f(x) = \left(\frac{2+\cos^2 x}{1+x^4}\right)^{(1+\operatorname{sen}^2 x)}$. Encontrar $f'(x)$.

SOLUCIÓN. Si se toman logaritmos en $y = \left(\frac{2+\cos^2 x}{1+x^4}\right)^{(1+\operatorname{sen}^2 x)}$ se obtiene:

$$\ln y = (1 + \operatorname{sen}^2 x)\ln\left(\frac{2+\cos^2 x}{1+x^4}\right) = (1 + \operatorname{sen}^2 x)\left(\ln(2 + \cos^2 x) - \ln(1 + x^4)\right).$$

Al derivar implícitamente:

$$\tfrac{1}{y}y' = (1 + \operatorname{sen}^2 x)\left(\tfrac{1}{2+\cos^2 x}(2\cos x)(-\operatorname{sen} x) - \tfrac{1}{1+x^4}(4x^3)\right) + 2\operatorname{sen} x\cos x\ln\left(\tfrac{2+\cos^2 x}{1+x^4}\right),$$

de donde:

$$y' = y\left[(1 + \operatorname{sen}^2 x)\left(-\tfrac{\operatorname{sen} 2x}{2+\cos^2 x} - \tfrac{4x^3}{1+x^4}\right) + \operatorname{sen} 2x\ln\left(\tfrac{2+\cos^2 x}{1+x^4}\right)\right].$$

Es decir:

$$f'(x) = \left(\tfrac{2+\cos^2 x}{1+x^4}\right)^{(1+\operatorname{sen}^2 x)}\left[(1 + \operatorname{sen}^2 x)\left(-\tfrac{\operatorname{sen} 2x}{2+\cos^2 x} - \tfrac{4x^3}{1+x^4}\right) + \operatorname{sen} 2x\ln\left(\tfrac{2+\cos^2 x}{1+x^4}\right)\right].$$

★

EJEMPLO 6.4.4. Sea $f(x) = (1 + x)^{(2+x)^{(3+x)}}$. Encontrar $f'(x)$.
SOLUCIÓN. Al tomar logaritmos en $y = (1 + x)^{(2+x)^{(3+x)}}$ se obtiene:

$$\ln y = (2 + x)^{(3+x)}\ln(1 + x).$$

Podemos tomar nuevamente logaritmos para "bajar" el exponente $3 + x$ que aún queda en la expresión anterior, teniendo el cuidado de que al hacer esto, en el segundo miembro estaremos tomando el logaritmo de un producto. Nos queda entonces:

$$\ln \ln y = \ln \left[(2+x)^{(3+x)} \ln(1+x)\right] = \ln(2+x)^{(3+x)} + \ln\ln(1+x)$$

$$= (3+x)\ln(2+x) + \ln\ln(1+x).$$

Tenemos, pues, la función implícita:

$$\ln \ln y = (3+x)\ln(2+x) + \ln\ln(1+x),$$

de la cual queremos obtener y'. Si derivamos implícitamente:

$$\left(\frac{1}{\ln y}\right)\left(\frac{1}{y}\right) y' = (3+x)\left(\frac{1}{2+x}\right) + \ln(2+x) + \left(\frac{1}{\ln(1+x)}\right)\left(\frac{1}{1+x}\right),$$

de donde:

$$y' = y \ln y \left(\frac{3+x}{2+x} + \ln(2+x) + \frac{1}{(1+x)\ln(1+x)}\right).$$

Es decir:

$$f'(x) = (1+x)^{(2+x)^{(3+x)}} \ln(1+x)^{(2+x)^{(3+x)}} \left(\frac{3+x}{2+x} + \ln(2+x) + \frac{1}{(1+x)\ln(1+x)}\right),$$

o bien:

$$f'(x) = (1+x)^{(2+x)^{(3+x)}} (2+x)^{(3+x)} \ln(1+x) \left(\frac{3+x}{2+x} + \ln(2+x) + \frac{1}{(1+x)\ln(1+x)}\right).$$

⋆

EJEMPLO 6.4.5. Sea $y = f(x)$ la función dada implícitamente en la expresión $(1+x)^y = yx^3$. Encontrar $f'(x)$.

SOLUCIÓN. Se trata de una función implícita en donde ella misma aparece como exponente. Entonces tomamos logaritmos en ambos lados de la expresión dada para obtener:

$$y \ln(1+x) = \ln y + 3 \ln x$$

expresión que puede verse a su vez como una nueva $F(x, y) = 0$ que define a la función implícita $y = f(x)$. Si derivamos implícitamente obtenemos:

$$y\left(\frac{1}{1+x}\right) + y' \ln(1+x) = \frac{1}{y} y' + \frac{3}{x},$$

de donde:

$$y' = \frac{\frac{3}{x} - \frac{y}{1+x}}{\ln(1+x) - \frac{1}{y}},$$

o bien:

$$y' = \frac{3(1+x)y - xy^2}{x(1+x)\,(y\ln(1+x)-1)}.$$

★

EJERCICIOS (6.4)

En los ejercicios 1 al 10, obtenga la derivada indicada de la función $f(x)$ dada, calculando primeramente $f'(x)$ con derivación logarítmica.

1. $f(x) = (x+1)^3(3x+2)^4$, $f'(0) = ?$

2. $f(x) = (x^2+x+1)^3(x^2+x+2)^4(x^2+x+3)^5$, $f'(0) = ?$

3. $f(x) = \left(\dfrac{x^2+3x+1}{x^2+2x+2}\right)^3$, $f'(1) = ?$

4. $f(x) = \dfrac{(x+2)^2(4x+1)^3}{x^2+2}$, $f'(0) = ?$

5. $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}\,\sqrt[3]{x^2-1}$, $f'(0) = ?$

6. $f(x) = \dfrac{\sqrt{5+x}\,\sqrt[4]{2+x}}{(3x+4)^2}$, $f'(-1) = ?$

7. $f(x) = x(x+1)(x+2)^2(x+3)^3$, $f'(1) = ?$

8. $f(x) = \dfrac{(x+1)(x+2)(x+3)}{(x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)}$, $f'(0) = ?$

9. $f(x) = \sqrt{\dfrac{(x^2+1)(x^2+4)}{(x^3+2)(x+2)}}$, $f'(0) = ?$

10. $f(x) = \sqrt{\dfrac{(3x+1)^2(4x+1)^5(5x+1)^7}{(x^2+x+1)^3(x^2+7x+1)^5}}$, $f'(0) = ?$

En los ejercicios 11 al 20, obtenga la derivada de la función dada.

11. $f(x) = (3x)^{(5x)}$.

12. $f(x) = (1+x^2)^x$.

13. $f(x) = \left(\sqrt{1+x}\right)^{\sqrt{x}}$.

14. $f(x) = (1+\sin^2 x)^{\cos x}$.

15. $f(x) = \left((1+x)^2(4+5x)^3\right)^{x^2+x+1}$.

16. $f(x) = x^{x^x}$.

17. $f(x) = (5x)^{(10x)^{(15x)}}$.

18. $f(x) = (\ln x)^{(\ln x)^{\ln x}}$.

19. $f(x) = (x^2+1)^{(x^2+2)^{(x^2+3)}}$.

20. $f(x) = x^{x^{x^x}}$.

21. Calcule la derivada de la función $y = f(x)$ dada implícitamente en la expresión $x^y = y^x$.

22. Calcule la derivada de la función $y = f(x)$ dada implícitamente en la expresión $(x + y)^y = x^2 + y^2$.

23. Sea $\varphi(x)$ una función positiva y derivable. Calcule la derivada de $F(x) = (\varphi(x))^{\varphi(x)}$.

24. Sea $\varphi(x)$ una función positiva y derivable. Calcule la derivada de $F(x) = (\varphi(x^2))^{\varphi(x^3)}$.

6.5 DERIVADAS DE ÓRDENES SUPERIORES

En esta última sección del capítulo, abordaremos el problema de obtener "derivadas de derivadas". Si tenemos una función $f : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivable en el intervalo abierto I (en donde la función está definida), podemos considerar la función $f' : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, que a cada $x \in I$ le asocia la derivada de f en x. Es decir, consideramos la función $y = f'(x)$. Nos podríamos preguntar por la derivabilidad de esta función y nos podría interesar obtener su derivada. En el caso de que la derivada de la función $y = f'(x)$ exista, ésta sería la derivada de $f'(x)$, es decir, la derivada de la derivada de $f(x)$, la cual se escribiría como $(f')'(x)$. En tal caso diremos que la función $f(x)$ es **dos veces derivable.** Una manera más sencilla de escribir la derivada de la derivada de $f(x)$ es (si juntamos las primas en la expresión $(f')'(x)$) como $f''(x)$. Ésta es llamada **segunda derivada** (o **derivada de segundo orden**) **de** $f(x)$. Esta historia puede continuar: si consideramos la función $y = f''(x)$ nos podríamos preguntar por su derivada, la cual sería $(f'')'(x)$ = derivada de la segunda derivada de $f(x)$ = derivada de la derivada de la derivada de $f(x)$, llamada **tercera derivada** (o **derivada de tercer orden**) **de** $f(x)$ y denotada por $f'''(x)$. En el caso de que esta derivada exista, diremos que $f(x)$ es una función **tres veces derivable.** Y así podemos seguir considerando derivadas de órdenes más altos. La notación que se usa para derivadas de órdenes superiores al cuarto es $f^{(4)}(x)$, $f^{(5)}(x)$, etcétera o bien, $f^{iv}(x)$, $f^{v}(x)$, etcétera (respectivamente). Observe la diferencia entre $f^4(x)$, que significa $(f(x))^4$, y $f^{(4)}(x)$ que denota a la derivada de cuarto orden de $f(x)$.

En general, si $n = 2, 3, \ldots$ diremos que la función $f(x)$ es n **veces derivable,** si existe la derivada $\left(f^{(n-1)}(x)\right)'$, la cual es denotada por $f^{(n)}(x)$ y es llamada n**-ésima derivada** (o **derivada de** n**-ésimo orden**) **de** $f(x)$. Cuando $n = 1$, hablamos de la **derivada de primer orden de** $f(x)$, para distinguirla de las derivadas de órdenes superiores de esta función.

Con la notación de Leibniz las derivadas de órdenes superiores de la función $y = f(x)$ se escriben como:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = \text{derivada de segundo orden}$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3} = \text{derivada de tercer orden}$$
$$\vdots$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = \frac{d^ny}{dx^n} = \text{derivada de n-ésimo orden.}$$

Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 6.5.1. Obtenga la derivada de segundo orden de la función $f(x) = (x^2 + 4)e^{-x}$.

SOLUCIÓN. La primera derivada de esta función es:

$$f'(x) = (x^2+4)e^{-x}(-1) + e^{-x}(2x) = (-x^2+2x-4)e^{-x}.$$

La segunda derivada es:

$$f''(x) = (f')'(x) = \left((-x^2+2x-4)e^{-x}\right)'$$

$$= (-x^2+2x-4)e^{-x}(-1) + e^{-x}(-2x+2) = e^{-x}(x^2-4x+6).$$

★

EJEMPLO 6.5.2. Obtenga la derivada de tercer orden de la función $f(x) = xe^x$.

SOLUCIÓN. La primera derivada es:

$$f'(x) = xe^x + e^x = (x+1)e^x.$$

La segunda derivada es:

$$f''(x) = (x+1)e^x + e^x = (x+2)e^x.$$

La tercera derivada es:

$$f'''(x) = (x+2)e^x + e^x = (x+3)e^x.$$

Se podría conjeturar que la n-ésima derivada de la función $f(x) = xe^x$ es:

$$f^{(n)}(x) = (x+n)e^x,$$

en donde $n = 1, 2, \ldots$ Esto es efectivamente cierto. ¿Podría el lector dar una prueba de la validez de este hecho?

★

EJEMPLO 6.5.3. Calcule la cuarta derivada de la función $f(x) = \cos(3x)$.
SOLUCIÓN. La primera derivada es:

$$f'(x) = [-\operatorname{sen}(3x)]\,(3) = -3\operatorname{sen}(3x).$$

La segunda derivada es:

$$f''(x) = -3\,[\cos(3x)]\,(3) = -9\cos(3x).$$

La tercera derivada es:

$$f'''(x) = -9\,[-\operatorname{sen}(3x)]\,(3) = 27\operatorname{sen}(3x).$$

Y por último, la cuarta derivada es:

$$f^{(4)}(x) = 27\,[\cos(3x)]\,(3) = 81\cos(3x).$$

⋆

EJEMPLO 6.5.4. Obtenga la derivada de quinto orden de la función $f(x) = x^2\ln x + x^3 + 2$.
SOLUCIÓN. La primera derivada es:

$$f'(x) = x^2\left(\frac{1}{x}\right) + 2x\ln x + 3x^2 = x + 2x\ln x + 3x^2.$$

La segunda derivada es:

$$f''(x) = 1 + 2x\left(\frac{1}{x}\right) + 2\ln x + 6x = 1 + 2 + 2\ln x + 6x = 3 + 2\ln x + 6x.$$

La tercera derivada es:

$$f'''(x) = 2\left(\frac{1}{x}\right) + 6 = \frac{2}{x} + 6.$$

La cuarta derivada es:

$$f^{(4)}(x) = -\frac{2}{x^2}.$$

Finalmente, la quinta derivada es:

$$f^{(5)}(x) = \left(-2x^{-2}\right)' = -2(-2)x^{-2-1} = 4x^{-3} = \frac{4}{x^3}.$$

⋆

EJEMPLO 6.5.5. Sean $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ funciones dos veces derivables. Considere la función compuesta $F(x) = \varphi(\psi(x))$. Obtener una expresión para $F''(x)$.
SOLUCIÓN. La regla de la cadena estudiada en la sección 1 nos dice que:

$$F'(x) = \varphi'(\psi(x))\,\psi'(x).$$

Ahora tenemos un producto de dos funciones, a saber $\varphi'(\psi(x))$ y $\psi'(x)$. La siguiente derivada la debemos hacer entonces usando la regla del producto:

$$F''(x) = [\varphi'(\psi(x))]\,[\psi'(x)]' + [\psi'(x)]\,[\varphi'(\psi(x))]'.$$

En la expresión anterior es claro que $[\psi'(x)]' = \psi''(x)$. Al hacer la derivada $[\varphi'(\psi(x))]'$ debemos aplicar nuevamente la regla de la cadena, puesto que se quiere determinar la derivada de la composición de φ' con ψ. Esta derivada es, entonces:

$$[\varphi'(\psi(x))]' = \varphi''(\psi(x))\,\psi'(x).$$

Por lo cual, se tiene:

$$\begin{aligned} F''(x) &= [\varphi'(\psi(x))]\,[\psi''(x)] + [\psi'(x)]\,[\varphi''(\psi(x))\,\psi'(x)] \\ &= \varphi'(\psi(x))\,\psi''(x) + \varphi''(\psi(x))\,(\psi'(x))^2. \end{aligned}$$

★

EJEMPLO 6.5.6. Obtenga la segunda derivada de la función $y = f(x)$ dada implícitamente en la expresión $x^5 + y^5 - 1 = 0$.

SOLUCIÓN. La primera derivada la obtenemos al derivar implícitamente:

$$5x^4 + 5y^4y' = 0,$$

de donde:

$$y' = -\frac{x^4}{y^4}.$$

Para obtener la segunda derivada, derivamos la expresión anterior y recordamos que $y = f(x)$ (y entonces lo que está en el miembro derecho de la expresión anterior es un cociente de funciones). Nos queda:

$$\begin{aligned} y'' = (y')' = \left(-\frac{x^4}{y^4}\right)' &= -\frac{y^4(x^4)' - x^4(y^4)'}{(y^4)^2} = -\frac{y^4(4x^3) - x^4(4y^3y')}{y^8} \\ &= -\frac{4y^3(yx^3 - x^4y')}{y^8} = \frac{4(x^4y' - yx^3)}{y^5}. \end{aligned}$$

Observe que el resultado obtenido para y'' involucra a la primera derivada y'. Si queremos dejar nuestro resultado en términos de x y y solamente, sustituimos la expresión de la primera derivada $y' = -\frac{x^4}{y^4}$ en la correspondiente de y'' y queda:

$$y'' = \frac{4(x^4y' - yx^3)}{y^5} = \frac{4\left[x^4\left(-\frac{x^4}{y^4}\right) - yx^3\right]}{y^5} = -\frac{4\left(x^8 + y^5x^3\right)}{y^9}.$$

★

EJEMPLO 6.5.7. Calcule la segunda derivada de la función $y = f(x)$ dada implícitamente por la expresión $x^4 - xy + y^4 = 28$ en el punto $(2, 2)$.

SOLUCIÓN. Al derivar implícitamente la expresión dada se tiene:

$$4x^3 - (xy' + y) + 4y^3y' = 0,$$

de donde, al despejar la y' se obtiene:

$$y' = \frac{y - 4x^3}{4y^3 - x}.$$

Podemos evaluar directamente esta derivada en el punto requerido: si sustituimos $x = 2$ y $y = 2$ obtenemos:

$$y' = \frac{2 - 4(2)^3}{4(2)^3 - 2} = \frac{-30}{30} = -1.$$

Al derivar nuevamente la expresión de y' (el segundo miembro debemos derivarlo según la regla correspondiente para la derivada de un cociente de funciones, y recordando que $y = f(x)$), se obtiene:

$$y'' = \frac{(4y^3 - x)(y' - 12x^2) - (y - 4x^3)(12y^2y' - 1)}{(4y^3 - x)^2}.$$

Puesto que queremos el valor de esta segunda derivada en el punto $(2, 2)$, no hay necesidad de hacer simplificaciones algebraicas: simplemente sustituimos $x = 2$, $y = 2$ y $y' = -1$ (la primera derivada en el punto $(2, 2)$ fue calculada previamente), con lo que obtenemos:

$$y'' = \frac{(4(2)^3 - 2)(-1 - 12(2)^2) - (2 - 4(2)^3)(12(2)^2(-1) - 1)}{(4(2)^3 - 2)^2}$$

$$= \frac{(30)(-49) - (-30)(-49)}{(30)^2} = \frac{-49 - 49}{30} = -\frac{49}{15}.$$

Es decir, la segunda derivada de la función implícita dada en el punto $(2, 2)$ es $-\frac{49}{15}$. ⋆

EJERCICIOS (6.5)

En los ejercicios 1 al 10, calcule la derivada indicada de la función dada.

1. $f(x) = x^4$, $f^{(4)}(x) = ?$

2. $f(x) = \frac{1}{x}$, $f^{(3)}(x) = ?$

3. $f(x) = e^{\alpha x}$, $f^{(n)}(x) = ?$, $n \in \mathbb{N}$.

4. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $f^{(10)}(x) = ?$

5. $f(x) = \arctan x$, $f'''(x) = ?$

6. $f(x) = x^2 \cos x$, $f''(x) = ?$

7. $f(x) = \operatorname{senh} x + \cosh x$, $f^{(23)}(x) = ?$

8. $f(x) = x^2 \ln x$, $f^{(4)}(x) = ?$

9. $f(x) = \ln(x+1)$, $f^{(5)}(x) = ?$

10. $f(x) = \cos 3x$, $f^{(4)}(x) = ?$

11. Considere la función $f(x)$ dada implícitamente por la expresión $x^2 + 3xy + 2y^3 - 6 = 0$. Calcule $f''(x)$ en el punto $(1, 1)$.

12. Considere la función $f(x)$ dada implícitamente por la siguiente expresión: $\arctan(x + y) + x + y = \frac{\pi}{4}$. Calcule $f''(x)$ en el punto $(1, 0)$.

En los ejercicios 13 al 20, suponga que $\varphi(x)$ es una función dos veces derivable. Determine en cada caso la segunda derivada de la función $f(x)$ dada.

13. $f(x) = \varphi(x^2)$.

14. $f(x) = x\varphi(x)$.

15. $f(x) = \varphi(\varphi(2x))$.

16. $f(x) = \varphi(e^x)$.

17. $f(x) = \varphi^2(x)$.

18. $f(x) = \varphi(xe^x)$.

19. $f(x) = \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$.

20. $f(x) = \varphi\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)$.

En los ejercicios 21 al 25, suponga que $\varphi(x)$ es una función n veces derivable. Determine en cada caso la expresión de la $n-$ésima derivada de la función $f(x)$ dada.

21. $f(x) = \varphi(1 + x)$.

22. $f(x) = \varphi(1 - x)$.

23. $f(x) = \varphi(2x + 1)$.

24. $f(x) = 1 + \varphi(-x)$.

25. $f(x) = 3 - \varphi(2 - 3x)$.

26. Sean f y g funciones dos veces derivables. Demuestre que:

$$(fg)''(x) = f(x)g''(x) + 2f'(x)g'(x) + f''(x)g(x).$$

27. Sean f y g funciones tres veces derivables. Demuestre que:

$$(fg)'''(x) = f(x)g'''(x) + 3f''(x)g'(x) + 3f'(x)g''(x) + f'''(x)g(x).$$

28. Generalice los resultados de los dos ejercicios anteriores, demostrando la **fórmula de Leibniz:** si f y g son funciones n veces derivables, entonces:

$$(fg)^{(n)}(x)$$

$$= f(x)g^{(n)}(x) + \binom{n}{1} f'(x)g^{(n-1)}(x) + \ldots + \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x) + \ldots + f^{(n)}(x)g(x),$$

en donde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$ es el llamado coeficiente binomial de n en k.

29. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones dos veces derivables. Demuestre que:

$$(f \circ g)''(x) = f''(g(x))(g'(x))^2 + f'(g(x))g''(x).$$

30. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones tres veces derivables. Demuestre que:

$$(f \circ g)'''(x) = f'''(g(x))(g'(x))^3 + 3f''(g(x))g'(x)g''(x) + f'(g(x))g'''(x).$$

31. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable, con $f'(x) \neq 0$ y con inversa f^{-1} dos veces derivable. Demuestre que la segunda derivada de la función inversa (evaluada en $f(x)$) viene dada por:

$$(f^{-1})''(f(x)) = -\frac{f''(x)}{(f'(x))^3}.$$

6.6 REPASO: DERIVACIÓN DE DIVERSAS FUNCIONES

Quisiéramos terminar este capítulo invitando al estudiante a calcular derivadas de funciones en las que intervienen todo lo que hemos estudiado en el capítulo anterior y en el presente. Se supone que en este momento ya se tienen prácticamente todos los instrumentos para realizar cálculos de derivadas de muchas funciones elementales (algebraicas y trascendentes) y se trata simplemente de ponerlos a trabajar todos a la vez. Presentamos entonces, a manera de repaso, una serie de ejercicios en los que se pide encontrar la derivada de una función dada $f'(x)$ (además de algunos otros cuya solución demanda el cálculo y simplificación de la derivada de alguna función). En ellos se pide además trabajar algebraicamente el resultado de la derivación, para darle a éste el aspecto más sencillo posible.

Por ejemplo, se pide calcular la derivada de la función:

$$f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{9}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1)\right) + \frac{1}{18}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{9}\ln(x-1) - \frac{x^2}{3(x^3-1)}.$$

Ciertamente no habrá problema alguno en obtener la derivada de esta función:

$$f'(x) = -\frac{\sqrt{3}}{9}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1)\right)^2}\right)\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) +$$

$$+\frac{2x+1}{18(x^2+x+1)} - \frac{1}{9(x-1)} - \frac{1}{3}\left(\frac{(x^3-1)(2x) - x^2(3x^2)}{(x^3-1)^2}\right).$$

Lo que resulta poco evidente es que este resultado es en realidad

$$f'(x) = \frac{x}{(x^3-1)^2}.$$

Se trata entonces de operar el resultado obtenido al derivar directamente la función, haciendo simplificaciones en él, hasta que la forma del resultado sea la más simple. Hacemos hincapié en que este proceso es puramente algebraico (la labor del Cálculo termina al momento en que escribimos correctamente la derivada de la función). Presentamos algunos pasos de este proceso. El lector debe seguir cada paso identificando la(s) simplificación(es) que se están realizando en él.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\tfrac{2}{9}\left(\tfrac{1}{1+\frac{1}{3}(4x^2+4x+1)}\right)+\tfrac{2x+1}{18(x^2+x+1)}-\tfrac{1}{9(x-1)}-\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{2x^4-2x-3x^4}{(x^3-1)^2}\right)\\ &= -\tfrac{1}{6(x^2+x+1)}+\tfrac{2x+1}{18(x^2+x+1)}-\tfrac{1}{9(x-1)}-\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{-x^4-2x}{(x^3-1)^2}\right)\\ &= \tfrac{x-1}{9(x^2+x+1)}-\tfrac{1}{9(x-1)}+\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{x^4+2x}{(x^3-1)^2}\right)=\tfrac{x^2-2x+1-(x^2+x+1)}{9(x^2+x+1)(x-1)}+\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{x^4+2x}{(x^3-1)^2}\right)\\ &= \tfrac{-x}{3(x^3-1)}+\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{x^4+2x}{(x^3-1)^2}\right)=\tfrac{-x(x^3-1)+x^4+2x}{3(x^3-1)^2}=\tfrac{x}{(x^3-1)^2}. \quad . \end{aligned}$$

EJERCICIOS DE REPASO (6.6)

En los ejercicios 1 al 80, obtener la derivada de cada una de las funciones dadas. Simplificar al máximo el resultado. (Todos los resultados son de un solo término.)

1. $f(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{arcsen} x - \dfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$.

2. $f(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + \dfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$.

3. $f(x) = -\dfrac{1}{27}e^{-3x}(9x^3+9x^2+6x+2)$.

4. $f(x) = \dfrac{1}{13}e^{2x}\left(2\operatorname{sen}(3x) - 3\cos(3x)\right)$.

5. $f(x) = \dfrac{1}{9}x - \dfrac{1}{27}\ln\left(e^{3x}+9\right)$.

6. $f(x) = e^x + \ln\sqrt{\dfrac{e^x-1}{e^x+1}}$.

7. $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}\arctan x^2$.

8. $f(x) = 3e^{\sqrt[3]{x}}\left(x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} + 2\right)$.

9. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+\operatorname{sen} x+\cos x}{1+\cos x}\right)$.

10. $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{6}\arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan x\right)$.

11. $f(x) = \cos x - \dfrac{4\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cos x\right)$.

12. $f(x) = \ln\left(\sec x + \tan x\right)$.

13. $f(x) = \dfrac{2}{3}\tan x + \dfrac{\operatorname{sen} x}{3\cos^3 x}$.

14. $f(x) = \dfrac{1}{2}(x^2+1)\arctan x - \dfrac{1}{2}x$.

15. $f(x) = -\dfrac{x^2+2}{2(x^2+4)^2}$.

16. $f(x) = \dfrac{1}{30}(x+1)^5(5x-1)$.

17. $f(x) = -\dfrac{x+1}{(x+2)^2}$.

18. $f(x) = \dfrac{3x+1}{6(1-x)^3}$.

19. $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \ln\sqrt{1+x^2}$.

20. $f(x) = \dfrac{1}{15}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}(3x^2-2)$.

21. $f(x) = \dfrac{3}{80}(2x+1)^4(8x-1)$.

22. $f(x) = -\dfrac{5x^2+6x+11}{20(x+1)^6}$.

23. $f(x) = -\dfrac{6x^2+39x+82}{6(x+6)^3}$.

24. $f(x) = \dfrac{1}{8}\ln(2x+3) + \dfrac{16x+17}{16(2x+3)^2}$.

25. $f(x) = \dfrac{1}{2}\arctan x + \dfrac{x}{2(1+x^2)}$.

26. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\dfrac{\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,x\cos x}{2\cos^2 x - 1}\right)$.

27. $f(x) = \dfrac{3}{70}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{4}{3}}\left(14x - 12\sqrt{x} + 9\right)$.

28. $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+\mathrm{sen}\,x}{\cos x}} + \dfrac{\mathrm{sen}\,x}{2\cos^2 x}$.

29. $f(x) = \dfrac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,x\cos^3 x + \dfrac{3}{8}\,\mathrm{sen}\,x\cos x + \dfrac{3}{8}x$.

30. $f(x) = \dfrac{\mathrm{sen}\,x}{2\cos^2 x} - \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+\mathrm{sen}\,x}{\cos x}\right)$.

31. $f(x) = \sqrt{1+e^{2x}} + \ln\left(\sqrt{e^{2x}+1} - 1\right) - x$.

32. $f(x) = \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) - \dfrac{1}{2}\arctan x$.

33. $f(x) = \dfrac{1}{2(1-x)} - \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.

34. $f(x) = \ln\sqrt{1+x^2} + \dfrac{1}{2(1+x^2)}$.

35. $f(x) = \dfrac{1}{2}\arctan\sqrt{x^2-1} - \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2x^2}$.

36. $f(x) = x + 3\ln(x-2) - 7\ln(x+3)$.

37. $f(x) = \ln(x-1)^2 + \dfrac{x^2-2x-1}{x-1}$.

38. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(\dfrac{\sqrt{2(x^2+1)}+x-1}{x+1}\right)$.

39. $f(x) = \dfrac{3}{16}\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) + \dfrac{x(3x^2-5)}{8(x^2-1)^2}$.

40. $f(x) = \dfrac{3}{20}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{2}{3}}\left(5x - 6\sqrt{x} + 9\right)$.

41. $f(x) = \dfrac{3}{8}\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + \dfrac{1}{8}x\sqrt{x^2-1}(2x^2-5)$.

42. $f(x) = -\dfrac{1}{2}\arctan(x+1) - \dfrac{x+4}{2(x^2+2x+2)}$.

43. $f(x) = \frac{9}{4}\arctan x + \frac{9x^3+15x-5}{4(x^2+1)^2}$.

44. $f(x) = -\frac{1}{5}e^x\left(\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen}^2 x - 2\right)$.

45. $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{1+e^x}(4+e^x) + 2\ln\left(\sqrt{1+e^x}-1\right) - x$.

46. $f(x) = \frac{3}{8}\ln\left(\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}\right) - \cos x\left(\frac{3}{8\operatorname{sen}^2 x} + \frac{1}{4\operatorname{sen}^4 x}\right)$.

47. $f(x) = 3(x^2-2)\cos x + (x^3-6x)\operatorname{sen} x$.

48. $f(x) = \frac{1}{2}e^x\left(x\operatorname{sen} x - (x-1)\cos x\right)$.

49. $f(x) = x\ln^4 x - 4x\ln^3 x + 12x\ln^2 x - 24x\ln x + 24x$.

50. $f(x) = \frac{2\sqrt{3}}{9}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1)\right) + \frac{x-1}{3(x^2+x+1)}$.

51. $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + \frac{1}{6}\sqrt{1+x^2}(2x^2+3x+2)$.

52. $f(x) = -e^{\sqrt{x}}\left((x-2\sqrt{x}+1)\cos\sqrt{x} + (1-x)\operatorname{sen}\sqrt{x}\right)$.

53. $f(x) = -e^x\left(\frac{3}{40}\cos 3x - \frac{1}{40}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{8}\cos x - \frac{1}{8}\operatorname{sen} x\right)$.

54. $f(x) = x\left(\ln^3 x - 3\ln^2 x + 6\ln x - 6\right)$.

55. $f(x) = -e^{-x}\left(x^4+4x^3+12x^2+24x+24\right)$.

56. $f(x) = \frac{1}{2}(x^2+1)\arctan^2 x - x\arctan x + \ln\sqrt{x^2+1}$.

57. $f(x) = x\operatorname{arcsen}^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x - 2x$.

58. $f(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\right)\operatorname{arcsen}^2 x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x - \frac{1}{4}x^2$.

59. $f(x) = \frac{1}{4}\operatorname{arcsen}^2 x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x - \frac{1}{4}x^2$.

60. $f(x) = \frac{1}{3}(x^3+1)\ln(x+1) - \frac{1}{18}x(2x^2-3x+6)$.

61. $f(x) = \left(x^2 + 3x + \frac{56}{25}\right)\ln(5x+7) - \frac{1}{10}x(5x+16).$

62. $f(x) = 4\arctan x + \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{1}{2}\right)\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}x(x+8).$

63. $f(x) = \frac{3}{3640}\left(1 + x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}\left(455x^2 - 420x^{\frac{3}{2}} + 378x - 324x^{\frac{1}{2}} + 243\right).$

64. $f(x) = \frac{1}{10}\arctan x + \frac{3}{20}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\ln(x-1) + \frac{1}{5}\ln(x+2).$

65. $f(x) = x^2\left(\frac{1}{2}\ln^3 x - \frac{3}{4}\ln^2 x + \frac{3}{4}\ln x - \frac{3}{8}\right).$

66. $f(x) = \arctan e^x + \frac{e^x\left(e^{2x}-1\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2}.$

67. $f(x) = 3e^{x^{\frac{1}{3}}}\left(x^{\frac{5}{3}} - 5x^{\frac{4}{3}} + 20x - 60x^{\frac{2}{3}} + 120x^{\frac{1}{3}} - 120\right).$

68. $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2e^x - 1)\right) - \frac{1}{6}\ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right) + \frac{1}{3}\ln(e^x + 1).$

69. $f(x) = \frac{1}{8}x\sqrt{1+x^2}(2x^2+1) - \frac{1}{8}\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$

70. $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)\right) + \frac{1}{24}\ln(x^2 - 2x + 4) - \frac{1}{12}\ln(x+2).$

71. $f(x) = -\frac{2}{5}x\,\mathrm{sen}(\ln x)\cos(\ln x) + \frac{1}{5}x\,\mathrm{sen}^2(\ln x) + \frac{2}{5}x.$

72. $f(x) = \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x\right)\mathrm{sen}\, x\cos x + \frac{3}{8}(1 - 2x^2)\,\mathrm{sen}^2 x + \frac{1}{8}x^2(x^2+3).$

73. $f(x) = e^x\left(\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)\cos x + \frac{1}{2}(x-1)^2\,\mathrm{sen}\, x\right).$

74. $f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1)\right) - \frac{1}{6}\ln(x^2 + x + 1) + \frac{1}{3}\ln(x-1).$

75. $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(x + 2 + \sqrt{x^2+4x+5}\right) + \frac{1}{6}\sqrt{x^2+4x+5}(2x^2 + 11x + 16).$

76. $f(x) = -\frac{3\sqrt{7}}{28}\arctan\left(\frac{\sqrt{7}}{7}(2e^x + 3)\right) - \frac{1}{8}\ln(e^{2x} + 3e^x + 4) + \frac{1}{4}x.$

77. $f(x) = -\frac{1}{2}e^{x}\left((x^2 - 2x + 1)\cos x + (1 - x^2)\operatorname{sen} x\right).$

78. $f(x) = \frac{1}{4}\ln(x^4 + x^2 + 1) - \frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x^2 + 1)\right).$

79. $f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{9}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x^2 + 1)\right) - \frac{2x^6 + 6x^4 + 4x^2 + 3}{12(x^4 + x^2 + 1)^2}.$

80. $f(x) =$
$-\frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x + 1)\right) - \frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x - 1)\right) - \frac{1}{12}\ln\left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}\right).$

81. Demuestre que independientemente de los valores de las constantes c_1 y c_2, la función $y = c_1e^{x} + c_2e^{-x}$, satisface la ecuación (llamada **ecuación diferencial**) $y'' - y = 0$.

82. Demuestre que independientemente de los valores de las constantes c_1 y c_2, la función $y = c_1 \operatorname{senh} x + c_2 \cosh x$, satisface la ecuación diferencial del ejercicio anterior $y'' - y = 0$.

83. Demuestre que independientemente de los valores de las constantes c_1 y c_2, la función $y = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$, satisface la ecuación diferencial $y'' + y = 0$.

84. Determine el valor de k para que la función $y = e^{kx}$ satisfaga la ecuación diferencial $y' + 3y = 0$.

85. Determine el valor de k para que la función $y = e^{kx}$ satisfaga la ecuación diferencial $4y' - 7y = 0$.

86. Demuestre que existen dos valores de k tales que $y = e^{kx}$ satisface la ecuación diferencial $y'' + 5y' + 6y = 0$. Determine tales valores k_1 y k_2. Verifique que independientemente de los valores de las constantes c_1 y c_2, la función $y = c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_2x}$ también satisface la ecuación dada.

87. Demuestre que existen dos valores de k tales que $y = e^{kx}$ satisface la ecuación diferencial $y'' + 6y' + 8y = 0$. Determine tales valores k_1 y k_2. Verifique que independientemente de los valores de las constantes c_1 y c_2, la función $y = c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_2x}$ también satisface la ecuación dada.

88. Determine los valores de a y b tales que $y = e^{ax}\operatorname{sen} bx$ satisfaga la ecuación diferencial $y'' - 2y' + 2y = 0$. Demuestre que para tales valores, la función $y = e^{ax}\cos bx$ también satisface la ecuación. Verifique que independientemente de los valores de las constantes c_1 y c_2, la función $y = e^{ax}(c_1 \operatorname{sen} bx + c_2 \cos bx)$ también satisface la ecuación dada.

89. Demuestre que existe un único valor de $k \in \mathbf{R}$ tal que $y = e^{kx}$ satisface la ecuación diferencial $y'' + 2y' + y = 0$. Verifique que para tal valor, la función $y = xe^{kx}$ también satisface la ecuación y que independientemente de los valores de las constantes c_1 y c_2, la función $y = c_1e^{kx} + c_2xe^{kx}$ también satisface la ecuación dada.

90. Determine los valores de $k \in \mathbf{R}$ para los que $y = e^{kx}$ es solución de la ecuación diferencial $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$. Si k_1, k_2 y k_3 son los valores encontrados, verifique que independientemente de los valores de las constantes c_1, c_2 y c_3, la función $y = c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_2x} + c_3e^{k_3x}$ también satisface la ecuación dada.

91. Demuestre que existe un único valor de $k \in \mathbf{R}$ tal que $y = e^{kx}$ satisface la ecuación $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$. Verifique que para tal valor, las funciones $y = xe^{kx}$ y $y = x^2e^{kx}$ también satisfacen la ecuación y que independientemente de los valores de las constantes c_1, c_2 y c_3, la función $y = c_1e^{kx} + c_2xe^{kx} + c_3x^2e^{kx}$ también satisface la ecuación dada.

92. Determine el valor de A tal que la función $y = Ae^{3x}$ satisfaga la ecuación diferencial $y'' + 8y' + 11y = 40e^{3x}$.

93. Determine el valor de A tal que la función $y = Ae^{-2x}$ satisfaga la ecuación diferencial $y''' + 2y'' + y' + 10y = e^{-2x}$.

94. Determine el valor de A tal que la función $y = Axe^{3x}$ satisfaga la ecuación diferencial $y'' - 5y' + 6y = 3e^{3x}$.

95. Determine el valor de A tal que la función $y = Ax^2e^{4x}$ satisfaga la ecuación diferencial $y'' - 8y' + 16y = 5e^{4x}$.

96. Determine el valor de A tal que la función $y = Axe^{x}$ satisfaga la ecuación diferencial $y''' + y' - 2y = e^{x}$.

97. Determine el valor de A tal que la función $y = Ax^2e^{x}$ satisfaga la ecuación diferencial $y''' + y'' - 5y' + 3y = 5e^{x}$.

98. Determine el valor de A tal que la función $y = Ax^3e^{x}$ satisfaga la ecuación diferencial $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^{x}$.

99. Determine los valores de A y B tales que la función $y = Ax + B$ satisfaga la ecuación diferencial $y'' - 3y' + 6y = x + 1$.

100. Determine los valores de A y B tales que la función $y = Ax + B$ satisfaga la ecuación diferencial $y''' + 4y'' - 2y' + y = x$.

101. Determine los valores de A, B y C tales que la función $y = Ax^2 + Bx + C$ satisfaga la ecuación diferencial $y'' - 4y' + 7y = 21x^2 - 59x + 40$.

102. Determine los valores de A, B y C tales que la función $y = Ax^2 + Bx + C$ satisfaga la ecuación diferencial $y''' + 3y'' - 2y' - 6y = -2(3x^2 + 5x + 1)$.

103. Determine los valores de A y B tales que la función $y = (Ax + B)e^{x}$ satisfaga la ecuación diferencial $y'' + 2y' + 5y = xe^{x}$. ¿Es posible determinar tales valores para que la función dada sea solución de la ecuación $y'' - 2y' + y = xe^{x}$?

104. Determine los valores de A y B tales que la función $y = (Ax^2 + Bx)e^{x}$ satisfaga la ecuación diferencial $y'' + y' - 2y = xe^{x}$.

105. Determine los valores de A y B tales que la función $y = (Ax^3 + Bx^2)e^{x}$ satisfaga la ecuación diferencial $y'' - 2y' + y = xe^{x}$.

106. Determine los valores de A, B y C tales que la función $y = (Ax^2 + Bx + C)e^{-2x}$ satisfaga la ecuación diferencial $y'' + y' + 3y = (x^2 - 1)e^{-2x}$.

107. Determine los valores de A, B y C tales que la función $y = (Ax^2 + Bx + C)e^{x}$ satisfaga la ecuación diferencial $y''' + y' + y = x^2e^{x}$.

108. Determine los valores de A, B y C tales que la función $y = (Ax^3 + Bx^2 + Cx)e^{x}$ satisfaga la ecuación diferencial $y'' - 4y' + 3y = x^2e^{x}$.

109. Determine los valores de A, B y C tales que la función $y = (Ax^4 + Bx^3 + Cx^2)e^{x}$ satisfaga la ecuación diferencial $y'' - 2y' + y = x^2e^{x}$.

110. Demuestre que no es posible determinar los valores de A y B tales que $y = A \operatorname{sen} x + B \cos x$ sea solución de la ecuación diferencial $y'' + y = 3 \operatorname{sen} x + \cos x$.

111. Determine los valores de A y B tales que la función $y = Ax \operatorname{sen} x + Bx \cos x$ satisfaga la ecuación diferencial del ejercicio anterior.

91. Demuestre que existe un único valor de $k \in \mathbf{R}$ tal que $y = e^{kx}$ satisface la ecuación $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$. Verifique que para tal valor, las funciones $y = xe^{kx}$ y $y = x^2e^{kx}$ también satisfacen la ecuación y que independientemente de los valores de las constantes c_1, c_2 y c_3, la función $y = c_1e^{kx} + c_2xe^{kx} + c_3x^2e^{kx}$ también satisface la ecuación dada.

92. Determine el valor de A tal que la función $y = Ae^{3x}$ satisfaga la ecuación diferencial $y'' + 8y' + 11y = 40e^{3x}$.

93. Determine el valor de A tal que la función $y = Ae^{-2x}$ satisfaga la ecuación diferencial $y''' + 2y'' + y' + 10y = e^{-2x}$.

94. Determine el valor de A tal que la función $y = Axe^{3x}$ satisfaga la ecuación diferencial $y'' - 5y' + 6y = 3e^{3x}$.

95. Determine el valor de A tal que la función $y = Ax^2e^{4x}$ satisfaga la ecuación diferencial $y'' - 8y' + 16y = 5e^{4x}$.

96. Determine el valor de A tal que la función $y = Axe^{x}$ satisfaga la ecuación diferencial $y''' + y' - 2y = e^{x}$.

97. Determine el valor de A tal que la función $y = Ax^2e^{x}$ satisfaga la ecuación diferencial $y''' + y'' - 5y' + 3y = 5e^{x}$.

98. Determine el valor de A tal que la función $y = Ax^3e^{x}$ satisfaga la ecuación diferencial $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^{x}$.

99. Determine los valores de A y B tales que la función $y = Ax + B$ satisfaga la ecuación diferencial $y'' - 3y' + 6y = x + 1$.

100. Determine los valores de A y B tales que la función $y = Ax + B$ satisfaga la ecuación diferencial $y''' + 4y'' - 2y' + y = x$.

101. Determine los valores de A, B y C tales que la función $y = Ax^2 + Bx + C$ satisfaga la ecuación diferencial $y'' - 4y' + 7y = 21x^2 - 59x + 40$.

102. Determine los valores de A, B y C tales que la función $y = Ax^2 + Bx + C$ satisfaga la ecuación diferencial $y''' + 3y'' - 2y' - 6y = -2(3x^2 + 5x + 1)$.

103. Determine los valores de A y B tales que la función $y = (Ax + B)e^{x}$ satisfaga la ecuación diferencial $y'' + 2y' + 5y = xe^{x}$. ¿Es posible determinar tales valores para que la función dada sea solución de la ecuación $y'' - 2y' + y = xe^{x}$?

104. Determine los valores de A y B tales que la función $y = (Ax^2 + Bx)e^{x}$ satisfaga la ecuación diferencial $y'' + y' - 2y = xe^{x}$.

105. Determine los valores de A y B tales que la función $y = (Ax^3 + Bx^2)e^{x}$ satisfaga la ecuación diferencial $y'' - 2y' + y = xe^{x}$.

106. Determine los valores de A, B y C tales que la función $y = (Ax^2 + Bx + C)e^{-2x}$ satisfaga la ecuación diferencial $y'' + y' + 3y = (x^2 - 1)e^{-2x}$.

107. Determine los valores de A, B y C tales que la función $y = (Ax^2 + Bx + C)e^{x}$ satisfaga la ecuación diferencial $y''' + y' + y = x^2e^{x}$.

108. Determine los valores de A, B y C tales que la función $y = (Ax^3 + Bx^2 + Cx)e^{x}$ satisfaga la ecuación diferencial $y'' - 4y' + 3y = x^2e^{x}$.

109. Determine los valores de A, B y C tales que la función $y = (Ax^4 + Bx^3 + Cx^2)e^{x}$ satisfaga la ecuación diferencial $y'' - 2y' + y = x^2e^{x}$.

110. Demuestre que no es posible determinar los valores de A y B tales que $y = A\operatorname{sen} x + B\cos x$ sea solución de la ecuación diferencial $y'' + y = 3\operatorname{sen} x + \cos x$.

111. Determine los valores de A y B tales que la función $y = Ax\operatorname{sen} x + Bx\cos x$ satisfaga la ecuación diferencial del ejercicio anterior.

112. Determine los valores de A y B tales que la función $y = A\operatorname{sen} x + B\cos x$ satisfaga la ecuación $y'' + y' + y = 3\operatorname{sen} x + 4\cos x$.

113. Determine los valores de A y B tales que la función $y = e^x(A\operatorname{sen} x + B\cos x)$ satisfaga la ecuación $y'' + 4y' + 3y = 3e^x \operatorname{sen} x$.

114. Determine los valores de A y B tales que la función $y = (A\operatorname{sen} x + B\cos x)e^{-2x}$ satisfaga la ecuación $y''' + y' - y = e^{-2x}(\operatorname{sen} x + \cos x)$.

115. Determine los valores de A, B, C y D tales que la función $y = (Ax + B)\operatorname{sen} x + (Cx + D)\cos x$ satisfaga la ecuación diferencial $y'' + y' + y = (x+4)\cos x - (x+2)\operatorname{sen} x$.

116. Determine los valores de A, B, C y D tales que la función $y = (Ax + B)\operatorname{sen} x + (Cx + D)\cos x$ satisfaga la ecuación diferencial $y'' - 3y' + 5y = (2x+1)(\operatorname{sen} x + \cos x)$.

117. Determine los valores de A, B, C y D tales que la función $y = (Ax + B)\operatorname{sen} x + (Cx + D)\cos x$ satisfaga la ecuación diferencial $y''' + 2y'' + 3y' + 4y = 8(x+2)\cos x - 4(x+4)\operatorname{sen} x$.

118. Determine los valores de A, B, C y D tales que la función $y = (Ax^2 + Bx)\operatorname{sen} x + (Cx^2 + Dx)\cos x$ satisfaga la ecuación diferencial $y'' + y = x\cos x - 2x\operatorname{sen} x$.

119. Determine los valores de A, B, C y D tales que la función $y = (Ax^3 + Bx^2)\operatorname{sen} x + (Cx^3 + Dx^2)\cos x$ satisfaga la ecuación diferencial $y^{(4)} + 2y'' + y = 8x(\operatorname{sen} x + \cos x)$.

120. Determine los valores de A y B tales que la función $y = xe^x(A\operatorname{sen} x + B\cos x)$ sea solución de la ecuación diferencial $y'' - 2y' + 2y = 2e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$.

121. Determine los valores de las constantes A, B, C y D tales que la función $y = [(Ax + B)\operatorname{sen} x + (Cx + D)\cos x]\, e^x$ satisfaga la ecuación diferencial $y'' + 3y' + 7y = e^x\,[(55x + 112)\cos x - 5(3x+2)\operatorname{sen} x]$.

122. Determine los valores de las constantes A, B, C y D tales que la función $y = [(Ax + B)\operatorname{sen} x + (Cx + D)\cos x]\, e^x$ satisfaga la ecuación diferencial $y''' + y'' + y' + y = e^x\,[(10x + 37)\cos x - 5(2x+1)\operatorname{sen} x]$.

123. Determine los valores de las constantes A, B, C y D tales que la función $y = [(Ax^2 + Bx)\operatorname{sen} x + (Cx^2 + Dx)\cos x]\, e^x$ satisfaga la ecuación diferencial $y'' - 2y' + 2y = e^x\,[(x+2)\cos x + (x+3)\operatorname{sen} x]$.

124. Determine los valores de las constantes A, B, C y D tales que la función $y = [(Ax^3 + Bx^2)\operatorname{sen} x + (Cx^3 + Dx^2)\cos x]\, e^x$ satisfaga la ecuación diferencial $y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = xe^x(2\cos x + 3\operatorname{sen} x)$.

125. Demuestre que la función $y = f(x)$ dada implícitamente por la expresión $y^4 + 2x^2y^2 + 2y^2 = 1$ satisface la ecuación diferencial $(x^2 + y^2 + 1)y' + xy = 0$.

126. Demuestre que la función $y = f(x)$ dada implícitamente por la expresión $xy\cos\dfrac{y}{x} = 1$ satisface la ecuación diferencial $\left(x\cos\dfrac{y}{x} + y\operatorname{sen}\dfrac{y}{x}\right)y + \left(x\cos\dfrac{y}{x} - y\operatorname{sen}\dfrac{y}{x}\right)xy' = 0$.

127. Considere la función $y = f(x)$ definida implícitamente por la expresión $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2gx + 2fy + h = 0$, en donde a, b, c, g, f y h son constantes. Demuestre que existe una constante K tal que:

$$y'' = \frac{K}{(bx + cy + f)^3}.$$

128. Sea $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función derivable. Demuestre que la derivada de $F(x) = f(x^2)$ es una función impar.

129. Sea $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función derivable. Demuestre que la derivada de $F(x) = \operatorname{sen} x f(\cos x)$ es una función par.

130. (UN EJERCICIO SOBRE LA DERIVADA DE SCHWARZ.) Considere una función $f : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tres veces derivable. Se define la **derivada de Schwarz** de $f(x)$, denotada por $Sf(x)$, como:

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2.$$

a) Calcule $S(x^3 + x + 1)$.

b) Calcule $S\left(\frac{1}{x^3 + x + 1}\right)$.

c) Demuestre que en general se tiene $Sf(x) = S\left(\frac{1}{f(x)}\right)$.

d) Generalizando el resultado del inciso anterior, demuestre que si $ad - bc \neq 0$, entonces $Sf(x) = S\left(\frac{af(x) + b}{cf(x) + d}\right)$.

131. Dada una función dos veces derivable $f(x)$, se define la **curvatura** de (la gráfica de) la función $f(x)$ en el punto de abscisa x, denotada con $k(x)$, como:

$$k(x) = \frac{|f''(x)|}{\left(1 + (f'(x))^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

El valor de $k(x)$ es una medida de la "velocidad a la que la curva se aleja de su recta tangente en el punto de abscisa x". Es decir, $k(x)$ es una medida de cuánto se "curva" la gráfica de la función en un punto dado.

a) Verifique que la curvatura de una función lineal $f(x) = mx + b$ es $k(x) = 0$.

b) Calcule la curvatura de la función $f(x) = x^2$ para $x = 0$ y $x = 3$. Compare los valores de $k(0)$ y $k(3)$. Explique.

c) Considere la función $y = f(x)$ dada implícitamente por $x^2 + y^2 = R^2$. ¿Qué representa geométricamente esta ecuación? Demuestre que $k(x) = \frac{1}{R}$. Interprete geométricamente su resultado.

¡APUÉSTELE A LAS DERIVADAS!:

Presentamos a continuación 6 funciones. El juego se hace entre dos jugadores A y B. Se sugiere que cada jugador apueste algo en su intervención, que consiste en tirar dos veces un dado. Con las dos funciones correspondientes a las casillas con el número que obtuvo en sus tiradas, hará su composición (en el orden en que salieron: primero la función de la primera tirada —ésta será la función externa—, y luego la de la segunda tirada —la cual será la función interna—). Luego calculará la derivada de esa composición. Si la respuesta es una de las veinte funciones que aparecen abajo, el jugador ganará la apuesta.

Las 6 funciones son:

$f_1(x) = x^3$	$f_4(x) = x^5$
$f_2(x) = \cos x$	$f_5(x) = e^{2x}$
$f_3(x) = \ln x$	$f_6(x) = \arctan x$

Las veinte respuestas (las derivadas de la composición de dos de las funciones dadas anteriormente) con cada una de las cuales el jugador ganará la apuesta, son:

$9x^8$	$-\frac{\operatorname{sen}(\arctan x)}{1+x^2}$	$\frac{3\ln^2 x}{x}$	$3x^2 \arctan x^3$
$\frac{2e^{2x}}{1+e^{4x}}$	$\frac{1}{(1+x^2)\arctan x}$	$-5\cos^4 x \operatorname{sen} x$	$\frac{3x^2}{1+x^6}$
$-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$	$\frac{5}{x}$	$\frac{5\arctan^4 x}{1+x^2}$	$6e^{6x}$
$-2e^{2\cos x}\operatorname{sen} x$	$2x$	$10x^4 e^{2x^5}$	$\frac{2e^{2\arctan x}}{1+x^2}$
$-5x^4 \operatorname{sen} x^5$	$-2e^{2x}\operatorname{sen} e^x$	$-\frac{\operatorname{sen}\arctan x}{1+x^2}$	$\frac{5\ln^4 x}{x}$

EXAMEN DEL CAPÍTULO 6

EXAMEN TIPO (A)

1. Calcule la derivada de la función $f(x) = xe^{x^2} + x^2e^x$.

2. Calcule la derivada de la función $f(x) = \ln^2(1 + \operatorname{sen}^4 x)$.

3. Sea $f(x) = \operatorname{sen}^3(\cos^4(x^4 + 3x^2))$. Calcule $f'(0)$. (Sugerencia: ¿cómo es el último factor del producto de derivadas establecido en la regla de la cadena al calcular $f'(x)$? Ya que lo tenga identificado, evalúe en $x = 0$).

4. Sea $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$. Calcule $f'(x)$. (Advertencia: ¡cuidado con los paréntesis!)

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función inyectiva y derivable, cuya gráfica pasa por el punto $(2, 3)$. Suponga que $f'(2) = 4$. Calcule $(f^{-1})'(3)$.

6. Verifique el TFI con la función $f(x) = \sqrt[3]{1 + \ln(x + 1)} + 4$, en el punto $(0, 5)$.

7. Calcule la derivada de la función $f(x) = \arctan^3(1 + \ln^2(2 + \operatorname{arcsen} x))$.

8. Calcule la segunda derivada de la función $f(x) = \dfrac{3 + \operatorname{sen} x}{2 + \cos x}$.

9. Calcule la quinta derivada de la función $f(x) = x^2e^{3x}$.

10. Considere la función $y = f(x)$ dada implícitamente por $x^3 + xy + y^3 - 3 = 0$. Calcule $f'(1)$.

EXAMEN TIPO (B)

1. Calcule la derivada de la función $f(x) = \tan^3(x^4 + x^3 + 2)$.
2. Calcule la derivada de la función $f(x) = \ln^4 \ln^3 \ln^2 \ln x$.
3. Sea $f(x) = \operatorname{senh}^3\left(\operatorname{sen}^4\left(\cosh^7\left(x^4 + 3x^2 + 243\right)\right)\right)$. Calcule $f'(0)$.
4. Sea $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + \sqrt{x^3 + \sqrt{x^4 + 1}}}}$. Calcule $f'(x)$.
5. Sea $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función inyectiva y derivable, cuya gráfica pasa por el punto $(1, 1)$. Suponga que $f'(1) = 5$. Calcule $(f^{-1})'(1)$.
6. Considere la función $f(x) = \sqrt[3]{8 + 5\ln(x+1)} + 8$. Calcule $(f^{-1})'(10)$: a) haciendo explícita la función inversa $f^{-1}(x)$, b) usando el Teorema de la Función Inversa.
7. Calcule la derivada de la función $f(x) = \arctan^3(x + \ln^2(2x^2 + \operatorname{arcsen} x))$.
8. Considere la función $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$. Calcule $f^{(21)}(x)$.
9. Calcule la quinta derivada de la función $f(x) = (x^2 + 3x + 2)e^{3x}$.
10. Considere la función $y = f(x)$ dada implícitamente por $x^3 + xy + y^3 - 3 = 0$. Calcule la segunda derivada de esta función evaluada en el punto $(1, 1)$.

NOTA HISTÓRICA: DIDEROT vs. EULER.



El conocimiento matemático da poder. En alguna conferencia en un congreso internacional sobre simulación de sistemas, un conferencista hacía referencia a la manera como contestaba a los cuestionamientos de sus alumnos sobre la utilidad del material estudiado cuando en el curso se trataba algún tema especialmente complicado (se trataba de un curso de Matemática Avanzada, en la parte de ecuaciones diferenciales). El conferencista les decía a sus alumnos: "Supongan que están en una

fiesta en la que no hay demasiada animación y ustedes están siendo presa del aburrimiento. Ahí, en esa situación, pueden encontrar una bonita aplicación de los temas que estamos desarrollando en este curso. Sí, aunque no lo crean, en esa situación las ecuaciones diferenciales que estamos estudiando encuentran aplicaciones: por ejemplo, podrían voltear con alguna de las distinguidas anfitrionas de la fiesta, y cuestionarla sobre su opinión acerca de los sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales con singularidades de tipo de nodo hiperbólico en el origen de coordenadas. La anfitriona, seguramente con cara de desconcierto y fingiendo amabilidad, con alguna sonrisa apenas dibujada en sus labios, con toda certeza les contestará con la pregunta: '¿gusta algo más de beber?' Y así, además de quedar como todos unos intelectuales ante la dama, podrán conseguir rápidamente un nuevo trago". La anécdota de esta situación relatada por el conferencista, la cual tiene una intención motivacional entretejida en un tono poco serio, guarda, en el fondo, una enseñanza real: el conocimiento matemático da poder. Y esto no es ninguna novedad. En esta nota histórica vamos a relatar una famosa anécdota sucedida hace un par de siglos en San Petersburgo, en la cual, guardadas las proporciones, se puede descubrir una moraleja análoga a la del estudiante en la fiesta. Presentaremos solamente a uno de los protagonistas de esta anécdota, pues el otro, L. Euler, es un personaje muy especial dentro de la Matemática al cual dedicaremos posteriormente una nota histórica exclusiva. Baste por el momento decir que Euler es uno de los matemáticos más importantes de todos los tiempos (el más importante en el siglo XVIII) que dio un gran impulso al desarrollo del Cálculo Diferencial e Integral. El otro personaje, Denis Diderot (1713-1784), fue un filósofo francés que adquirió gran popularidad en los medios intelectuales del siglo XVIII, pues se dio a la tarea de realizar una Enciclopedia que sustituyera a la que, hasta ese momento, era la obra más importante en la que había una gran concentración de información, a saber, el Chambers (Inglaterra). Así, junto con un equipo importante de colaboradores, después de muchos años de trabajo, Diderot publicó la famosa *Encyclopédie, ou dictionnaire raisonné des sciencies, des arts, et des métiers* (1751-1765). A decir del contenido de su *Encyclopédie*, Diderot era un escritor atrevido en lo que respecta a la Matemática, pues sin tener cimientos firmes de algunas ideas, escribía como si fuera un erudito en la materia. Hacia el final de su vida, Catalina II de Rusia le ofreció una pensión para que viviera con decoro sus últimos años, fingiendo una compra de su *Encyclopédie* (que finalmente quedó en París). El matemático Euler era ya en ese tiempo una persona que gozaba de gran fama y reputación dentro de las ciencias físico-matemáticas, y la reina Catalina II le tenía una gran estima. Euler fue invitado a colaborar como científico de la corte, y así, estuvo por largos periodos en San Petersburgo (el último hasta su muerte, en 1783). El francés Diderot también fue invitado por la reina a San Petersburgo, pero parece que la relación personal entre los dos no era muy buena, hecho del cual Euler llegó a enterarse. En algún momento de tensas relaciones entre Catalina II y Diderot, cuando este último trataba de convencer sobre la inexistencia de Dios a quien se le pusiera enfrente, L. Euler, en una muestra de agradecimiento a las atenciones de la reina, y sabiendo lo débil de los conocimientos matemáticos de Diderot, ofreció su ayuda para deshacerse de él de una manera por demás política y contundente. Euler se encargó de que llegara a los oídos de Diderot que él poseía una demostración matemática de la existencia de Dios. Dada la postura rígida de su ateísmo y su fama como gran intelectual, Diderot a su vez se encargó de que Euler supiera que él estaba dispuesto a enfrentar la demostración delante de la corte, y, en su caso, refutarla. El plan resultó tal y como Euler lo deseaba. En una ceremonia especial, Euler entró a la sala de sesiones en donde se encontraba la reina con la corte y, dirigiéndose a Diderot, le replicó con gran parsimonia: "Señor, a más b a la n entre n es igual a x (a su vez que escribía $a + b^n/n = x$)... por lo tanto, Dios existe." La falta de conocimientos matemáticos de Diderot no le permitieron abrir la boca para replicar. A los pocos días del incidente, con todo el peso de la humillación sobre sus espaldas, el filósofo francés pidió permiso a Su Majestad para regresar a Francia, el cual fue, sin objeción alguna, concedido. Quizás usted pueda intentar en alguna discusión con algún conocido no muy grato, algo así como: "Mira, puesto que la derivada del cuadrado del coseno hiperbólico de equis es igual al doble del coseno hiperbólico de equis por el seno hiperbólico de equis, tú estás mal en tus conclusiones... ." Posiblemente lo deje callado y... a lo mejor le invita algo de beber.

CAPÍTULO 7
APLICACIONES GEOMÉTRICAS Y TEOREMAS DEL VALOR MEDIO

"Nada hay que haya dado una prueba tan convincente de la unidad de la deidad como esas concepciones puramente mentales de la ciencia numérica y matemática que lentamente han sido concebidas al hombre, y que recientemente nos han llegado gracias al Cálculo Diferencial... y que deben de haber existido previamente en la mente omniscientemente sublime, desde la eternidad."

Mary Somerville

En los dos capítulos anteriores nos hemos ocupado de desarrollar habilidades operativas para poder calcular de manera eficiente derivadas de funciones. En el capitulo 4, en donde presentamos el concepto de derivada, vimos que éste era el punto clave para resolver problemas sobre rectas tangentes a curvas y problemas de velocidades instantáneas de cuerpos en movimiento. A partir del presente capítulo, trataremos de sacarle más provecho a la información geométrica y física que proporciona una derivada, con el objeto de resolver algunos problemas interesantes que surgen en estas partes de las aplicaciones de la Matemática (en particular, en la Geometría de las curvas en el plano y la física). Veremos también algunos resultados generales importantes sobre funciones derivables y sus implicaciones (en particular, los teoremas de Rolle, de Lagrange, de Cauchy, y la regla de L'Hôpital-Bernoulli).

7.1 RECTAS TANGENTES Y NORMALES

Todas las funciones con las que trabajaremos a partir de este momento se supondrán derivables en todo su dominio (a menos que se diga lo contrario).

La idea principal con la que vamos a trabajar en esta sección, presentada ya en el capitulo 4, es la siguiente:

La derivada $f'(x_0)$ *de una función* $y = f(x)$ *en un punto dado* x_0 *de su dominio, es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto* $p = (x_0, f(x_0))$.

Trabajaremos también con la **recta normal** a una curva (gráfica de una función) en un punto p de ella, la cual se define como la recta perpendicular a la recta tangente a la curva en el punto p. Sabemos (del curso de geometría analítica) que si m_T es la pendiente de la recta tangente, entonces la recta normal, al ser perpendicular a la tangente, debe tener una pendiente m_N inversa y de signo contrario a m_T. Es decir, se debe tener:

$$m_N = -\frac{1}{m_T}.$$

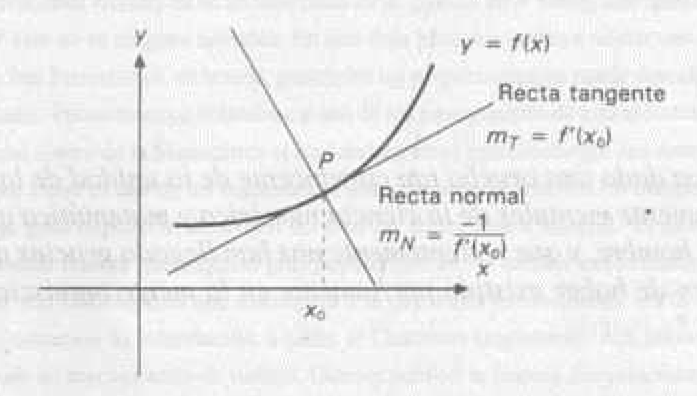


Figura 7.1.1. La recta tangente y la recta normal a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto $p = (x_0, f(x_0))$.

Consideremos entonces la gráfica de la función $y = f(x)$ y un punto $p = (x_0, f(x_0))$ de ella. La recta tangente T es una recta que pasa por p y tiene pendiente m_T igual a la derivada de la función en x_0. Es decir, $m_T = f'(x_0)$. Entonces la ecuación de la recta T debe ser:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

y si $f'(x_0) \neq 0$, la ecuación de la recta normal N a la gráfica de la función $y = f(x)$ en p (la cual es una recta que pasa por p y tiene pendiente $m_N = -\frac{1}{m_T} = -\frac{1}{f'(x_0)}$) debe ser :

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 7.1.1. Determinar la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 4x + 5$ en el punto p de abscisa $x_0 = -1$.

SOLUCIÓN. La ordenada del punto p es $f(x_0) = f(-1) = (-1)^2 + 4(-1) + 5 = 2$. La derivada de la función dada es $f'(x) = 2x + 4$, de modo que en el punto p se tiene $f'(-1) = 2(-1) + 4 = 2$. Ésta es la pendiente de la recta tangente procurada. Su ecuación es entonces $y - 2 = 2(x - (-1))$, o bien: $y = 2x + 4$. La recta normal en el punto p tiene pendiente $m_N = -\frac{1}{f'(-1)} = -\frac{1}{2}$, de modo que su ecuación es $y - 2 = -\frac{1}{2}(x - (-1))$, o bien: $x + 2y - 3 = 0$.

★

EJEMPLO 7.1.2. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$ en el punto de abscisa $x = -2$.

SOLUCIÓN. La ordenada del punto de tangencia es $f(-2) = \frac{-2-2}{-2+3} = -4$. La pendiente de la recta tangente la determinamos con la derivada de la función, la cual es:

$$f'(x) = \frac{(x+3)(1) - (x-2)(1)}{(x+3)^2} = \frac{x+3-x+2}{(x+3)^2} = \frac{5}{(x+3)^2},$$

de modo que la pendiente de la recta tangente en $x = -2$ es $f'(-2) = \frac{5}{(-2+3)^2} = 5$. Así, la ecuación de la recta tangente procurada es:

$$y - (-4) = 5(x - (-2)),$$

o sea:

$$y = 5x + 6.$$

★

EJEMPLO 7.1.3. Encontrar la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f(x) = x \operatorname{sen} x$ en el punto de abscisa $x = \pi$.

SOLUCIÓN. La ordenada del punto de tangencia es $f(\pi) = \pi \operatorname{sen} \pi = 0$ (entonces el punto de tangencia es el punto $(\pi, 0)$). La pendiente de la recta normal es la inversa y de signo contrario a la pendiente de la recta tangente. Esta última es $f'(\pi)$. La derivada de la función dada es $f'(x) = x\cos x + \operatorname{sen} x$, de modo que $f'(\pi) = \pi\cos\pi + \operatorname{sen}\pi = -\pi$. Entonces la pendiente de la recta normal es $-\frac{1}{-\pi} = \pi^{-1}$, y su ecuación es por lo tanto:

$$y - 0 = \pi^{-1}(x - \pi),$$

o sea:

$$y = \pi^{-1}x - 1.$$

★

EJEMPLO 7.1.4. Determine la ecuación de la recta tangente a la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en un punto $p = (x_0, y_0)$ cualquiera de ella.

SOLUCIÓN. Debemos tener claro desde un principio que el punto $p = (x_0, y_0)$ *es un punto de la elipse* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Esto significa que las coordenadas (x_0, y_0) de p *satisfacen* la ecuación de la elipse a la que pertenece. Es decir, se tiene que $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$. Ahora bien, para determinar la ecuación de la recta tangente a una curva necesitamos el punto por el que pasa la recta, el cual es en este caso el punto de tangencia p, y la pendiente de la recta. Esta pendiente es, como sabemos, la derivada de la función $y = f(x)$ que describe la curva que estamos considerando, evaluada en x_0. Se podría objetar que la elipse con la que estamos trabajando en este ejemplo no es la gráfica de una función $y = f(x)$. Sin embargo, podemos pensar que

la ecuación de la elipse define de *manera implícita* dos funciones del tipo $y = f(x)$, a saber $f_1(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ y $f_2(x) = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ (las cuales se obtienen al despejar la y de la ecuación de la elipse, y cuyas gráficas corresponden a la semielipse superior y a la semielipse inferior, respectivamente). En concreto, lo que necesitamos es la derivada de cualquiera de estas dos funciones, la cual, evaluada en el punto p nos dará la información de la pendiente de la recta tangente que necesitamos. Aprendimos en el capítulo anterior que para obtener la derivada de cualquiera de las dos funciones que están involucradas en la ecuación de la elipse, podemos derivar implícitamente esta última y de ahí despejar y'. Hagámoslo de esta manera. Si derivamos implícitamente la ecuación de la elipse se obtiene:

$$\left(\frac{x^2}{a^2}\right)' + \left(\frac{y^2}{b^2}\right)' = (1)',$$

de donde:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0.$$

Si se despeja y' y evalúa en el punto p (es decir, si se sustituye x por x_0 y y por y_0) se obtiene:

$$y' = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}.$$

Ésta es la pendiente de la recta tangente a la elipse en el punto p. Entonces la ecuación de tal recta es:

$$y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0).$$

Podemos reacomodar esta expresión, para darle un aspecto más agradable, escribiendo:

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2},$$

(antes de continuar leyendo, tome papel y lápiz y haga detalladamente los pasos del reacomodo algebraico que se hizo a la ecuación de la recta tangente para obtener esta última expresión). Usando ahora que el punto p es un punto de la elipse, es decir, que $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, podemos escribir la ecuación de la recta tangente a la elipse en el punto p como:

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

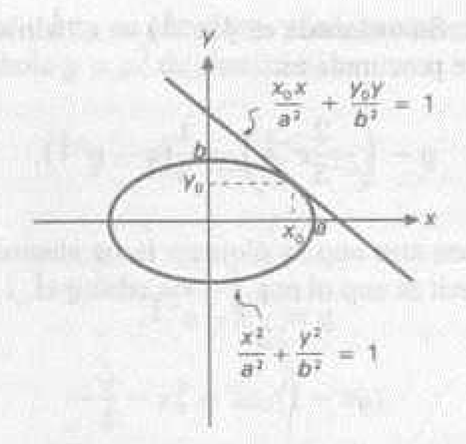


Figura 7.1.2. La elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ tiene, en el punto $p=(x_0,y_0)$, la recta tangente $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

★

EJEMPLO 7.1.5. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la parábola $y=2x^2-9x-1$ que sea paralela a la recta $y=-x+6$.

SOLUCIÓN. En este ejemplo no se nos proporciona el punto de tangencia, pero (indirectamente) se nos da la pendiente que debe tener la recta tangente: como ésta debe ser paralela a la recta $y=-x+6$, las pendientes de estas dos rectas deben ser iguales. Ya que la pendiente de la recta $y=-x+6$ es -1, tenemos que la pendiente de la recta tangente procurada es -1. ¿En qué punto de la parábola $y=2x^2-9x-1$ la pendiente de su recta tangente es igual a -1? Sabemos que $y'=4x-9$ es la pendiente de la recta tangente a la parábola en un punto de abscisa x. Queremos que esta pendiente sea -1. Es decir, queremos que $4x-9=-1$, de donde obtenemos que $x=2$. Ésta es la abscisa del punto de tangencia. Su ordenada es $f(2)=2(2)^2-9(2)-1=-11$, de modo que la ecuación de la recta tangente buscada es:

$$y-(-11)=(-1)(x-2),$$

o bien:

$$y=-x-9.$$

★

EJEMPLO 7.1.6. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=x\ln x$ que sea perpendicular a la recta $y+3x-2=0$.

SOLUCIÓN. Como en el ejercicio anterior, no tenemos el punto de tangencia, pero sabemos que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)=x\ln x$, la cual es (en un punto de abscisa x) $f'(x)=x\left(\frac{1}{x}\right)+\ln x=1+\ln x$, debe ser la inversa y de signo contrario a la pendiente de la recta $y+3x-2=0$, la cual es igual a -3. Así, tenemos que en el punto de tangencia se debe tener que $1+\ln x=-\frac{1}{-3}$ de donde se obtiene $x=e^{-\frac{2}{3}}$. Ésta es la abs-

cisa del punto de tangencia. Su ordenada es $f(e^{-\frac{2}{3}}) = e^{-\frac{2}{3}} \ln e^{-\frac{2}{3}} = -\frac{2}{3}e^{-\frac{2}{3}}$. Entonces la ecuación de la recta tangente procurada es:

$$y - \left(-\frac{2}{3}e^{-\frac{2}{3}}\right) = \frac{1}{3}(x - e^{-\frac{2}{3}}),$$

o bien:

$$y = \frac{1}{3}x - e^{-\frac{2}{3}}.$$

★

EJEMPLO 7.1.7. Determine los puntos de la gráfica de la función $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ en donde su recta tangente sea paralela al eje x.

SOLUCIÓN. Recuerde que las rectas paralelas al eje de abscisas tienen pendiente cero. Buscamos entonces los puntos de la gráfica de la función dada, en los cuales la pendiente de la recta tangente sea cero. Es decir, en los cuales la derivada de la función sea cero. Siendo esta derivada $f'(x) = -x^2 + 4x - 3$, localizamos (las abscisas de) los puntos con derivada cero resolviendo la ecuación $-x^2 + 4x - 3 = 0$. Esta ecuación puede escribirse como $(1 - x)(x - 3) = 0$, de donde se ve claramente que sus raíces son $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$. Así, los puntos de la gráfica de la función dada en los que su recta tangente es paralela al eje x tienen abscisas 1 y 3. Para determinar con precisión estos puntos, vemos cuáles son sus correspondientes ordenadas: $f(1) = -\frac{1}{3}(1)^3 + 2(1)^2 - 3(1) + 5 = \frac{11}{3}$ y $f(3) = -\frac{1}{3}(3)^3 + 2(3)^2 - 3(3) + 5 = 5$. Entonces los puntos requeridos son $p = \left(1, \frac{11}{3}\right)$ y $q = (3, 5)$.

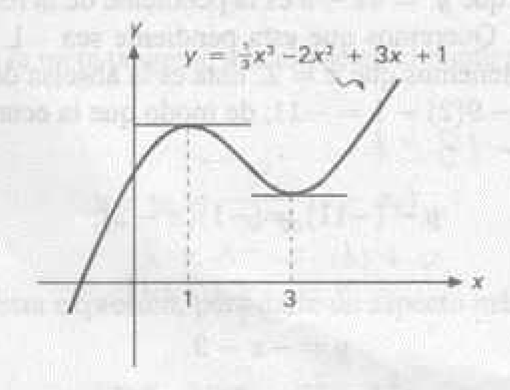


Figura 7.1.3. La función del ejemplo 7.1.7.

★

EJEMPLO 7.1.8. Determine las ecuaciones de las rectas tangentes a la parábola $y = x^2$ que pasan por el punto $\left(1, -\frac{5}{4}\right)$.

SOLUCIÓN. El problema que enfrentamos en este ejemplo es que no sabemos el punto en donde hace tangencia la recta que queremos encontrar. Sabemos que ésta debe pasar por el punto $\left(1, -\frac{5}{4}\right)$. Dejemos entonces por el momento abierto (la abscisa de) el punto x_0 de tangencia. La pendiente de la recta tangente a la parábola en este punto es $2x_0$ (la derivada

de $f(x) = x^2$ evaluada en el punto en cuestión), y así, la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto de la parábola $y = x^2$ de abscisa x_0 es:

$$y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0).$$

La información proporcionada en el ejemplo es que esta recta debe pasar por el punto $(1, -\frac{5}{4})$. Así, cuando x sea 1, la y debe ser $-\frac{5}{4}$, con lo que se tiene:

$$-\frac{5}{4} - x_0^2 = 2x_0(1 - x_0).$$

O bien:

$$x_0^2 - 2x_0 - \frac{5}{4} = 0,$$

de donde:

$$x_0 = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\left(-\frac{5}{4}\right)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+5}}{2} = \frac{2 \pm 3}{2} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{cases}.$$

Entonces las abscisas de los puntos de tangencia pueden ser $x_0 = -\frac{1}{2}$ o $x_0 = \frac{5}{2}$. Las rectas tangentes correspondientes tienen como ecuaciones respectivas:

$$y - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

y

$$y - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 2\left(\frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right).$$

O bien:

$$4x + 4y + 1 = 0$$

y

$$20x - 4y - 25 = 0.$$

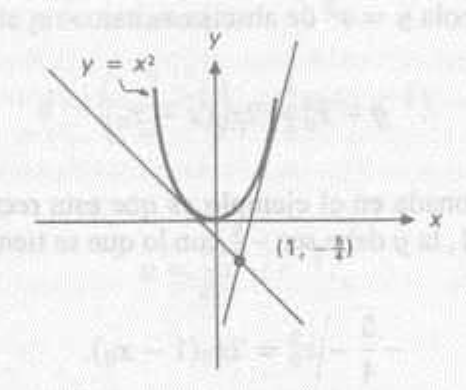


Figura 7.1.4. Las rectas tangentes a la parábola $y = x^2$ que pasan por el punto $\left(1, -\frac{5}{4}\right)$.

★

En el ejemplo que veremos a continuación usaremos lo que hemos estudiado sobre rectas tangentes a curvas para establecer una propiedad geométrica importante de una curva llamada astroide. En él se ejemplifica lo que decíamos al principio del capítulo: con la herramienta desarrollada hasta este momento del cálculo de derivadas, podemos estudiar algunas propiedades geométricas que tienen que ver con las rectas tangentes a curvas en el plano.

EJEMPLO 7.1.9. La curva cuya ecuación es $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, en donde a es una constante positiva, se llama **astroide.** Verificar que el segmento de la recta tangente a la astroide comprendido entre los ejes coordenados, en cualquier punto de la curva, es constante.

SOLUCIÓN. La astroide es una curva cerrada, simétrica respecto de los dos ejes coordenados (pues si sustituimos en la ecuación de la astroide a x por $-x$ y/o a y por $-y$, nos queda la misma expresión: observe que tanto x como y aparecen elevados al cuadrado). Entonces la astroide no puede ser la gráfica de una función $y = f(x)$, lo cual se revela al tratar de despejar la y en términos de la x: queda $y = \pm\sqrt{\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3}$ (con el signo + nos queda la función $f_1(x) = \sqrt{\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3}$ cuya gráfica corresponde a la parte superior de la astroide, y con el signo − nos queda la función $f(x) = -\sqrt{\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3}$ cuya gráfica corresponde a la parte inferior de la astroide). Nuevamente, como en el caso de la elipse del ejemplo 7.1.4, el problema de determinar la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto de ella lo podemos resolver directamente de la ecuación de la astroide con derivación implícita. En este ejemplo se trata de que verifiquemos que si tomamos *un punto cualquiera* de la astroide, digamos $p = (x_0, y_0)$, y trazamos por él la recta tangente, entonces la longitud del segmento de tal recta que queda atrapado entre los ejes coordenados *es independiente del punto* p *que tomamos inicialmente*. Es decir, que este segmento de recta tangente comprendido entre los ejes coordenados tiene longitud constante. Entonces, lo que debemos hacer para lograr nuestro objetivo es, primeramente, obtener la ecuación de la recta tangente a la

astroide en el punto p, luego determinar en qué puntos corta esta recta a los ejes coordenados, y, finalmente, calcular la distancia entre estos dos puntos. El problema queda resuelto en el momento que verifiquemos que el resultado que obtengamos de esta distancia es independiente de las coordenadas del punto p que inicialmente escogimos. Pongamos, pues, manos a la obra. Para obtener la ecuación de la recta tangente a la astroide en $p = (x_0, y_0)$ debemos calcular su pendiente, la cual, como dijimos anteriormente, la obtenemos con derivación implícita. Tomando la derivada término por término en la ecuación de la astroide nos queda $(x^{\frac{2}{3}})' + (y^{\frac{2}{3}})' = (a^{\frac{2}{3}})'$, de donde, al hacer las derivadas y recordando que y es función de x obtenemos $\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} + \frac{2}{3}y^{\frac{2}{3}-1}y' = 0$, o sea $x^{-\frac{1}{3}} + y^{-\frac{1}{3}}y' = 0$, de donde, al despejar y' se obtiene: $y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$. Al evaluar esta derivada en el punto p, obtenemos la pendiente de la recta tangente como $m_T = -\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{\frac{1}{3}}$. Entonces la ecuación de la recta tangente a la astroide en el punto p es:

$$y - y_0 = -\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{\frac{1}{3}}(x - x_0).$$

El punto en donde esta recta corta el eje x, digamos $q_1 = (\widetilde{x}, 0)$, lo obtenemos haciendo $y = 0$ en la ecuación anterior y despejando x. De

$$0 - y_0 = -\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{\frac{1}{3}}(x - x_0)$$

se obtiene:

$$x = \widetilde{x} = x_0 + y_0\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{\frac{1}{3}} = x_0 + x_0^{\frac{1}{3}}y_0^{\frac{2}{3}} = x_0^{\frac{1}{3}}\left(x_0^{\frac{2}{3}} + y_0^{\frac{2}{3}}\right).$$

Recuerde que el punto $p = (x_0, y_0)$ es un punto de la astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Entonces las coordenadas de p deben satisfacer la ecuación que define a la curva. Es decir, se debe tener que $x_0^{\frac{2}{3}} + y_0^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Entonces, el valor $\widetilde{x}$ lo podemos escribir como $\widetilde{x} = x_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}$, de tal modo que el punto de intersección de la recta tangente con el eje x es $q_1 = \left(x_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}, 0\right)$. De igual manera, al hacer $x = 0$ en la ecuación de la recta tangente, obtenemos el punto $q_2 = (0, \widetilde{y})$ =punto de intersección de la recta tangente con el eje y. Nos queda (si se hace $x = 0$ en la ecuación de la recta tangente):

$$y - y_0 = -\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{\frac{1}{3}}(0 - x_0),$$

de donde:

$$y = \widetilde{y} = y_0 + x_0\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{\frac{1}{3}} = y_0 + y_0^{\frac{1}{3}}x_0^{\frac{2}{3}} = y_0^{\frac{1}{3}}\left(x_0^{\frac{2}{3}} + y_0^{\frac{2}{3}}\right) = y_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}.$$

Es decir, el punto de intersección de la recta tangente con el eje y es $q_2 = \left(0, y_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}\right)$. Finalmente obtenemos la distancia d entre estos dos puntos (con la fórmula aprendida en el

curso de Geometría analítica: la distancia entre los puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ es $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)}$. Ésta es:

$$d = \sqrt{\left(0 - \left(x_0^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}}\right)\right)^2 + \left(y_0^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}} - 0\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(x_0^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(y_0^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}}\right)^2} = \sqrt{x_0^{\frac{2}{3}} a^{\frac{4}{3}} + y_0^{\frac{2}{3}} a^{\frac{4}{3}}}$$

$$= \sqrt{a^{\frac{4}{3}}\left(x_0^{\frac{2}{3}} + y_0^{\frac{2}{3}}\right)} \underset{\text{pertenece a la astroide}}{\overset{\text{el punto } p}{=\!=\!=}} = \sqrt{a^{\frac{4}{3}} a^{\frac{2}{3}}} = \sqrt{a^2} = a.$$

Obtuvimos entonces que el segmento de la recta tangente a la astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ en un punto $p = (x_0, y_0)$ cualquiera de ella, es igual a a, que es una constante.

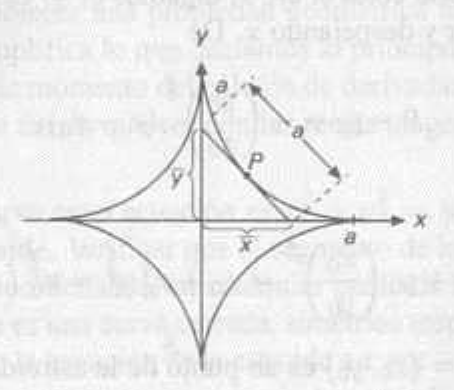


Figura 7.1.5. La astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ tiene la propiedad de que el segmento de la recta tangente a la curva comprendido entre los ejes coordenados, en cualquier punto de la curva, tiene longitud constante igual a a.

★

Antes de continuar con la siguiente idea que estudiaremos en esta sección, observe que la propiedad demostrada en el ejemplo anterior nos permite proponer un "método" para construir una astroide. Hagamos esta construcción en el primer cuadrante: marque sobre las partes positivas del eje x y del eje y la magnitud a que aparece en la ecuación de la astroide. Reproduzca el segmento de longitud a varias veces en el primer cuadrante de tal modo que los extremos de él se encuentren siempre sobre los ejes coordenados. Cada vez que se trace uno de estos segmentos, se estará construyendo un pedazo de la recta tangente a la astroide. Mientras más segmentos marque, más clara le quedará la curva que estos segmentos "envuelven" (éste es un término matemático importante: efectivamente la astroide es la **envolvente** de la familia de segmentos de longitud a con extremos en los ejes coordenados).

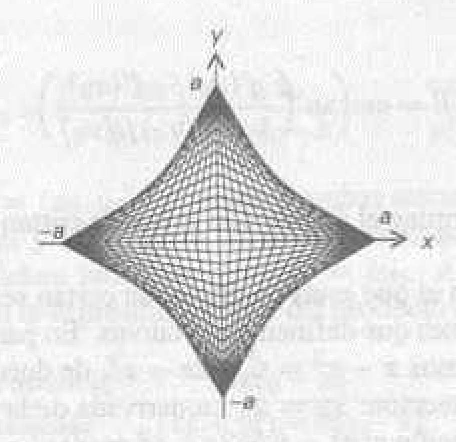


Figura 7.1.6. Una manera de trazar la astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ por medio de sus tangentes.

Para continuar nuestro trabajo geométrico relacionado con curvas en el plano y sus rectas tangentes, supongamos ahora que las gráficas de las dos funciones $y = f(x)$ y $y = g(x)$ se cortan en el punto p de abscisa x_0 (la ordenada de p es entonces $f(x_0) = g(x_0)$). Definimos el **ángulo con el que se cortan estas curvas en** p como el ángulo que forman sus rectas tangentes en ese punto.

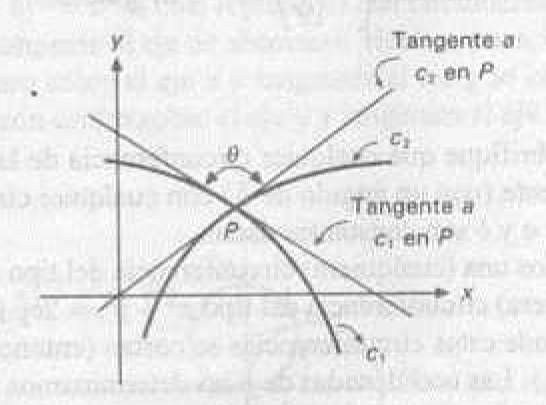


Figura 7.1.7. El ángulo θ con el que se cortan dos curvas.

Recordemos (del curso de geometría analítica) que si dos rectas l_1 y l_2, con pendientes m_1 y m_2 respectivamente, se cortan en el punto p, el ángulo θ entre estas rectas es:

$$\theta = \arctan\left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}\right),$$

de tal modo que en el caso de las gráficas de las funciones $y = f(x)$ y $y = g(x)$ mencionado anteriormente, las pendientes de las rectas tangentes correspondientes en el punto p son las derivadas de estas funciones evaluadas en x_0, es decir $f'(x_0)$ y $g'(x_0)$. Así entonces, podemos decir que el ángulo con el que se cortan las gráficas de las funciones $y = f(x)$ y $y = g(x)$ en el punto común p de abscisa x_0 es:

$$\theta = \arctan\left(\frac{g'(x_0) - f'(x_0)}{1 + g'(x_0)f'(x_0)}\right).$$

EJEMPLO 7.1.10. Determine el ángulo con el que se cortan las parábolas $y = x - x^2$ y $y = 6 - 2x - x^2$.

SOLUCIÓN. El punto en el que estas parábolas se cortan se puede obtener resolviendo simultáneamente las ecuaciones que definen estas curvas. En particular, si igualamos las y's de ambas ecuaciones obtenemos $x - x^2 = 6 - 2x - x^2$, de donde, al despejar x se obtiene la abscisa del punto de intersección: $x_0 = 2$. La derivada de la función $f(x) = x - x^2$ es $f'(x) = 1 - 2x$, y la de la función $g(x) = 6 - 2x - x^2$ es $g'(x) = -2 - 2x$, de modo que las pendientes de las rectas tangentes a cada una de las gráficas de estas funciones en el punto de abscisa $x_0 = 2$ es $f'(x_0) = 1 - 2(2) = -3$ y $g'(2) = -2 - 2(2) = -6$. Entonces el ángulo con el que estas parábolas se cortan es:

$$\theta = \arctan\left(\frac{g'(x_0) - f'(x_0)}{1 + g'(x_0)f'(x_0)}\right) = \arctan\left(\frac{-6+3}{1+(-6)(-3)}\right)$$

$$= \arctan\left(-\frac{3}{19}\right) \approx -8.97 \text{ grados.}$$

★

EJEMPLO 7.1.11. Verifique que cualquier circunferencia de la forma $x^2 + y^2 = 2ax$, se corta perpendicularmente (con un ángulo de $\frac{\pi}{2}$) con cualquier circunferencia de la forma $x^2 + y^2 = 2by$, en donde a y b son constantes dadas.

SOLUCIÓN. Tomemos una (cualquiera) circunferencia del tipo $x^2 + y^2 = 2ax$ (es decir, fijemos a) y una (cualquiera) circunferencia del tipo $x^2 + y^2 = 2by$ (es decir, fijemos b). Sea $p = (x_0, y_0)$ el punto donde estas circunferencias se cortan (entonces p es un punto común de ambas circunferencias). Las coordenadas de p las determinamos resolviendo simultáneamente las ecuaciones $x^2 + y^2 = 2ax$ y $x^2 + y^2 = 2by$ (veremos que en realidad no hace falta hacer explícitas tales coordenadas). Debemos verificar que las rectas tangentes correspondientes a las circunferencias consideradas, son perpendiculares. Para lograrlo, es suficiente que demostremos que el producto de las pendientes de estas rectas es -1 (ésta es la condición de perpendicularidad entre rectas en el plano). La pendiente de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 2ax$ en el punto p es la derivada de la función (de cualquiera de las funciones $y = f(x)$ que están definidas de manera implícita en la ecuación de la circunferencia), la cual la podemos obtener con derivación implícita: $2x + 2yy' = 2a$, de donde $y' = \frac{a-x}{y}$, y así, la pendiente de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 2ax$ en el punto p es $m_1 = \frac{a-x_0}{y_0}$. De igual forma, al derivar implícitamente la ecuación de la otra circunferencia $x^2 + y^2 = 2by$, obtenemos $2x + 2yy' = 2by'$, de donde $y' = -\frac{x}{y-b}$, y así, la pendiente de la recta tangente a esta circunferencia en el punto p es $m_2 = -\frac{x_0}{y_0-b}$. Al hacer el producto de las dos pendientes obtenidas, nos queda:

$$m_1 m_2 = \left(\frac{a - x_0}{y_0}\right)\left(-\frac{x_0}{y_0 - b}\right) = -\frac{ax_0 - x_0^2}{y_0^2 - by_0}.$$

Ahora bien, el punto $p = (x_0, y_0)$ es común a ambas circunferencias. Es decir, se debe tener que $x_0^2 + y_0^2 = 2ax_0$ y $x_0^2 + y_0^2 = 2by_0$. De estas ecuaciones obtenemos que las coordenadas del punto p deben satisfacer que $ax_0 = by_0$. Al usar este hecho y haciendo algunos pequeños trucos en la expresión anterior del producto de las pendientes, obtenemos:

$$m_1 m_2 = \underset{\text{en el denominador}}{\overset{\text{sumando y restando } x_0^2}{\longrightarrow}} -\frac{ax_0 - x_0^2}{(x_0^2 + y_0^2) - by_0 - x_0^2} = \overset{\text{usando que } x_0^2 + y_0^2 = 2by_0}{\longrightarrow}$$

$$= -\frac{ax_0 - x_0^2}{2by_0 - by_0 - x_0^2} = -\frac{ax_0 - x_0^2}{by_0 - x_0^2} = \overset{\text{usando que } ax_0 = by_0}{\longrightarrow} = -\frac{ax_0 - x_0^2}{ax_0 - x_0^2} = -1.$$

Con esto queda probado lo que el ejemplo pedía. Para ver geométricamente el hecho establecido en este ejemplo, observe que la ecuación $x^2 + y^2 = 2ax$ se puede escribir como $(x - a)^2 + y^2 = a^2$ la cual representa a una circunferencia con centro en $(a, 0)$ y radio a (y por lo tanto, tangente al eje de ordenadas). Similarmente la ecuación $x^2 + y^2 = 2by$ se puede escribir como $x^2 + (y - b)^2 = b^2$ la cual representa una circunferencia con centro en $(0, b)$ y radio b (y por lo tanto, tangente al eje de abscisas). Hemos, pues, demostrado que todas las circunferencias con centro sobre el eje x y tangentes al eje y se cortan perpendicularmente con las circunferencias con centro sobre el eje y y tangentes al aje x.

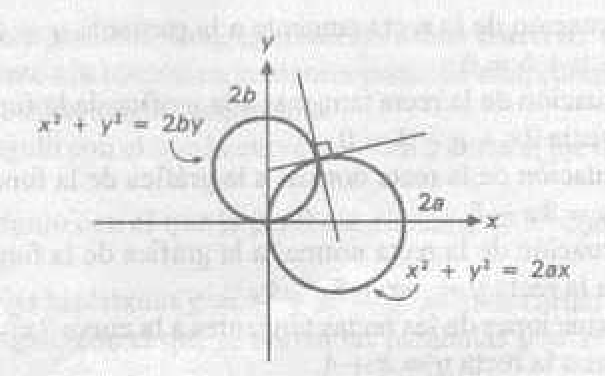


Figura 7.1.8. Las circunferencias $x^2 + y^2 = 2ax$ se cortan perpendicularmente con las circunferencias $x^2 + y^2 = 2by$.

★

EJERCICIOS (7.1)

En los ejercicios 1 al 10, determine las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función $f(x)$ dada en el punto de abscisa x_0 indicado.

1. $f(x) = 2x + 4$, $x_0 = 267$.
2. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 1$.

3. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x_0 = 0$.
4. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$, $x_0 = 1$.

5. $f(x) = e^{-x^2}$, $x_0 = 1$.
6. $f(x) = \ln(3 + \tan^2 x)$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

7. $f(x) = x\sqrt{1 + x^2}$, $x_0 = 1$.
8. $f(x) = x\ln(1 + x + x^2)$, $x_0 = 1$.

9. $f(x) = x\sqrt{1 + \sqrt{x}}$, $x_0 = 9$.
10. $f(x) = x^2 \arctan^2 x$, $x_0 = 1$.

En los ejercicios 11 al 15, determine las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función $f(x)$ dada implícitamente por la expresión $F(x, y) = 0$ proporcionada en el punto de $P = (x_0, y_0)$ indicado.

11. $x^2 + 3y^2 = 4$, $P = (1, 1)$.
12. $x^3 + 3xy + y^2 - 5 = 0$, $P = (1, 1)$.

13. $3x^2 + y^2 = 4$, $P = (1, 1)$.
14. $\ln(x^2 + y^2) + x - y - 1 = 0$, $P = (1, 0)$.

15. $x^2(x + y) - x + y = 0$, $P = (0, 0)$.

16. Determine la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = 2x^2 + 4x - 2$ que sea paralela a la recta $2x - y + 5 = 0$.

17. Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \ln x$ que sea perpendicular a la recta $2x + y - 3 = 0$.

18. Determine la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f(x) = e^{-2x}$ que sea paralela a la recta $y = 3x - 5$.

19. Determine la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 3x$ que sea perpendicular a la recta $y = -x + 7$.

20. Determine las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $7x^2 + 7xy + 14y^2 - 7y - 8 = 0$ que sean paralelas a la recta $y = x + 4$.

21. Determine el valor de a tal que los puntos sobre la parábola $y = x^2$ de abscisas a y $-a$ tengan rectas tangentes perpendicualres entre sí.

22. Encontrar las rectas tangentes a la parábola cúbica $y = x^3$ que sean paralelas a la recta $y = x$.

23. Encontrar las rectas tangentes a la gráfica de la función $y = \arctan x$ que sean perpendiculares a la recta $y = -2x$.

24. Demuestre que la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, en un punto $p = (x_0, y_0)$ de ella, se puede escribir como $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.

25. Encontrar los puntos de la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 7x + 5$ en los que su recta tangente es paralela al eje x.

26. Por los puntos de abscisas $x_1 = 1$ y $x_2 = e$ de la gráfica de la función $f(x) = x \ln x$, se ha trazado una recta S. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esta función que sea paralela a la recta S.

27. Encontrar la ecuación de las rectas tangente y normal a la gráfica de la función $f(x) = x^x$ en el punto $(1, 1)$.

28. Determine las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x) = 2x^2$ que pasan por el punto $(2, 0)$.

29. Determine las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x) = -x^2$ que pasan por $(0, 1)$.

30. Determine las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x) = x^2$ que pasan por $(1, 0)$.

31. Determine las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x) = x^2$ que pasan por $(4, 7)$.

32. Determine las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x) = x^3$ que pasan por $(2, 0)$.

33. Demuestre que la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en cualquier punto de ésta, forma con los ejes coordenados un triángulo de área constante.

34. La gráfica de la función

$$f(x) = \frac{a}{2} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{a - \sqrt{a^2 - x^2}} - \sqrt{a^2 - x^2}$$

en donde a es un número positivo dado, es conocida como **tractriz.** Demuestre que el segmento de la recta tangente a la tractriz en cualquier punto de ella, comprendido entre el punto de tangencia y el eje x, es de longitud constante.

35. Determine el ángulo con el que la curva $y = \tan x$ corta al eje de las x en el origen de coordenadas.

36. Determine el ángulo con el que la parábola cúbica $y = x^3$ corta al eje de las x en el origen de coordenadas.

37. Demuestre que las hipérbolas $y = \frac{\sqrt{2}}{x}$ y $x^2 - y^2 = 1$, se cortan perpendicularmente.

38. Determine el ángulo con el que se cortan las parábolas $y = x^2$ y $y^2 = x$ en el punto $(1, 1)$.

39. (CÓMO TRAZAR RECTAS TANGENTES A CATENARIAS.) En este ejercicio veremos un método geométrico para construir la tangente a una catenaria $y = a\cosh \frac{x}{a}$ en un punto dado de ella. Considere la catenaria $y = a\cosh \frac{x}{a}$ y sea p un punto de ella. Del punto p baje una perpendicular hacia el eje x y localice el punto p'. Usando como diámetro el segmento $\overline{pp'}$, construya una semicircunferencia como se muestra en la figura. Tomando como uno de los extremos al punto p', construya un segmento de longitud a, con el otro extremo sobre la semicircunferencia trazada. Llame q a este otro extremo del segmento. La recta que pasa por p y q es la recta tangente a la catenaria que pasa por p. Demuestre este hecho.

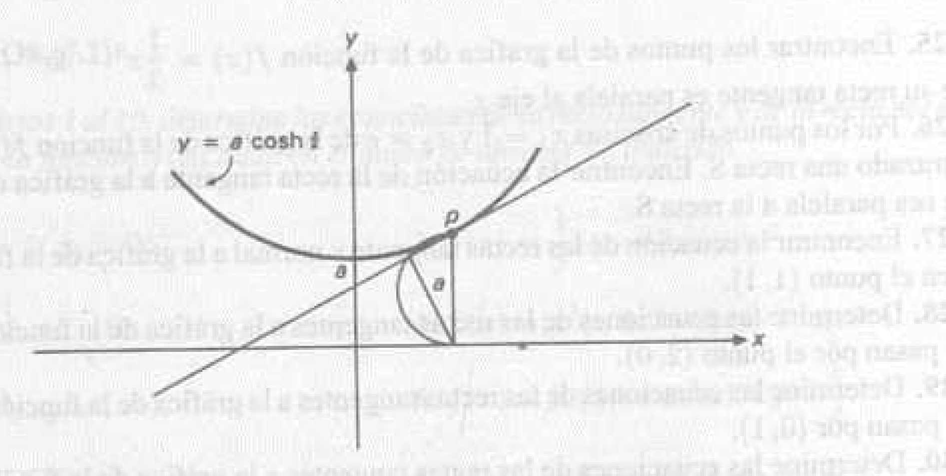


Figura 7.1.9. Construcción de la recta tangente a la catenaria $y = a\cosh\frac{x}{a}$ en el punto p.

7.2 EL MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

En el capítulo 3 ya decíamos que el problema de determinación de raíces de polinomios era, en general, un problema complicado. En ese capítulo aplicamos el teorema del valor intermedio para plantear el método de la bisección que nos permitía ir "cazando" a una raíz, cerrando el intervalo en el que la función (continua) presenta un cambio de signo. Ahora, con la herramienta que hemos desarrollado, podemos estudiar un método que nos permita obtener aproximaciones de ceros de funciones diferenciables de una manera muy eficiente (mucho más que con el método de la bisección).

La idea que sustenta este método la hemos estudiado ya en el capítulo 4 y la hemos reforzado en la sección anterior: sabemos cómo determinar la recta tangente a la gráfica de una función $f(x)$ diferenciable en un punto x_0 de ella, y esto es todo lo que necesitamos para poner en marcha el llamado método de Newton-Raphson que estudiaremos en esta sección. Es claro que si la función $f(x)$ de la que queremos encontrar una raíz r fuera una función lineal, digamos $f(x) = mx + b$, el problema sería trivial. Despejamos la x de $mx + b = 0$ para obtener $r = x = -\frac{b}{m}$. El hecho es que esta situación tan simple en realidad casi no se presenta (en la práctica nos enfrentamos con situaciones más complejas), pero … si lo que queremos es determinar una r tal que $f(r) = 0$, en donde f es una función diferenciable, lo que sí podemos hacer es aproximarnos al punto r *cambiando* la función $f(x)$ en cada uno de sus puntos por su recta tangente. Veamos más de cerca este hecho:

Sea r la raíz buscada y partamos de un punto x_0 cualquiera del dominio de la función $f(x)$, tal que $f'(x_0) \neq 0$. Sabemos que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa x_0 es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Esta ecuación nos da el "comportamiento lineal" que tiene la función $f(x)$ en los alrededores de x_0. Con ella es muy fácil obtener la abscisa x_1 del punto en donde esta recta corta el eje x: hacemos $y = 0$ en la ecuación y despejamos x :

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow x = x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

En principio (salvo algunos casos en que el método no funciona, que comentaremos más adelante), el punto x_1 se encontrará más cerca de la raíz r procurada.

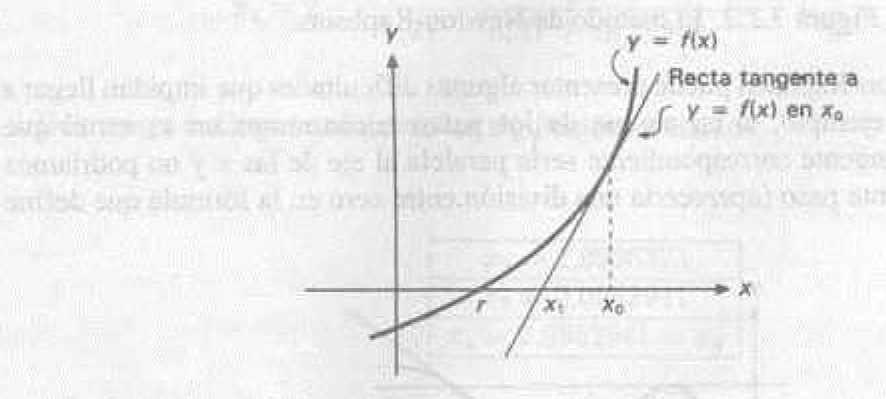


Figura 7.2.1. El punto x_1, raíz de la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto x_0, se encuentra más cerca de la raíz r procurada.

Aplicamos la misma idea ahora en el punto de abscisa x_1. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en este punto es:

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1).$$

Obtenemos de ella el punto x_2 en donde esta recta corta el eje x. Hacemos $y = 0$ en la ecuación y despejamos x :

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Rightarrow x = x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

En general, la fórmula:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$ nos irá dando punto $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ cada vez más próximos a la raíz r procurada. (En adelante nos referiremos a la fórmula anterior como *fórmula del método de Newton-Raphson.*) Dependiendo del grado de exactitud, podemos dar por encontrada la raíz cuando x_{n+1} varíe nada o casi nada de x_n.

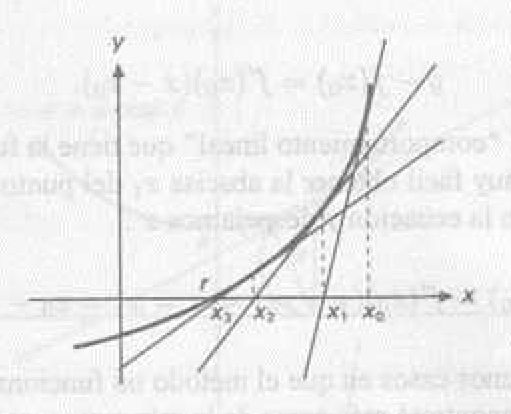


Figura 7.2.2. El método de Newton-Raphson.

El método de Newton-Raphson puede presentar algunas dificultades que impidan llegar a la raíz deseada. Por ejemplo, si en alguno de los pasos encontramos un x_k en el que $f'(x_k) = 0$, la recta tangente correspondiente sería paralela al eje de las x y no podríamos continuar con el siguiente paso (aparecería una división entre cero en la fórmula que define x_{k+1}).

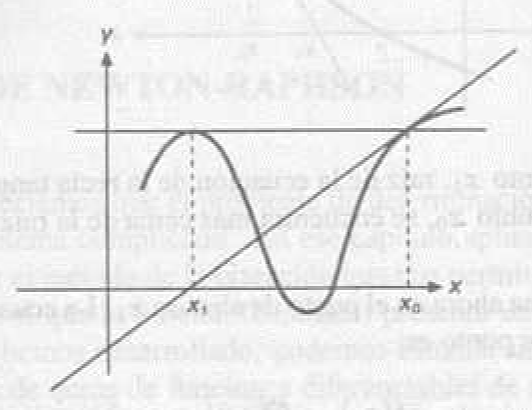


Figura 7.2.3. Una de las dificultades que se pueden presentar en el método de Newton-Raphson.

Otra situación adversa que se puede presentar en el método de Newton-Raphson es cuando los puntos $x_1, x_2, \ldots$ que se van generando con la fórmula del método anteriormente obtenida, en lugar de aproximarse a la raíz, se van alejando de ésta. Las condiciones generales que nos dicen cuándo es que el método de Newton-Raphson funciona bien son estudiadas en los cursos de Métodos Numéricos, y no es la intención en este momento aventurarse a estudiar tales condiciones. Simplemente mencionamos que si partimos de un "buen" punto inicial x_0 el método de Newton-Raphson tiene, en general, un estupendo comportamiento, y que si llegáramos a caer en una de las dos situaciones comentadas anteriormente lo mejor es regresar al punto de partida con un x_0 distinto.

Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 7.2.1. Determinar las raíces de la ecuación $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$.
SOLUCIÓN. La derivada de la función dada es $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 1$, de modo que la fórmula del método de Newton-Raphson se ve en este caso como:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^4 - x_n^3 - 3x_n^2 + x_n + 1}{4x_n^3 - 3x_n^2 - 6x_n + 1}.$$

Si comenzamos con $x_0 = 2$ obtenemos:

$$x_1 = 2 - \frac{(2)^4 - (2)^3 - 3(2)^2 + 2 + 1}{4(2)^3 - 3(2)^2 - 6(2) + 1} = 2 + \frac{1}{9} = \frac{19}{9}.$$

De manera análoga se obtienen los siguientes resultados:

$x_2 = 2.0956373$
$x_3 = 2.0952941$
$x_4 = 2.0952941 = x_3$

Así, concluimos que una raíz de la ecuación es $x_3 = 2.0952941$. Al partir de otros puntos x_0 se llega a otras raíces de la ecuación. A continuación resuminos los cálculos correspondientes.

$x_0 = 2$	$x_0 = 1$	$x_0 = -2$	$x_0 = -0.5$
$x_1 = 2.1111111$	$x_1 = 0.75$	$x_1 = -1.6451612$	$x_1 = -0.4772727$
$x_2 = 2.0956373$	$x_2 = 0.7377232$	$x_2 = -1.4450670$	$x_2 = -0.4772599$
$x_3 = 2.0952941$	$x_3 = 0.7376403$	$x_3 = -1.3679092$	$x_3 = x_2$
$x_4 = x_3$	$x_4 = x_3$	$x_4 = -1.3559503$	
		$x_5 = -1.3556744$	
		$x_6 = x_5$	

La ecuación dada tiene entonces las cuatro raíces $r_1 = 2.0952941$, $r_2 = 0.7376403$, $r_3 = -1.3556744$ y $r_4 = -0.4772599$. (Ver discusión presentada en la sección 4 del capítulo 3, referente al método de la bisección.) En este ejemplo se puede ver una de las dificultades que el método de Newton-Raphson presenta: al hacer los cálculos correspondientes con $x_0 = -1$ se obtiene una división entre cero en el segundo paso (al tratar de determinar x_1). Este problema lo arreglamos simplemente al cambiar de punto de partida x_0.

EJEMPLO 7.2.2. Determinar los puntos de intersección de las gráficas de las funciones $f(x) = e^{2x}$ y $g(x) = 3 - x^2$.

SOLUCIÓN. Al ver las gráficas de las dos funciones dadas es claro que existen dos puntos de intersección r_1 y r_2.

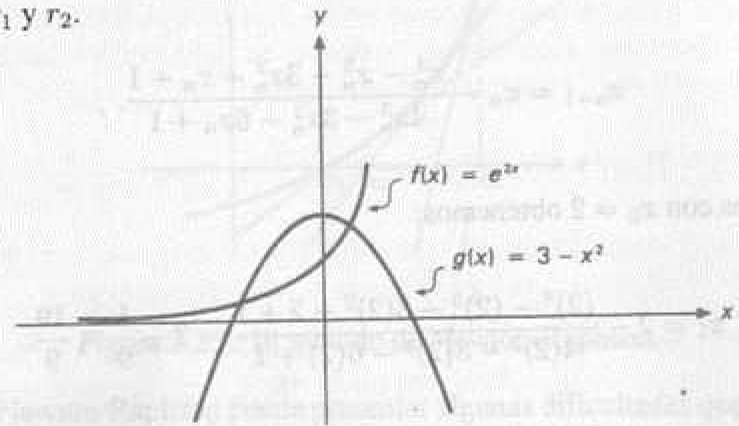


Figura 7.2.4. Las funciones $f(x) = e^{2x}$ y $g(x) = 3 - x^2$ del ejemplo 7.2.2.

Consideramos entonces la función:

$$F(x) = f(x) - g(x) = e^{2x} + x^2 - 3$$

y determinamos las raíces de ésta. La derivada de $F(x)$ es $F'(x) = 2e^{2x} + 2x$, de modo que la fórmula del método de Newton-Raphson se ve como:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{2x_n} + x_n^2 - 3}{2e^{2x_n} + 2x_n}.$$

A continuación se resumen los cálculos para determinar las raíces r_1 y r_2:

$x_0 =$	1	-1
$x_1 =$	0.6788043	-2.0782588
$x_2 =$	0.5312185	-1.7546808
$x_3 =$	0.5055797	-1.7231342
$x_4 =$	0.5049041	-1.722822
$x_5 =$	x_4	x_4

Así, las abscisas de los puntos de intersección de las gráficas de las funciones $f(x) = e^{2x}$ y $g(x) = 3 - x^2$ son $r_1 = -1.722822$ y $r_2 = 0.5049041$.

★

Una de las grandes ventajas que tiene el método de Newton-Raphson es la sencillez de los cálculos que involucra. Éstos pueden realizarse de un modo muy eficiente incluso en una calculadora manual (en una que acepte que se evalúen expresiones simbólicas: simplemente escribimos la fórmula del método y la evaluamos con las nuevas x que se van obteniendo). En el caso de una computadora, es muy fácil de programar el método de Newton-Raphson.

A continuación presentamos el diagrama de flujo, así como los programas correspondientes en Turbo-Pascal y en Borland C. En estos programas se hace el cálculo de las aproxi-

maciones de las raíces de una ecuación cualquiera usando solamente la fórmula del método de Newton-Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Las condiciones iniciales consisten en incluir directamente en el código la ecuación y su derivada, de manera que al correr el programa éste recibe como datos de entrada únicamente el punto inicial (x) y la precisión deseada (*precision*). El proceso general consiste en aproximarse —tanto como indique el usuario— a la raíz de una ecuación mediante una serie de iteraciones en las que se aplica la fórmula mencionada anteriormente y que concluyen cuando la distancia entre un punto x_n y su sucesor x_{n+1} es menor que el margen de precisión deseado. Si analizamos de modo más detallado el programa, podemos identificar en él las siguientes etapas:

1. Se declaran las variables:
   a) *termina*: nos indica si se ha alcanzado la precisión deseada.
   b) *tol*: cuida que en las sucesivas iteraciones no se "disparen" las x.
   c) n: lleva la cuenta del número de iteraciones (x_n).
2. Se llama al procedimiento *Ecuacion*, que se encarga de evaluar la función y la derivada en el punto x.
3. Se verifica que la derivada (dx) evaluada en x no sea cero —lo que nos traería una indeterminación. De ser así, se vuelve a pedir el punto inicial x hasta que dicha derivada deje de anularse.
4. Se aplica la fórmula del método de Newton-Raphson, que en nuestro caso denotamos como:

$$nx = x - (fx/dx).$$

   Además, aumentamos el contador n, para poder imprimir la correspondiente x_n.
5. Si el valor absoluto de $nx - x$ es mayor que *precision* entonces:
   a) Si el valor absoluto de $nx - x$ es mayor que 100 y $tol > 5$ entonces se pide otro punto inicial x, pues obviamente no nos estamos acercando a la raíz de la ecuación.
   b) Si el valor absoluto de $nx - x$ es mayor que 100 y $tol <= 5$ entonces aumentamos tol en 1 unidad —para que cuando éste llegue a 6 se pida otro punto inicial x— y proseguimos a la siguiente etapa.

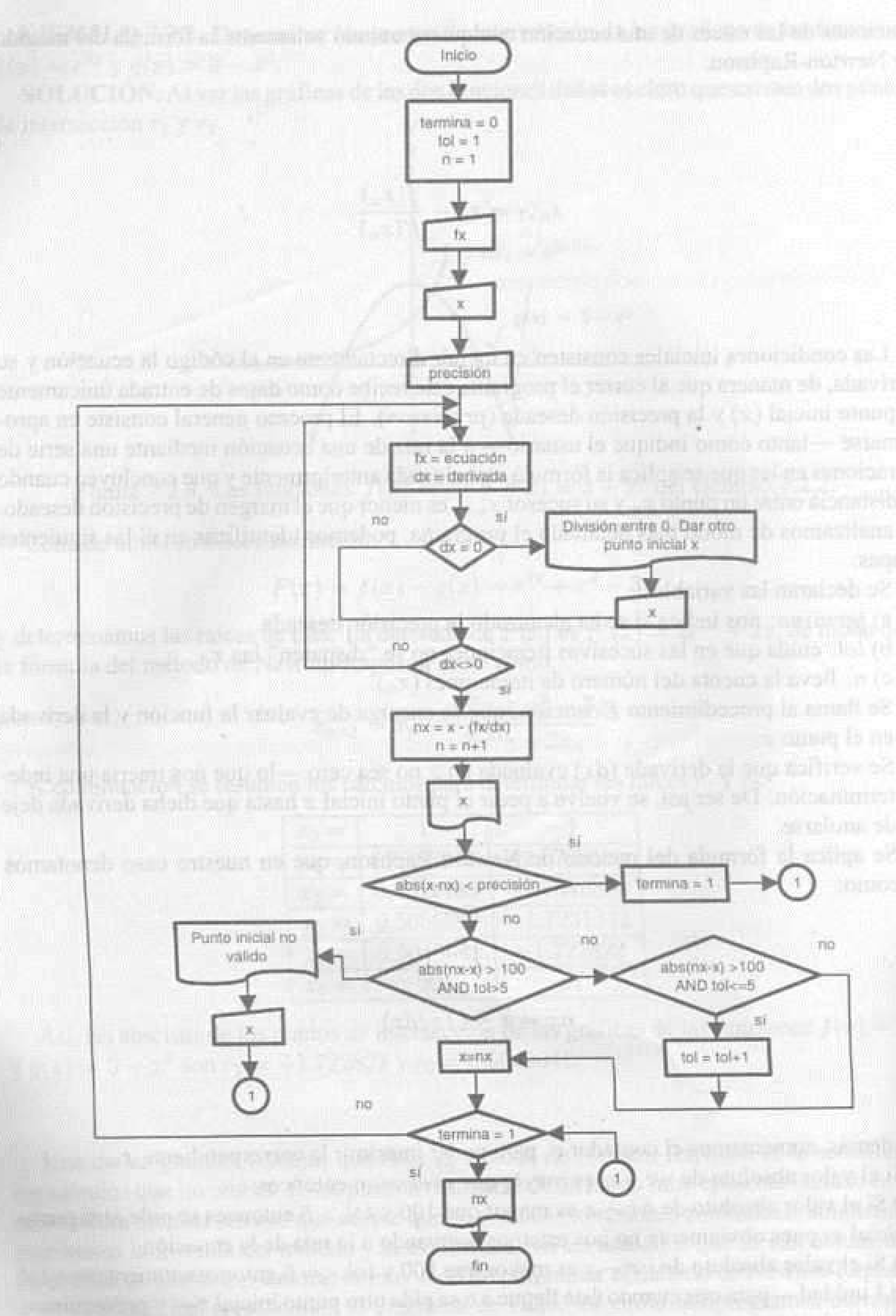


Diagrama de flujo del método de Newton-Raphson.

c) Actualizamos el valor de x, que ahora es nx.

6. Si el valor absoluto de $nx - x$ es menor que *precision* entonces igualamos *termina* a 1 para que se cumpla la condición de la siguiente etapa.
7. Si *termina* es 1 entonces ya encontramos la raíz de la ecuación; en caso contrario, repetimos todos los pasos a partir de 1 (el número de veces que sea necesario hasta que logremos la precisión deseada).

El programa en Turbo-Pascal se ve como:

```
Program Newton-Raphson;
Uses crt;
Var
  nx, fx, dx, x, error: real;
  ec: string;
  termina: boolean;
  n, tol: integer;
Function x^y (x: real; y: real): real;
{Aquí se define una función que eleve un número x a la potencia y}
Procedure Ecuación;
{Evalúa la ecuación y su derivada en el punto x}
begin
  repeat
    fx := {Escribir aquí la ecuación};
    dx := {Escribir aquí la derivada de la ecuación};
  if dx = 0 then
    begin
      write ('División entre cero, elige otro punto inicial: ');
      readln (x);
    end
  until dx <> 0;
end;

Begin        {Programa Principal}
  termina := false;
  tol := 0;
  n := 1;
  clrscr;
  gotoxy (1,2);
  writeln ('Este programa proporciona aproximaciones de raíces de una ecuación por
el método de Newton-Raphson');
  ec := ' {Escribir aquí la ecuación para poder desplegarla en pantalla} ';
  gotoxy ((80-length(ec)) div 2,4);
  write (ec);
  gotoxy (1,6);
  write ('¿En qué punto quieres iniciar a evaluar?: ');
  readln (x);
```

```
  gotoxy (1,7);
  write ('¿Qué margen de precisión (en decimales) deseas?: ');
  readln (error);
  repeat
   Ecuación;
   nx := x - (fx/dx);
   gotoxy (25,8+n);
   delay (300);

   write ('x',n,'            ',x:0:12);
   n := n + 1;
   if abs(nx - x) < error then
    termina := true
   else
    if (abs(nx - x) > 100) and (tol > 5) then
     begin
      write ('El punto que escogiste no es válido, elige otro: ');
      readln (x)
     end
    else
     begin
      if (abs(nx - x) > 100) and (tol <= 5) then
       tol := tol + 1;
      x := nx;
     end;
  until termina;
  gotoxy (25,8+n);
  delay (300);
  write ('x',n,'            ',nx:0:12);
  gotoxy (1,10+n);
  writeln ('La solución de la ecuación es: ',nx:0:12);
  readln;
  End.
```

La versión del programa anterior en Borland C es:

```
#include <stdio.h>
#include <string.h>
#include <conio.h>
#include <math.h>
#include <dos.h>

void Ecuación (float *x, float *fx, float *dx)
/*Evalúa la ecuación y su derivada en el punto x*/
```

```
{
  do {
    *fx = /*Escribir aquí la ecuación*/ ;
    *dx = /*Escribir aquí la derivada de la ecuación*/ ;
  if (*dx == 0) {
    printf ("División entre cero, elige otro punto inicial: ");
    scanf ("%f",&(*x));
    }
  } while (*dx == 0);
}

int main (void)          /*Programa Principal*/
{
  float nx,fx,dx,x,precision;
  char ec[80];
  int n,tol,termina;
  termina = 0;
  tol = 0;
  n = 1;
  clrscr ( );
  gotoxy (1,2);
  printf ("Este programa proporciona aproximaciones de raíces de una ecuación por el método de Newton-Raphson");
  strcpy (ec ,"/*Escribir aquí la ecuación para poder desplegarla en pantalla*/");
  gotoxy ((80-strlen(ec))/ 2,4);
  printf ("%s",ec);
  gotoxy (1,6);
  printf ("¿En qué punto quieres iniciar a evaluar?: ");
  scanf ("%f",&x);
  gotoxy (1,7);
  printf ("¿Qué margen de precisión (en decimales) deseas?: ");
  scanf ("%f",&precision);
  do {
    Ecuación (&x, &fx, &dx);
    nx = x - (fx/dx);
    gotoxy (25,8+n);
    delay (300);

    printf ("x%d%20.12f",n,x);
    n++;
    if (fabs(nx - x) < precision)
      termina = 1;
    else
      if ((fabs(nx - x) > 100) && (tol > 5)) {
```

```
        printf ("El punto que escogiste no es válido, elige otro: ");
        scanf ("%f", &x);
      } else {
        if ((fabs(nx - x) > 100) && (tol <= 5))
          tol++;
        x = nx;
      }
  } while (termina != 1);
  gotoxy (25,8+n);
  delay (300);
  printf ("x%d%20.12f",n,nx);
  printf ("\n\nLa solución de la ecuación es: %.12f",nx);
  getch ( );
  return 0;
}
```

EJERCICIOS (7.2)

En los ejercicios 1 al 20, use el método de Newton-Raphson para determinar con 5 cifras decimales exactas, la raíz de la función $f(x)$ dada que se encuentra entre 0 y 2.

1. $f(x) = 2x^3 - 19x^2 + 54x - 46.$

2. $f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 18x + 7.$

3. $f(x) = 2x^4 + 4x^3 - x^2 - 3x - 5.$

4. $f(x) = 2x^5 + 2x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 3x - 5.$

5. $f(x) = \dfrac{1.5x^2 - x - 8.5}{(1 + x^2)(5 + 3x + x^2)} + 1.$

6. $f(x) = \dfrac{1}{x^4 + x^3 + x + 1} - 2x.$

7. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x^4 + x^2 + 1} - 3x + 1.$

8. $f(x) = 1 - x^2 - \ln x.$

9. $f(x) = \ln\left(1 + \sqrt{1 + x^2}\right) - x.$

10. $f(x) = \operatorname{senh} x - e^{-2x}.$

11. $f(x) = \arctan(1 + x^2) + x^2 - 1.$

12. $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) + x - 1.$

13. $f(x) = \tanh(1 + x) - x^2.$

14. $f(x) = x \arctan x + x^2 - 1.$

15. $f(x) = e^{-x} + \ln(1 + x^2) - x.$

16. $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{5}\right) - e^{-4x}.$

17. $f(x) = \operatorname{senh}(x - 1)\cosh(x + 2) + e^{x-1} + 1 - x.$

18. $f(x) = \cosh x \arctan x + 3x - 1.$

19. $f(x) = e^{-x}\arctan(2+3x) - 1.$

20. $f(x) = (x^2+3x+2)e^{-2x} - e^x.$

En los ejercicios 21 al 30, use el método de Newton-Raphson para determinar con 5 cifras decimales exactas, la(s) abscisa(s) del (de los) punto(s) de intersección de las gráficas de las funciones dadas.

21. $f(x) = e^{0.5x}, g(x) = (x-1)^3 - 2.$

22. $f(x) = \ln(x-1), g(x) = -x^3.$

23. $f(x) = \operatorname{senh} x, g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}.$

24. $f(x) = \cosh x, g(x) = -\ln x.$

25. $f(x) = e^{x^2}, g(x) = \ln^2 x.$

26. $f(x) = 3x^2 - 1, g(x) = \dfrac{2}{3+x^2}.$

27. $f(x) = e^{4x}, g(x) = 5 - x^2.$

28. $f(x) = \arctan 2x, g(x) = \cosh x - 6.$

29. $f(x) = e^{5x}, g(x) = \dfrac{4}{2+3x^2}.$

30. $f(x) = x^4 - 2, g(x) = \tanh x.$

7.3 SEGMENTOS TANGENTES, NORMALES, SUBTANGENTES Y SUBNORMALES

Consideremos la gráfica de la función $y = f(x)$ y un punto $p = (x, f(x))$ de ella (con $f'(x) \neq 0$). Sea T la recta tangente a esta gráfica en p, y N la recta normal en p. Sea $r = (x_1, 0)$ el punto en donde la recta T corta el eje x y $s = (x_2, 0)$ el punto en donde la recta N corta el eje x. Consideremos también el punto $p' = (x, 0)$, proyección del punto p sobre el eje x.

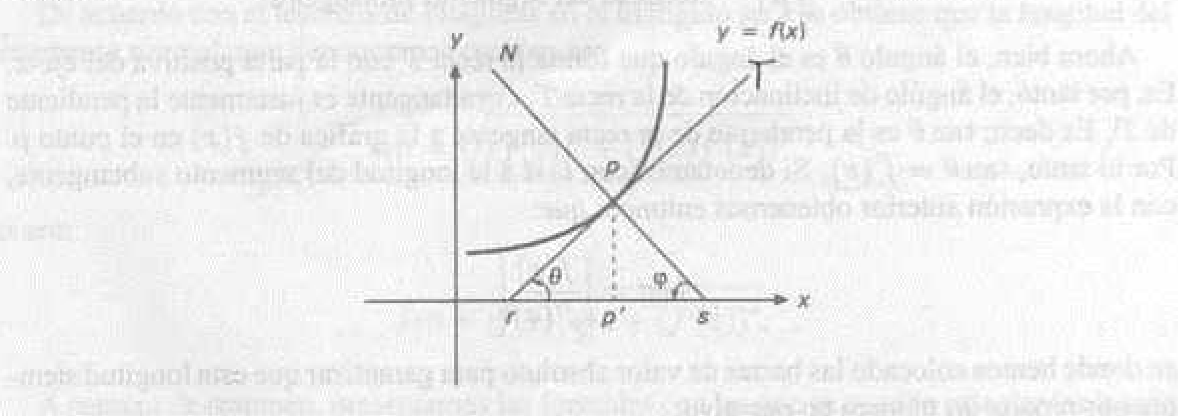


Figura 7.3.1. Los segmentos tangente, normal, subtangente y subnormal a la gráfica de una función en un punto dado de ella.

Definimos los segmentos:
$\overline{pr}$ = segmento tangente a la gráfica de la función en p.
$\overline{ps}$ = segmento normal a la gráfica de la función en p.
$\overline{rp'}$ = segmento subtangente a la gráfica de la función en p.
$\overline{p's}$ = segmento subnormal a la gráfica de la función en p.

Los segmentos anteriores juegan un papel importante en el estudio de algunas propiedades geométricas de las curvas en el plano. Veremos ahora cómo calcular su longitud.

Consideremos los triángulos rectángulos prp' y $pp's$. Sea θ el ángulo $\widehat{prp'}$ y φ el ángulo $\widehat{psp'}$. Puesto que el ángulo $\widehat{rps}$ es recto (ya que la recta N es perpendicular a la recta T), del triángulo prs vemos que $\theta + \varphi = \frac{\pi}{2}$.

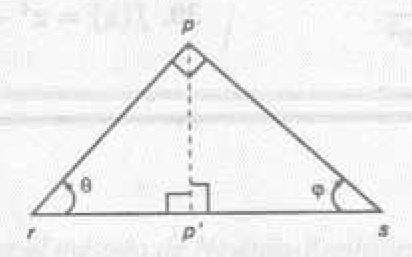


Figura 7.3.2. Los triángulos prp', $pp's$ y prs.

Fijemos nuestra atención en el triángulo rectángulo prp'. En él se identifican el cateto rp' como el segmento subtangente, $p'p$ como la ordenada del punto p (es decir, $f(x)$), y la hipotenusa pr como el segmento tangente. Si tomamos la (función trigonométrica) tangente del ángulo θ en este triángulo, obtenemos que:

$$\tan\theta = \frac{|\overline{p'p}|}{|\overline{rp'}|} = \frac{f(x)}{\text{longitud del segmento subtangente}}.$$

Ahora bien, el ángulo θ es el ángulo que forma la recta T con la parte positiva del eje x. Es, por tanto, el ángulo de inclinación de la recta T, cuya tangente es justamente la pendiente de T. Es decir, $\tan\theta$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto p. Por lo tanto, $\tan\theta = f'(x)$. Si denotamos con $lsst$ a la longitud del segmento subtangente, con la expresión anterior obtenemos entonces que:

$$lsst = \left|\frac{f(x)}{f'(x)}\right|$$

en donde hemos colocado las barras de valor absoluto para garantizar que esta longitud siempre nos reporte un número no negativo.

En el mismo triángulo rectángulo prp' ya conocemos los dos catetos: uno es $f(x)$ (la ordenada de p) y el otro es la longitud de la subtangente que acabamos de calcular. Por el

teorema de Pitágoras, concluimos que la hipotenusa (la longitud del segmento tangente, que denotaremos con lst) es:

$$lst = \sqrt{(f(x))^2 + \left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)^2}.$$

o sea:

$$lst = \left|\frac{f(x)}{f'(x)}\right| \sqrt{1 + (f'(x))^2}.$$

Del mismo modo, al considerar ahora el triángulo rectángulo $pp's$, tenemos que:

$$\tan\varphi = \frac{|\overline{p'p}|}{|\overline{p's}|} = \frac{f(x)}{\text{longitud del segmento subnormal}}.$$

Pero:

$$\tan\varphi = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{f'(x)},$$

por lo que, si denotamos con $lssn$ a la longitud del segmento subnormal, obtenemos que:

$$\frac{1}{f'(x)} = \frac{f(x)}{lssn},$$

o bien:

$$lssn = |f(x)f'(x)|.$$

De acuerdo con el teorema de Pitágoras en el triángulo $pp's$ se obtiene que la longitud del segmento normal, que denotaremos con lsn es:

$$lsn = \sqrt{(f(x))^2 + (f(x)f'(x))^2},$$

o sea:

$$lsn = |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2}.$$

A manera de resumen, presentamos las fórmulas con las que se pueden calcular las longitudes de los segmentos tangente (lst), normal (lsn), subtangente ($lsst$) y subnormal ($lssn$), a la gráfica de una función $y = f(x)$ en un punto dado de ella (de abscisa x).

longitud del segmento tangente:	$lst = \left\|\frac{f(x)}{f'(x)}\right\| \sqrt{1 + (f'(x))^2}.$
longitud del segmento normal:	$lsn = \|f(x)\| \sqrt{1 + (f'(x))^2}.$
longitud del segmento subtangente:	$lsst = \left\|\frac{f(x)}{f'(x)}\right\|.$
longitud del segmento subnormal:	$lssn = \|f(x)f'(x)\|.$

Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 7.3.1. Calcule la longitud de los segmentos tangente, normal, subtangente y subnormal a la parábola $y = x^2$ en el punto de abscisa $x = 1$.

SOLUCIÓN. La ordenada correspondiente del punto de abscisa $x = 1$ es $f(1) = (1)^2 = 1$. La derivada de la función dada es $y' = f'(x) = 2x$, de modo que en $x = 1$, $f'(1) = 2$. Así, se tiene:

$$lst = \left|\frac{f(x)}{f'(x)}\right| \sqrt{1 + (f'(x))^2} = \left|\frac{1}{2}\right| \sqrt{1 + (2)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$lsn = |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} = |1| \sqrt{1 + (2)^2} = \sqrt{5}.$$

$$lsst = \left|\frac{f(x)}{f'(x)}\right| = \frac{1}{2}.$$

$$lssn = |f(x)f'(x)| = |(1)(2)| = 2.$$

Estos segmentos se ven geométricamente como en la figura 7.3.3.

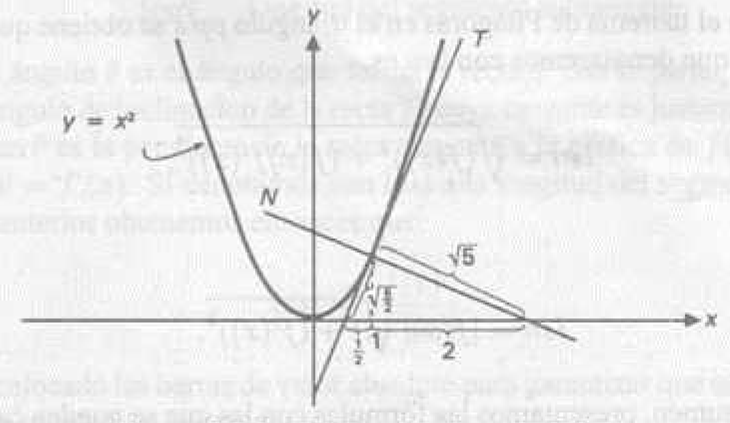


Figura 7.3.3. Gráfica del ejemplo 7.3.1.

★

EJEMPLO 7.3.2. Calcule la longitud del segmento subtangente a la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, en un punto arbitrario $p = (x_0, y_0)$ de la curva.

SOLUCIÓN. La misma aclaración hecha al inicio del ejemplo 7.1.4 es válida en este ejemplo: las coordenadas de p deben satisfacer la ecuación de la elipse, por lo que se cuenta, desde un principio, con la identidad $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$. Hemos visto que el segmento subtangente a la gráfica de una función $y = f(x)$ en un punto dado de ella se calcula con la fórmula:

$$lsst = \left|\frac{f(x)}{f'(x)}\right|.$$

El problema al que nos enfrentamos, como en el ejemplo 7.1.4, es que la elipse no es la gráfica de función alguna del tipo $y = f(x)$. Podríamos considerar las semielipses superior e inferior (que sí son gráficas de funciones) y hacer las cuentas por separado. Sin embargo, es fácil convencerse de que tales operaciones serían exactamente iguales, lo cual geométricamente se explica por las simetrías que presenta la curva. Si para calcular la longitud de la subtangente necesitamos el valor de la función en $x = x_0$, es decir, $f(x_0)$, éste lo podemos manejar simplemente como y_0 (la ordenada del punto p), sabiendo que este y_0 está conectado con x_0 de la manera como se dijo al principio (satisfaciendo la ecuación de la elipse). Por otra parte, necesitamos también el valor de la derivada $f'(x)$ en el punto en cuestión. Ya varias veces hemos visto que la derivación implícita nos conduce cómodamente a este resultado, sin necesidad de hacer explícitas las funciones involucradas en la ecuación de la elipse. De hecho, ya en el ejemplo 7.1.4, obtuvimos que la derivada y' para la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en un punto $p = (x_0, y_0)$ es:

$$y' = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}.$$

Ésta es justamente $f'(x_0)$. Entonces la longitud de la subtangente procurada es:

$$lsst = \left|\frac{f(x)}{f'(x)}\right| = \left|\frac{y_0}{-\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}}\right| = \left|\frac{a^2 y_0^2}{b^2 x_0}\right|.$$

Si usamos que x_0 y y_0 satisfacen la expresión $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, la cual se puede escribir como $b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2 = a^2 b^2$, o bien como $a^2 y_0^2 = a^2 b^2 - b^2 x_0^2$, vemos que la longitud de la subtangente puede ser expresada como:

$$lsst = \left|\frac{a^2 y_0^2}{b^2 x_0}\right| = \left|\frac{a^2 b^2 - b^2 x_0^2}{b^2 x_0}\right| = \left|\frac{a^2 - x_0^2}{x_0}\right|.$$

Este resultado es muy interesante. Observe en él la ausencia del parámetro b (el semieje vertical de la elipse). Esto significa que, por ejemplo, todas las elipses del tipo $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en los puntos de abscisa $x_0 = 1$ tienen la misma longitud de subtangente, a saber: $lsst = \left|\frac{a^2 - x_0^2}{x_0}\right| = \left|\frac{4-1}{1}\right| = 3$.

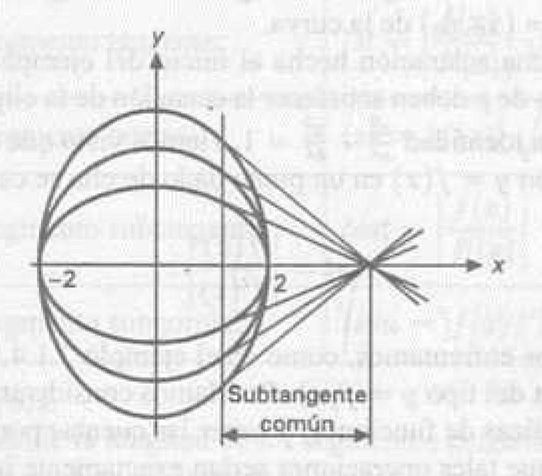


Figura 7.3.4. Todas las elipses $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tienen el mismo segmento subtangente en los puntos correspondientes de abscisa $x = 1$.

Una de las elipses $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ es (cuando $b^2 = a^2$) la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$. Este hecho nos sugiere que podemos trazar con regla y compás la recta tangente a una elipse dada en un punto dado de ella, de la siguiente manera:

1. Tomando como radio el semieje horizontal de la elipse, trazamos una circunferencia con centro en el origen.
2. Con una recta perpendicular al eje x (recuerde que es posible construir líneas perpendiculares a otras líneas dadas usando solamente regla y compás), trazamos una recta que pase por el punto dado p, y localizamos el punto q en donde esta recta corta la circunferencia construida en el paso anterior (en realidad hay dos de estos puntos: cualquiera de ellos nos sirve para la construcción).
3. Unimos el origen de coordenadas con el punto q localizado en el paso anterior.
4. Trazamos una recta perpendicular al segmento determinado en el paso anterior (esta recta es tangente a la circunferencia en q), y localizamos el punto r en donde esta recta corta el eje x.
5. Trazamos la recta que pasa por el punto r determinado en el paso anterior y el punto q de la elipse.


Esta recta es la tangente buscada.

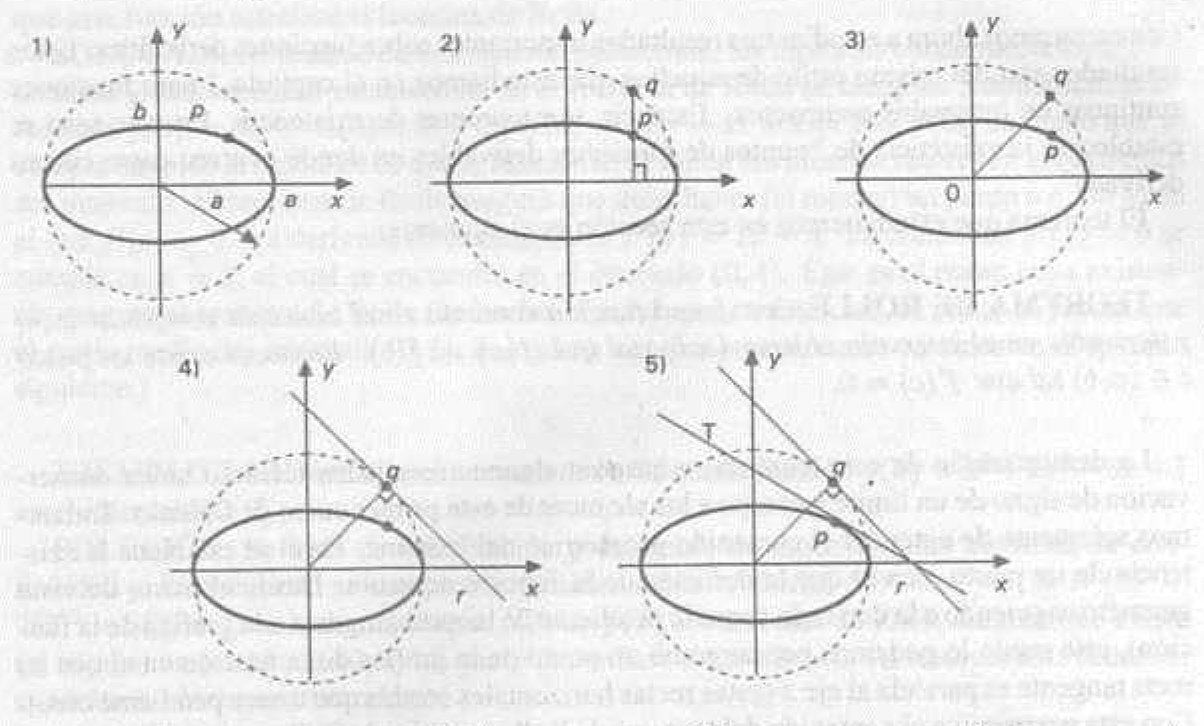


Figura 7.3.5. Procedimiento para construir la tangente a una elipse dada en un punto de ella, usando solamente regla y compás.

EJERCICIOS (7.3)

En los ejercicios 1 al 10, determine las longitudes de los segmentos tangente, normal, subtangente y subnormal a la gráfica de la función indicada en el punto de abscisa dada.

1. $f(x) = x^2, x_0 = -1.$

2. $f(x) = \dfrac{1}{x}, x_0 = 1.$

3. $f(x) = x^3, x_0 = 1.$

4. $f(x) = \arctan x, x_0 = 1.$

5. $f(x) = \ln x, x_0 = e.$

6. $f(x) = x \ln x, x_0 = e.$

7. $f(x) = \sqrt{5 - x^2}, x_0 = 2.$

8. $f(x) = x - \dfrac{1}{3}x^3, x_0 = 2.$

9. $f(x) = \sqrt{x + 4}, x_0 = 0.$

10. $f(x) = \cos x, x_0 = \dfrac{\pi}{4}.$

7.4 EL TEOREMA DE ROLLE

Comenzaremos ahora a estudiar tres resultados importantes sobre funciones derivables. Estos resultados son del mismo estilo de aquellos que estudiamos en el capítulo 3 para funciones continuas en intervalos compactos. Es decir, son teoremas de existencia. En este caso se establecerá la existencia de "puntos de funciones derivables en donde ocurren cosas con su derivada".

El teorema que estudiaremos en esta sección es el siguiente.

TEOREMA DE ROLLE. *Sea f una función continua en el intervalo compacto $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), tal que $f(a) = f(b)$. Entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

La demostración de este teorema se basa en algunos resultados técnicos sobre conservación de signo de un límite y escapa a los alcances de este primer curso de Cálculo. Trataremos solamente de entender el contenido geométrico del teorema. En él se establece la existencia de un punto c en el que la derivada de la función se anula. Desde el punto de vista geométrico (viendo a la derivada como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función), este punto lo podemos pensar como un punto de la gráfica de la función en el que su recta tangente es paralela al eje x (estas rectas horizontales son las que tienen pendiente cero). Con esta perspectiva el contenido del teorema de Rolle se entiende fácilmente: piense en una función cuya gráfica comienza en el punto $p = (a, f(a))$ y termina en el punto $q = (b, f(b))$ el cual se encuentra a la misma altura sobre el eje x que p (ésta es la condición $f(a) = f(b)$ establecida en las hipótesis del teorema). La gráfica de la función nunca se rompe (pues la función es continua en $[a, b]$) y además, dentro del intervalo (a, b), tal gráfica no tiene picos (es decir, siempre es posible trazar una recta tangente a la gráfica en los puntos del interior del intervalo, ya que en esos puntos la función es derivable). Lo que establece el teorema de Rolle es que la recta tangente a la gráfica *tiene que hacerse horizontal* (la derivada de la función debe valer cero) *cuando menos una vez en algún punto con abscisa en el interior del intervalo*. Trate de construir una curva con las características mencionadas y verá que el teorema de Rolle establece un resultado bastante natural: en algún momento tendrá que "acostar" la recta tangente a la curva.

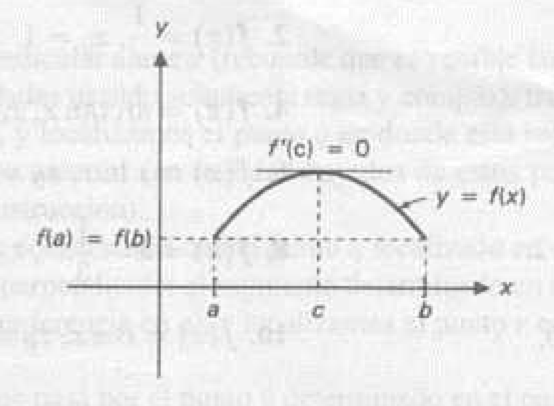


Figura 7.4.1. El teorema de Rolle.

EJEMPLO 7.4.1. Considere la función $f(x) = x^2 - 4x + 2$ en el intervalo $[0, 4]$. Verificar que esta función satisface el teorema de Rolle.

SOLUCIÓN. Al tratarse de una función polinomial, las hipótesis concernientes a la continuidad y derivabilidad establecidas en el teorema de Rolle se cumplen automáticamente. Además $f(0) = (0)^2 - 4(0) + 2 = 2$ y $f(4) = (4)^2 - 4x + 2 = 2 = f(0)$, de modo que se cumple también la hipótesis de que la función debe tomar los mismos valores en los extremos del intervalo. El teorema de Rolle asegura que debe haber (al menos) un punto $c \in (0, 4)$ en el que $f'(c) = 0$. La derivada de la función es $f'(x) = 2x - 4$. La condición $f'(x) = 0$ se cumple en $x = 2$, el cual se encuentra en el intervalo $(0, 4)$. Éste es el punto cuya existencia asegura el teorema de Rolle (de hecho, observe que en este caso tal punto es justamente el punto medio del intervalo $(0, 4)$; lo cual no siempre ocurre, como veremos en el ejemplo siguiente.)

⋆

EJEMPLO 7.4.2. Verifique el teorema de Rolle con la función $f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x + 1$ en el intervalo $[0, 2]$.

SOLUCIÓN. Se trata de una función polinomial, de modo que las hipótesis de continuidad y derivabilidad se cumplen automáticamente. Además $f(0) = 1$ y $f(2) = (2)^3 + 2(2)^2 - 8(2) + 1 = 1$, de modo que $f(0) = f(2)$. El teorema de Rolle asegura que existe (al menos) un punto $x \in (0, 2)$ tal que $f'(x) = 3x^2 + 4x - 8 = 0$. Al resolver esta ecuación cuadrática, obtenemos las raíces:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4(3)(-8)}}{2(3)} = \frac{-4 \pm \sqrt{112}}{6} = \begin{cases} \frac{-4+\sqrt{112}}{6} \approx 1.097 \\ \frac{-4-\sqrt{112}}{6} \approx -2.43. \end{cases}$$

Así pues, la derivada de la función dada se anula en los dos puntos x_1 y x_2. Al observar estos dos puntos, vemos que $x_1 = \frac{-4+\sqrt{112}}{6} \approx 1.097$ se encuentra en el intervalo $(0, 2)$. Éste es el punto c cuya existencia es asegurada por el teorema de Rolle.

⋆

EJEMPLO 7.4.3. Verifique la validez del teorema de Rolle con la función $f(x) = x^4 + x^2 + 2$ en el intervalo $[-1, 1]$.

SOLUCIÓN. Puesto que la función dada es polinomial, las hipótesis de continuidad y derivabilidad exigidas en el teorema de Rolle se cumplen automáticamente. Además, puesto que $f(x)$ es una función par, se tiene $f(-1) = f(1)$, es decir, se cumple también la hipótesis de que el valor de la función en los extremos del intervalo es el mismo. El teorema de Rolle asegura la existencia de una $c \in (-1, 1)$ tal que $f'(c) = 0$. Como $f'(x) = 4x^3 + 2x$, tal c debe cumplir la ecuación $4c^3 + 2c = 0$. Esta ecuación cúbica se puede escribir como $2c(2c^2 + 1) = 0$, de donde se ve que la única raíz real es $c = 0$. Este punto, que se encuentra efectivamente en el intervalo $(-1, 1)$, es aquél cuya existencia asegura el teorema de Rolle.

⋆

EJEMPLO 7.4.4. Considere la función $f(x) = |x|$ en el intervalo $[-2, 2]$. Esta función es continua en $[-2, 2]$ y $f(-2) = |-2| = 2 = |2| = f(2)$. Sin embargo, la derivada $f'(x)$ no se anula nunca en este intervalo ($f'(x)$ es 1 si $x > 0$ y es -1 si $x < 0$). Explicar por qué no se cumple el teorema de Rolle en este caso.

SOLUCIÓN. Si revisamos las hipótesis que se exigen en el teorema de Rolle vemos que: 1) la función $f(x) = |x|$ es continua en $[-2, 2]$, 2) la función toma el mismo valor en los extremos del intervalo $[-2, 2]$, PERO... 3) la función $f(x) = |x|$ no es derivable en el intervalo $(-2, 2)$ (no es derivable en $x = 0$). En este caso, al no cumplirse las hipótesis del teorema de Rolle, éste no asegura que se cumpla su conclusión.

⋆

EJEMPLO 7.4.5. Suponga que un cuerpo se mueve sobre el eje x según la ley de movimiento $x = f(t) = t^3 - 4t^2 - 15t + 18$, en donde x se mide en metros y t en minutos. Demostrar que hay un instante entre los $t = 1$ y $t = 6$ minutos, en el que la velocidad del cuerpo es cero.

SOLUCIÓN. La función de la ley de movimiento del cuerpo es polinomial, por lo tanto es continua en el intervalo $[1, 6]$ y diferenciable en el intervalo $(1, 6)$. Además $f(1) = (1)^3 - 4(1)^2 - 15(1) + 18 = 0$ y $f(6) = (6)^3 - 4(6)^2 - 15(6) + 18 = 0 = f(1)$, de modo que a los $t = 1$ minutos y a los $t = 6$ minutos el cuerpo se encuentra en la posición $x = f(1) = f(6) = 0$ metros (es decir, el cuerpo se encuentra en el origen). El teorema de Rolle nos asegura que existe un valor de $t \in (1, 6)$ para el cual $f'(t) = 0$. Éste es justamente el instante en el que la velocidad (que es la derivada $f'(t)$) es igual a cero. Podemos decir explícitamente cuál es ese instante si resolvemos la ecuación $f'(t) = 3t^2 - 8t - 15 = 0$. Las raíces son:

$$t_{1,2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(3)(-15)}}{2(3)} = \frac{-8 \pm \sqrt{244}}{6} = \begin{cases} \frac{-8+\sqrt{244}}{6} \approx 1.27 \\ \frac{-8-\sqrt{244}}{6} \approx -3.9367. \end{cases}$$

Entonces, la velocidad del cuerpo se vuelve cero a los $t = 1.27 \in (1, 6)$ minutos.

⋆

EJERCICIOS (7.4)

En los ejercicios 1 al 10, determine si la función dada satisface las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo indicado. En caso afirmativo, determine el (los) valor(es) de c que tal teorema asegura que existe(n).

1. $f(x) = x^4 + 3$ en $[-1, 1]$.

2. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ en $[-2, 2]$.

3. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ en $[-2, 2]$.

4. $f(x) = x^4 + 3x^2 - 4$ en $[-1, 1]$.

5. $f(x) = \sin x \cos x$ en $[0, \pi]$.

6. $f(x) = (x - 2)(x - 3)(x + 4)$ en $[2, 3]$.

7. $f(x) = \tan^2 x$ en $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

8. $f(x) = \tan^2 x$ en $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

9. $f(x) = x(x^2 - 9)(x^2 + 1)$ en $[-3, 3]$.

10. $f(x) = sgn(x)$ en $[3, 5]$.

11. Use el teorema de Rolle para demostrar que la ecuación $x^3 - 3x + k = 0$, en donde k es una constante, no puede tener dos raíces reales distintas en el intervalo $(0, 1)$.

12. Demuestre que si la ecuación $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$ tiene una raíz real positiva x_0, entonces la ecuación $5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2 + 2dx + e = 0$ tiene también una raíz real positiva, la cual es menor que x_0.

7.5 EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO (LAGRANGE)

El teorema del valor medio, conocido también como teorema de Lagrange, es una generalización del teorema de Rolle visto en la sección anterior. En este teorema se elimina la hipótesis (que aparece en el teorema de Rolle) de que los valores de la función en los extremos del intervalo sean iguales.

TEOREMA DEL VALOR MEDIO (LAGRANGE). *Sea f una función continua en el intervalo compacto $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b). Entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Si consideramos los puntos $p = (a, f(a))$ y $q = (b, f(b))$ de la gráfica de la función, vemos que la recta que pasa por estos puntos (la cual es una recta secante a la gráfica de la función por p y q) tiene una pendiente igual al segundo miembro de la fórmula establecida en la igualdad del teorema de Lagrange. Lo que este teorema establece, entonces, es que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función (la derivada de la función), en algún punto con abscisa c dentro del intervalo (a, b), es la misma que la pendiente de la recta secante a la gráfica de la función por p y q. Más aún, esta igualdad de pendientes se puede interpretar geométricamente como un paralelismo de rectas, de modo que lo que el teorema de Lagrange establece es que *si una función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b) entonces existe un punto de la gráfica de la función con abscisa en el intervalo (a, b) en el que la recta tangente es paralela a la recta secante que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.*

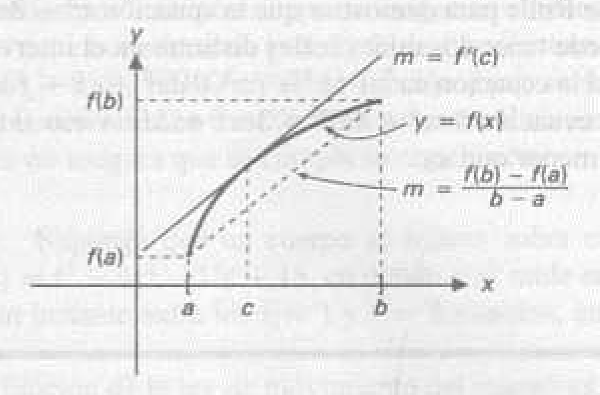


Figura 7.5.1. El teorema del valor medio (Lagrange.)

Observe que si en el teorema de Lagrange ponemos la condición adicional de que $f(a) = f(b)$, entonces concluimos que existe un $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

la cual es la conclusión del teorema de Rolle. Es decir, el teorema de Rolle resulta ser un caso particular del teorema de Lagrange: finalmente se establece la existencia de un punto de la gráfica de la función en el que la recta tangente queda paralela a una recta dada (al eje x en el caso del teorema de Rolle, o a la recta secante a la gráfica de la función que pasa por los puntos con abscisas en los extremos del intervalo, en el caso del teorema de Lagrange). De hecho, apoyándonos en el teorema de Rolle, es fácil dar una prueba de la validez del teorema de Lagrange. En efecto, sea $f(x)$ como en las hipótesis del teorema de Lagrange. Considere la función

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Ciertamente esta función es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) (porque son propiedades que tiene $f(x)$ y la función $\varphi(x)$ está definida como una suma de $f(x)$ y una función polinomial, la cual no altera tales propiedades). Pero además, observe que:

$$\varphi(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0,$$

y

$$\varphi(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(b) - f(a) - (f(b) - f(a)) = 0,$$

de modo que además la función $\varphi(x)$ satisface la condición establecida en el teorema de Rolle de que $\varphi(a) = \varphi(b)$. Podemos concluir, entonces, apoyados en el teorema de Rolle, que existe (al menos) un $c \in (a, b)$ tal que $\varphi'(c) = 0$. Si calculamos la derivada de la función $\varphi(x)$ obtenemos:

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

la cual en el punto c es igual a cero, es decir:

$$\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

o bien:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

que es la conclusión del teorema de Lagrange.

EJEMPLO 7.5.1. Verifique el teorema de Lagrange con la función $f(x) = x^2 - x - 5$ en el intervalo $[0, 3]$.

SOLUCIÓN. La función considerada es polinomial y por lo tanto las condiciones de continuidad y derivabilidad se cumplen automáticamente. El teorema de Lagrange asegura que debe existir un $c \in (0, 3)$ en el que la derivada sea igual a:

$$\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{(9 - 3 - 5) - (-5)}{3} = \frac{6}{3} = 2.$$

Como $f'(x) = 2x - 1$, en el punto c debe ocurrir que $f'(c) = 2c - 1 = 2$, de donde $c = \frac{3}{2} \in (0, 3)$. Éste es el punto cuya existencia asegura el teorema de Lagrange.

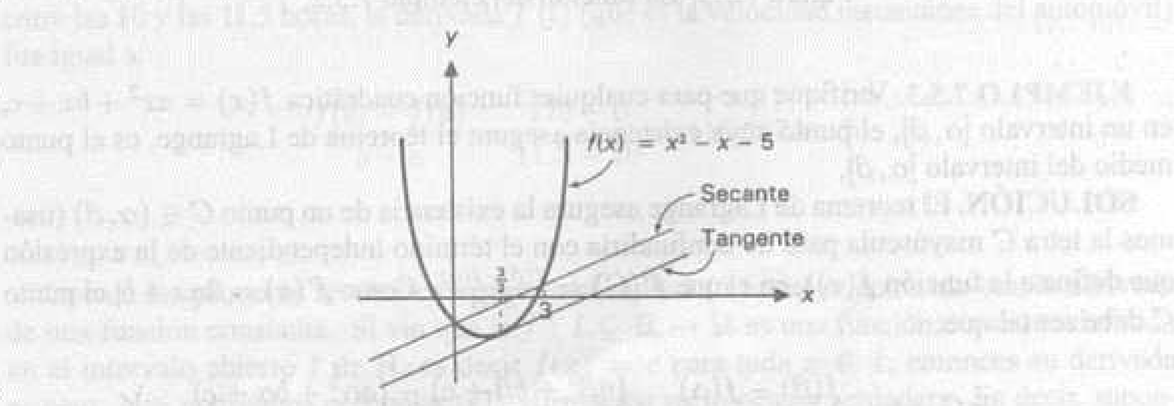


Figura 7.5.2. La función del ejemplo 7.5.1.

EJEMPLO 7.5.2. Verifique el teorema de Lagrange con la función $f(x) = x \ln x$ en el intervalo $[1, e]$.

SOLUCIÓN. La función dada es continua en $[1, e]$ y derivable en $(1, e)$ (es un producto de funciones con tales características). El teorema de Lagrange asegura que existe un $c \in (1, e)$ en el que la derivada debe ser igual a:

$$\frac{f(e) - f(1)}{e - 1} = \frac{e \ln e - (1) \ln 1}{e - 1} = \frac{e}{e - 1}.$$

Como $f'(x) = x\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x = 1 + \ln x$, en el punto c debe ocurrir que

$$1 + \ln c = \frac{e}{e-1},$$

de donde:

$$\ln c = \frac{e}{e-1} - 1 = \frac{1}{e-1},$$

o bien:

$$c = e^{\frac{1}{e-1}} \approx 1.78957 \in (1, e).$$

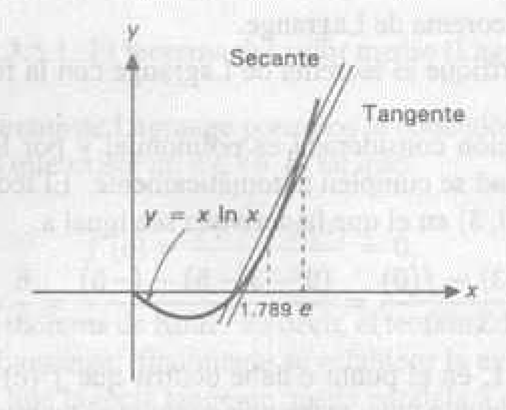


Figura 7.5.3. La función del ejemplo 7.5.2.

★

EJEMPLO 7.5.3. Verifique que para cualquier función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, en un intervalo $[\alpha, \beta]$, el punto cuya existencia asegura el teorema de Lagrange, es el punto medio del intervalo $[\alpha, \beta]$.

SOLUCIÓN. El teorema de Lagrange asegura la existencia de un punto $C \in (\alpha, \beta)$ (usamos la letra C mayúscula para no confundirla con el término independiente de la expresión que define a la función $f(x)$), en el que $f'(C) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$. Como $f'(x) = 2ax + b$, el punto C debe ser tal que:

$$2aC + b = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{(a\beta^2 + b\beta + c) - (a\alpha^2 + b\alpha + c)}{\beta - \alpha}$$

$$= \frac{a\left(\beta^2 - \alpha^2\right) + b(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{a(\beta - \alpha)(\beta + \alpha) + b(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha}$$

$$= \frac{(\beta - \alpha)\left(a(\beta + \alpha) + b\right)}{\beta - \alpha} = a(\beta + \alpha) + b.$$

Al despejar C de la expresión que acabamos de obtener ($2aC + b = a(\beta + \alpha) + b$) obtenemos:

$$C = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Es decir, el punto C cuya existencia en el intervalo (α, β) asegura el teorema de Lagrange es justamente el punto medio del intervalo (ver resultado del ejemplo 7.4.1).

★

EJEMPLO 7.5.4. Un automóvil pasó por la caseta A a las 10:00 hrs y por la caseta B, la cual se encuentra a 175 km de A, a las 11:30 h. En la caseta B se presentó un oficial de tránsito con el automovilista y le dijo: "Señor, usted sabe que la velocidad máxima permitida en esta carretera es de 95 km/h, y usted excedió tal velocidad, por lo tanto tendré que levantarle una infracción". ¿En qué se basa el oficial para hacer tal afirmación al automovilista?

SOLUCIÓN. Llamemos $x = f(t)$ a la ley de movimiento del automóvil, con x en kilómetros y t en horas. Supongamos que esta función es continua y derivable para $t \geq 0$ (desde el punto de vista físico, la continuidad es fácil de aceptar; ¿cómo se explica desde el punto de vista físico que la ley de movimiento de un cuerpo sea una función derivable?) Lo que hizo el oficial para poder asegurarle al conductor del automóvil que había excedido el límite de velocidad fue enterarse a qué horas había pasado el automóvil por la caseta A. Entonces, al saber el momento en el que arrancó de la caseta A rumbo a la caseta B, y el tiempo que tardó en hacer este recorrido, simplemente aplicó el teorema de Lagrange a la ley de movimiento $x = f(t)$ en el intervalo $[10, 11.5]$, tomando como $x_0 = f(10) = 0$ y $x_1 = f(11.5) = 175$, y con este teorema se aseguró de que cuando menos en un instante t entre las 10 y las 11.5 horas, la derivada $f'(t)$ (que es la velocidad instantánea del automóvil) fue igual a:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{175 - 0}{11.5 - 10} = 116.667 \text{ km/h}.$$

★

Uno de los primeros resultados vistos en el capítulo 4 fue el relacionado con la derivada de una función constante. Si vio que si $f : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es una función constante definida en el intervalo abierto I de $\mathbf{R}$, es decir $f(x) = c$ para toda $x \in I$, entonces su derivada es cero. Nos podríamos preguntar si la afirmación recíproca es verdadera. Es decir, supongamos que una función $f : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida en el subconjunto I de $\mathbf{R}$ es derivable en I y que $f'(x) = 0$ para toda x de I. La pregunta es si podemos concluir que tal función es constante, y la respuesta es: NO (en general). Por ejemplo, considere la función $f : \mathbf{R} - \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Para $x > 0$ esta función es $f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$ y por lo tanto $f'(x) = 0$. Para $x < 0$ esta función es $f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$ y por lo tanto $f'(x) = 0$. Entonces $f'(x) = 0$ para toda x en el dominio de la función, y sin embargo, la función no es constante (pues, por ejemplo, $f(2) = 1$ y $f(-3) = -1$). El teorema de Lagrange nos ayuda a ver bajo qué condiciones la afirmación "si $f(x)$ es constante, entonces $f'(x) = 0$" tiene una recíproca verdadera. De hecho, se trata de una sola condición muy simple: la función $f(x)$ debe estar *definida en un intervalo.*

COROLARIO (del teorema de Lagrange). *Si $f : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es una función derivable definida en el intervalo abierto I de $\mathbf{R}$, y $f'(x) = 0$ para toda x de I, entonces la función es constante.*

En efecto, sean $a, b \in I$ dos puntos tomados arbitrariamente en I. Consideremos el intervalo $[a, b] \subset I$. Al ser la función $f(x)$ derivable en I, es continua en I, y por lo tanto es continua en $[a, b]$ (y derivable en (a, b)), de modo que las hipótesis del teorema de Lagrange se cumplen para $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$. Existe entonces un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Pero $f'(c) = 0$ (puesto que la derivada de $f(x)$ es igual a cero para toda x de I). Entonces, de la expresión anterior concluimos que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Longrightarrow f(b) = f(a),$$

es decir, el valor de la función en dos puntos cualesquiera de I es el mismo. Esto significa que la función es constante en I. Observe el papel tan importante que juega la hipótesis de que la función está definida en un intervalo y observe que el ejemplo dado anteriormente con la función $f(x) = \frac{|x|}{x}$ no contradice el contenido del corolario, pues esta función está definida en $\mathbf{R} - \{0\}$ *que no es un intervalo.*

EJEMPLO 7.5.5. Verifique que la función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, dada por

$$f(x) = \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \frac{1}{4}\left(3\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x + \sqrt{3}\operatorname{sen}(2x)\right)$$

es constante.

SOLUCIÓN. La función está definida en el intervalo $\mathbf{R}$, de modo que, según el corolario visto anteriormente, es suficiente que demostremos que la derivada de esta función es cero. Tal derivada es:

$$f'(x) = \left[2\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)\right]\left[-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + x\right)\right] + \\ + \frac{1}{4}\left[6(\cos x)(-\operatorname{sen} x) + 2(\operatorname{sen} x)(\cos x) + \sqrt{3}(\cos(2x))(2)\right].$$

A continuación se muestran algunos de los pasos de la simplificación de este resultado (hasta obtener que es cero):

$$f'(x) = -\operatorname{sen}\left(2\left(\frac{\pi}{3} + x\right)\right) + \frac{1}{4}\left[-4\operatorname{sen} x\cos x + 2\sqrt{3}\cos(2x)\right]$$

$$= -\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right) - \operatorname{sen} x\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x)$$

$$= -\left[\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\cos(2x) + \cos\frac{2\pi}{3}\operatorname{sen}(2x)\right] - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x)$$

$$= -\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x) + \left(-\frac{1}{2}\right)\operatorname{sen}(2x)\right] - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x) = 0$$

(en donde usamos la identidad $2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \operatorname{sen}(2\theta)$ y los valores $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$).

★

Para terminar esta sección, descubriremos (con la ayuda del teorema de Lagrange) una interesante propiedad de la función exponencial $f(x) = e^x$. Ésta es, como sabemos, una función derivable en todo R, tal que $e^x < 1$ para $x < 0$, $e^0 = 1$, y $e^x > 1$ para $x > 0$. Sea x_0 un número real positivo cualquiera y apliquemos el teorema de Lagrange a esta función en el intervalo $[0, x_0]$. Este teorema nos dice que existe $c \in (0, x_0)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0}.$$

O sea, como $f'(x) = f(x) = e^x$, nos queda que:

$$e^c = \frac{e^{x_0} - 1}{x_0},$$

que podemos reescribir como:

$$e^{x_0} = 1 + e^c x_0.$$

Como $c \in (0, x_0)$, en particular $c > 0$ y así $e^c > 1$, de modo que de la expresión anterior podemos concluir que (al escribir simplemente x en lugar de x_0):

$$e^x > 1 + x,$$

desigualdad que es válida entonces para cualquier $x > 0$. Este hecho, que dedujimos vía el teorema de Lagrange, simplemente nos indica que la función exponencial $f(x) = e^x$ se encuentra por encima de la recta $y = 1 + x$ para toda $x \in \mathrm{R}^+$. Observe que, de hecho, esta recta es la recta tangente a $f(x) = e^x$ en $x = 0$.

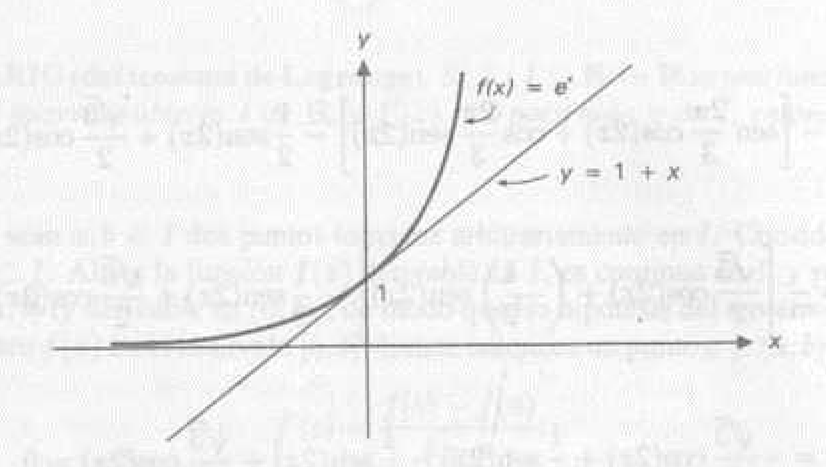


Figura 7.5.4. La función exponencial $f(x) = e^x$ siempre está por encima de la recta $y = 1 + x$ para las x positivas.

Esta desigualdad tiene una consecuencia muy importante que ahora vamos a establecer. Fijemos un número natural n, y consideremos la función $g(x) = x^n$. Queremos convencernos de que la función exponencial $f(x) = e^x$ tiene un crecimiento más rápido que la función $g(x) = x^n$. Esto significa que, para x muy grandes, la función $f(x) = e^x$ es mayor que la función $g(x) = x^n$, o bien, en términos de límites, que:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

Medite un poco sobre este resultado: se está afirmando (y lo demostraremos) que para x muy grandes, el valor de e^x es "infinitamente mayor" que el de x^n. Recuerde que el número n es el que usted quiera. ¿Puede ser $n = 10000$? ¡Claro! Si así lo desea. Y entonces surge la inquietante pregunta: ¿cómo puede ser mayor e^x que x^{10000}, si, por ejemplo, e^3 supera apenas el valor 20, mientras que 3^{10000} es un número con más de 4700 dígitos ($3^{10000} \approx 1.63135 \times 10^{4771}$)? Pues, *aunque usted no lo crea,* en algún momento (para una x suficientemente grande), la función exponencial e^x comenzará a tomar valores mayores que x^{10000}. En términos de las gráficas de estas funciones, este resultado se entiende como: la gráfica de $f(x) = e^x$ se cruzará con la gráfica de $y = x^{10000}$ en alguna $x_0 > 0$, y a partir de ese punto, $y = e^x$ se mantendrá por encima (¡cada vez más alejada!) de $y = x^{10000}$. Si usted intenta ver la gráfica de $y = x^{10000}$ verá muy rápidamente (pasando el valor $x = 1$) casi una recta vertical (que muestra el impresionante crecimiento de esta función). En cambio, estamos acostumbrados a ver la gráfica de la función exponencial como se muestra en la figura 7.5.4, muy "en los alrededores del origen", en donde esta gráfica tiene un comportamiento muy decente... nadie sospecharía que un poco más alejado del origen —después del valor $x_0 = 116700$—, el comportamiento de esta gráfica es mucho peor que el de $y = x^{10000}$ (su crecimiento es mucho más violento, al punto de separarse por encima de esta última función y hacer que su cociente $\frac{e^x}{x^{10000}}$ se haga cada vez más grande).

Veamos entonces este hecho. Partimos de que $e^x > 1 + x$ para $x > 0$. Entonces, escribiendo $\frac{x}{n+1}$ en lugar de x, obtenemos:

$$e^{\frac{x}{n+1}} > 1 + \frac{x}{n+1} > \frac{x}{n+1},$$

de donde, elevando a la potencia $n+1$ se obtiene:

$$e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}.$$

Llamenos K al número $(n+1)^{n+1}$(puesto que n está fija, éste es una constante). La desigualdad anterior toma el aspecto:

$$\frac{e^x}{x^n} > \frac{x}{K}.$$

Como el número $\frac{x}{K}$ se puede hacer arbitrariamente grande (tomando x suficientemente grande), la desigualdad anterior nos permite concluir lo que deseábamos: si $x \to +\infty$, el valor de $\frac{e^x}{x^n}$, por ser mayor que $\frac{x}{K}$ que tiende a infinito, debe tender también a infinito. Otra manera equivalente de establecer este resultado, es como:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

en el cual se lee el mismo hecho comentado anteriormente: la función exponencial $f(x) = e^x$ crece más rápido que x^n para cualquier n, al grado de que para x muy grandes, el valor de e^x, por ser mucho mayor que el de x^n, hace que el cociente $\frac{x^n}{e^x}$ tienda a cero.

Con un poco más de trabajo (que dejamos para el lector interesado), se puede demostrar que si $p(x)$ es un polinomio cualquiera (de cualquier grado), se tiene:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0.$$

EJERCICIOS (7.5)

1. ¿Verdadero o falso? Si una función satisface las hipótesis del teorema de Lagrange en un intervalo $[a, b]$, entonces satisface las hipótesis del teorema de Rolle en $[a, b]$.

2. ¿Verdadero o falso? Si una función satisface las hipótesis del teorema de Rolle en un intervalo $[a, b]$, entonces satisface las hipótesis del teorema de Lagrange en $[a, b]$.

3. ¿Verdadero o falso? Si una función no satisface las hipótesis del teorema de Lagrange en un intervalo $[a, b]$, entonces no existe punto alguno $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

4. Sea $f(x)$ una función polinomial cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas. Demuestre que existe un punto $c \in (0, 1)$ tal que $f'(c) = f(1)$.

En los ejercicios 5 al 15, determine si la función dada satisface las hipótesis del teorema de Lagrange en el intervalo indicado. En caso afirmativo, determine el (los) valor(es) de c que tal teorema asegura que existe(n).

5. $f(x) = 234x^2 + 1500\pi x + \sqrt{4+\pi^3}$, en $[1, 4]$.

6. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$.

7. $f(x) = \cos x$ en $[0, \pi]$.

8. $f(x) = \sin x$ en $[0, \pi]$.

9. $f(x) = \ln x$ en $[1, e^2]$.

10. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ en $[0, 1]$.

11. $f(x) = \arctan x$ en $[-1, 1]$.

12. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ en $[0, 2]$.

13. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ en $[0, 2]$.

14. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ en $[-1, 2]$.

15. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ en $[-1, 2]$.

16. Verifique la validez del teorema de Lagrange con la función $f(x) = x^n$, en donde n es un número natural, en el intervalo $[0, 1]$.

17. Sean a y b dos números reales, $a > b$, y n un número natural mayor que 1. Demuestre la validez de las desigualdades:

$$nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b).$$

(Sugerencia: considere la función $f(x) = x^n$ en el intervalo $[b, a]$. ¿Qué dice el teorema de Lagrange para esta función?)

18. Sean a y b dos números reales positivos, $a \geq b$. Demuestre que:

$$\frac{a-b}{a} \leq \ln\frac{a}{b} \leq \frac{a-b}{b}.$$

(Sugerencia: considere la función $f(x) = \ln x$ en el intervalo $[b, a]$.)

19. Sean $f, g : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dos funciones derivables tales que $f'(x) = g'(x)$ para toda $x \in I$. Demuestre que existe una constante c tal que $f(x) = g(x) + c$. (Sugerencia: demuestre que la función $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ es constante.) Verifique este resultado con las funciones:

a) $f(x) = \operatorname{arcsen} x$, $g(x) = -\arccos x$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x$, $g(x) = -\dfrac{1}{4}\cos(2x)$.

c) $f(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x}$, $g(x) = e^x \operatorname{senh} x$.

d) $f(x) = e^x \operatorname{senh} x$, $g(x) = e^x \cosh x$.

20. Demuestre que la función $f : (-\infty, 0) \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2\arctan x + \arccos\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ es constante.

7.6 EL TEOREMA DE CAUCHY

En el tono en el que están establecidos los resultados referentes a los teoremas de Rolle y de Lagrange, existe todavía un teorema más general (también considerado como un "teorema del valor medio") que veremos en esta sección.

TEOREMA 7.6.1. (TEOREMA DE CAUCHY) *Sean f y g funciones continuas en el intervalo compacto $[a,b]$ y derivables en el intervalo abierto (a,b). Entonces existe un punto $c \in (a,b)$ tal que:*

$$(f(b) - f(a))\,g'(c) = (g(b) - g(a))\,f'(c).$$

Si $g(a) \neq g(b)$, en el punto c (cuya existencia asegura el teorema de Cauchy) se tiene:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Observemos primeramente que, a la luz de este teorema, el teorema de Lagrange queda como un caso particular. En efecto, basta que apliquemos el teorema de Cauchy a la función f (continua en el compacto $[a,b]$ y derivable en el abierto (a,b)), y a la función $g(x) = x$, para concluir que existe $c \in (a,b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f'(c)}{[(x)']_{x=c}} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

que es justamente lo que establece el teorema de Lagrange.

Podría parecer que el teorema de Cauchy es un "cociente" de dos teoremas de Lagrange aplicados a las funciones f y g: ciertamente ambas satisfacen las hipótesis del teorema de Lagrange en el intervalo $[a,b]$, de modo que este teorema asegura que existe $c \in (a,b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

y

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}.$$

Al resolver el cociente de las dos expresiones anteriores obtendríamos:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{\frac{g(b)-g(a)}{b-a}} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)},$$

que es (¡aparentemente!) la conclusión del teorema de Cauchy. Este argumento es, sin embargo, una trampa: ciertamente el teorema de Lagrange nos asegura que existe una $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ y también nos asegura que existe una $c \in (a,b)$, *que no tiene por qué*

ser la misma que la c anterior, tal que $g'(c) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}$. Sería más prudente si escribiéramos $f'(c_1) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ y $g'(c_2) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}$. De esta manera ya queda claro que lo que dice el teorema de Cauchy no es ninguna trivialidad que se obtiene como cociente de dos teoremas de Lagrange: en el teorema de Cauchy sí se está afirmando la existencia *de una misma c* para la cual ocurre que $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

La demostración del teorema de Cauchy es de la siguiente manera: definamos la función $\varphi(x)$ como:

$$\varphi(x) = (g(b) - g(a))\, f(x) - (f(b) - f(a))\, g(x).$$

Ciertamente esta función hereda las propiedades de $f(x)$ y de $g(x)$: es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Además:

$$\varphi(a) = (g(b) - g(a))\, f(a) - (f(b) - f(a))\, g(a)$$

$$= g(b)f(a) - g(a)f(a) - f(b)g(a) + f(a)g(a)$$

$$= f(a)g(b) - f(b)g(a)$$

y

$$\varphi(b) = (g(b) - g(a))\, f(b) - (f(b) - f(a))\, g(b)$$

$$= g(b)f(b) - g(a)f(b) - f(b)g(b) + f(a)g(b)$$

$$= f(a)g(b) - f(b)g(a)$$

de modo que $\varphi(a) = \varphi(b)$, y así, la función $\varphi(x)$ satisface las hipótesis del teorema de Rolle. Concluimos entonces que existe $c \in (a, b)$ tal que $\varphi'(c) = 0$. Pero:

$$\varphi'(x) = (g(b) - g(a))\, f'(x) - (f(b) - f(a))\, g'(x),$$

de modo que:

$$(g(b) - g(a))\, f'(c) - (f(b) - f(a))\, g'(c) = 0,$$

o bien:

$$(f(b) - f(a))\, g'(c) = (g(b) - g(a))\, f'(c),$$

que es la conclusión del teorema de Cauchy.

EJEMPLO 7.6.1. Verifique la validez del teorema de Cauchy con las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$ en el intervalo $[0, 1]$.

SOLUCIÓN. El teorema de Cauchy asegura que existe un $c \in (0, 1)$ tal que:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(1) - f(0)}{g(1) - g(0)}.$$

O sea:

$$\frac{2c}{3c^2} = \frac{1 - 0}{1 - 0} = 1.$$

De acuerdo con esta expresión se obtiene que $c = \frac{2}{3}$. Observe que este valor de c es distinto del que el teorema de Lagrange asegura para $f(x) = x^2$ en $[0, 1]$, que es $c_1 = \frac{1}{2}$, y para $g(x) = x^3$ en $[0, 1]$, que es igual a $c_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

⋆

EJERCICIOS (7.6)

En los ejercicios 1 al 5, verifique que las funciones dadas satisfacen el teorema de Cauchy en el intervalo indicado.

1. $f(x) = 3x^2 + 4x + 2$, $g(x) = -2x^2 + 4x + 7$, en $[0, 3]$.

2. $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = x^3 + 1$, en $[-1, 0]$.

3. $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 3x - 1$, $g(x) = x^3 - x^2 + 4x + 1$, en $[-1, 2]$.

4. $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$, en $[1, 2]$.

5. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$, en $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

7.7 LA REGLA DE L'HÔPITAL

Para cerrar con broche de oro este primer capítulo de aplicaciones de las derivadas, presentamos uno de los resultados clásicos del Cálculo Diferencial, el cual normalmente causa grandes emociones a cualquier estudiante que por primera vez lo estudia. Se trata de calcular límites que producen formas indeterminadas $\frac{0}{0}$ como los estudiados en el capítulo 2.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables en $x = a$ tales que $f(a) = g(a) = 0$. Al calcular el límite $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ no podemos usar la sustitución directa de $x = a$ en la función $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, pues produciría una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Supongamos además que $g'(a) \neq 0$. Entonces podemos escribir:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} \overset{\text{haga } x-a=h}{=\!=\!\longrightarrow} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}{\frac{g(a+h)-g(a)}{h}} = \frac{\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}{\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Es decir, se tiene:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Este resultado es conocido como "regla de L'Hôpital" (o "regla de L'Hôpital-Bernoulli"), y representa una herramienta poderosa para calcular límites que producen formas indeterminadas $\frac{0}{0}$ (de hecho, existen versiones de esta regla que se pueden aplicar a otro tipo de formas indeterminadas, las cuales no veremos en este libro). En él se establece que si tenemos un cociente de funciones derivables que se anulan simultáneamente en $x = a$, entonces el límite del cociente de funciones cuando x tiende a a es igual al límite del cociente de las derivadas de las funciones cuando x tiende a a, el cual, si la derivada del denominador no se anula en $x = a$, es igual al cociente de las derivadas de las funciones evaluadas en $x = a$. (*Cuidado*: lo que dice la regla de L'Hôpital no es que el valor del límite del cociente es igual al límite de la derivada del cociente de funciones evaluado en $x = a$, sino al límite del cociente de derivadas.)

Por ejemplo, consideremos la función $F(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}$ y calculemos su límite cuando $x \to 1$. La manera como aprendimos a hacer este cálculo en el capítulo 2 fue:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{(1)^2+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}.$$

Al usar ahora la regla de L'Hôpital nos queda:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x^3-1)'}{(x^2-1)'} = \lim_{x\to 1}\frac{3x^2}{2x} = \frac{3(1)^2}{2(1)} = \frac{3}{2}.$$

Otro límite importante que produce una forma indeterminada que estudiamos en el capítulo 2 es $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$. Al usar la regla de L'Hôpital nos queda:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{sen} x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1} = 1.$$

Es importante hacer hincapié en que la regla de L'Hôpital solamente se puede aplicar en el cálculo de límites que produzcan formas indeterminadas (en nuestro caso estamos considerando formas indeterminadas $\frac{0}{0}$). Por ejemplo, para calcular el límite $\lim_{x\to 1} \frac{x^3+2x^2-4x+7}{3x^2+5x-2}$ se puede hacer uso directo de los teoremas sobre límites estudiados en el capítulo 2 (más particularmente, del teorema 2.3.7 sobre el límite de una función racional), por lo que nos queda:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+2x^2-4x+7}{3x^2+5x-2} = \frac{(1)^3+2(1)^2-4(1)+7}{3(1)^2+5(1)-2} = \frac{6}{6} = 1.$$

Si hubiéramos aplicado la regla de L'Hôpital llegaríamos al resultado incorrecto:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+2x^2-4x+7}{3x^2+5x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+4x-4}{6x+5} = \frac{3(1)^2+4(1)-4}{6(1)+5} = \frac{3}{11}.$$

Veamos algunos ejemplos más.

EJEMPLO 7.7.1. Calcule el límite $\lim_{x\to 1} \frac{5x^4+15x^2-10x-10}{x^3+2x-3}$.

SOLUCIÓN. La función $f(x) = \frac{5x^4+15x^2-10x-10}{x^3+2x-3}$ es tal que $f(1) = \frac{0}{0}$. (La manera de calcular este límite es, según lo visto en el capítulo 2, aplicar el teorema del factor a los polinomios del numerador y denominador para simplificar en él los factores $x-1$.) Si usamos la regla de L'Hôpital nos queda que:

$$\lim_{x\to 1} \frac{5x^4+15x^2-10x-10}{x^3+2x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{20x^3+30x-10}{3x^2+2} = \frac{20+30-10}{3+2} = 8.$$

⋆

EJEMPLO 7.7.2. Calcule el límite $\lim_{x\to 2} \frac{x^4-2x^3-7x^2+20x-12}{x^5-2x^4-4x^3+9x^2-4x+4}$.

SOLUCIÓN. Se verifica fácilmente que se trata de una forma indeterminada. Al aplicar la regla de L'Hôpital nos queda:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^4-2x^3-7x^2+20x-12}{x^5-2x^4-4x^3+9x^2-4x+4} = \lim_{x\to 2} \frac{4x^3-6x^2-14x+20}{5x^4-8x^3-12x^2+18x-4}.$$

Al tratar de evaluar la función racional $\varphi(x) = \frac{4x^3-6x^2-14x+20}{5x^4-8x^3-12x^2+18x-4}$ en $x = 2$, nos encontramos con la desagradable sorpresa de que $\varphi(2) = \frac{0}{0}$. El susto se nos debe pasar rápido, porque podemos aplicar nuevamente la regla de L'Hôpital para obtener:

$$\lim_{x\to 2} \frac{4x^3-6x^2-14x+20}{5x^4-8x^3-12x^2+18x-4} = \lim_{x\to 2} \frac{12x^2-12x-14}{20x^3-24x^2-24x+18}$$

$$= \frac{12(2)^2 - 12(2) - 14}{20(2)^3 - 24(2)^2 - 24(2) + 18} = \frac{10}{34} = \frac{5}{17}.$$

★

EJEMPLO 7.7.3. Calcule el límite $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x^6+14x^5-6x^4+4x^3-8x^2-4x-2}{x^5+3x^4-2x^3-x-1}$.

SOLUCIÓN. Puesto que la función $f(x) = \frac{2x^6+14x^5-6x^4+4x^3-8x^2-4x-2}{x^5+3x^4-2x^3-x-1}$ es tal que $f(1) = \frac{0}{0}$, podemos aplicar la regla de L'Hôpital para calcular el límite. Las cuentas se ven como:

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^6 + 14x^5 - 6x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 4x - 2}{x^5 + 3x^4 - 2x^3 - x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{12x^5 + 70x^4 - 24x^3 + 12x^2 - 16x - 4}{5x^4 + 12x^3 - 6x^2 - 1}$$

$$= \frac{12 + 70 - 24 + 12 - 16 - 4}{5 + 12 - 6 - 1} = \frac{50}{10} = 5.$$

★

EJEMPLO 7.7.4. Calcule el límite $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4}$.

SOLUCIÓN. Se verifica fácilmente que la función $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4}$ no existe en $x = 2$. Al aplicar la regla de L'Hôpital nos queda:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x^2+5}}(2x)}{2x} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{2\sqrt{x^2+5}} = \frac{1}{2\sqrt{(2)^2+5}} = \frac{1}{6}.$$

★

EJEMPLO 7.7.5. Calcule el límite $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{9-x}-2}{x^3-1}$.

SOLUCIÓN. Se trata nuevamente de una forma indeterminada, pues $\frac{\sqrt[3]{9-1}-2}{(1)^3-1} = \frac{0}{0}$. Al aplicar la regla de L'Hôpital nos queda:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{9-x}-2}{x^3-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{3}(9-x)^{-\frac{2}{3}}(-1)}{3x^2} = \frac{-\frac{1}{3}(8)^{-\frac{2}{3}}}{3} = -\frac{1}{36}.$$

★

EJEMPLO 7.7.6. Calcule el límite $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

SOLUCIÓN. Se trata de una forma indeterminada, pues $\frac{1-\cos 0}{(0)^2} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$. Si usamos la regla de L'Hôpital el cálculo de este límite se ve como:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}.$$

★

EJEMPLO 7.7.7. Calcule el límite $\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{2x^3}$.

SOLUCIÓN. Se verifica de inmediato que se trata de una forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Aplicamos entonces la regla de L'Hôpital y nos queda:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{2x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x(-\operatorname{sen} x) + \cos x - \cos x}{6x^2} = -\frac{1}{6}\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = -\frac{1}{6}(1) = -\frac{1}{6}.$$

(éste es un límite muy difícil de calcular con los métodos descritos en el capítulo 2; en este tipo de ejemplos se aprecia la fuerza de la regla de L'Hôpital). ⋆

EJEMPLO 7.7.8. Calcule el límite $\lim_{x\to 0} \frac{x\ln(x+1) - x^2}{xe^{3x} - 3x^2 - x}$.

SOLUCIÓN. Al evaluar la función $f(x) = \frac{x\ln(x+1) - x^2}{xe^{3x} - 3x^2 - x}$ en $x = 0$ se produce una indeterminación $\frac{0}{0}$. Aplicamos entonces la regla de L'Hôpital para calcular el límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\ln(x+1) - x^2}{xe^{3x} - 3x^2 - x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\frac{1}{x+1}\right) + \ln(x+1) - 2x}{xe^{3x}(3) + e^{3x} - 6x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{x+1} + \ln(x+1) - 2x}{e^{3x}(3x+1) - 6x - 1}.$$

Observamos que la nueva función $g(x) = \frac{\frac{x}{x+1} + \ln(x+1) - 2x}{e^{3x}(3x+1) - 6x - 1}$ sobre la que debemos calcular el límite produce nuevamente una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ al tratar de sustituir el valor $x = 0$ en ella. Nos encontramos entonces en una situación como la original. Podemos aplicar nuevamente la regla de L'Hôpital para calcular el límite. Nos queda:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{x+1} + \ln(x+1) - 2x}{e^{3x}(3x+1) - 6x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} - 2}{e^{3x}(3) + (3x+1)e^{3x}(3) - 6}.$$

Nuevamente observamos que la función $h(x) = \frac{\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} - 2}{e^{3x}(3) + (3x+1)e^{3x}(3) - 6}$ produce una indeterminación al tratar de sustituir en ella el valor $x = 0$. Aplicamos entonces de nuevo la regla de L'Hôpital. Obtenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} - 2}{e^{3x}(3) + (3x+1)e^{3x}(3) - 6} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2}{(x+1)^3} - \frac{1}{(x+1)^2}}{e^{3x}(9) + (3x+1)e^{3x}(9) + 9e^{3x}}$$

$$= \frac{-2-1}{9+9+9} = -\frac{1}{9}.$$

⋆

EJERCICIOS (7.7)

En los ejercicios 1 al 40, calcule el límite indicado

1. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+9x-10}{x^2+6x-7}$.

2. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3+8x^2-6x-3}{2x^3+3x^2-4x-1}$.

3. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^3-x^2-x-2}$.

4. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^5+5x^4+10x^3-8x^2-8}{x^4+6x^3-7x^2+x-1}$.

5. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^5-1}{x^{27}-1}$.

6. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2^x-x-1}{x}$.

7. $\lim_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+2)(x+3)}{x^4+4x^3-5x}$.

8. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[7]{x}-1}{\sqrt[9]{x}-1}$.

9. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+\sqrt[4]{x}-2}{x^3+2\sqrt[3]{x}-3x}$.

10. $\lim_{x\to 3} \dfrac{3^x-x^3}{x-3}$.

11. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{4x}$.

12. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-e^{-5x}}{x}$.

13. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2e^{3x}-3e^{2x}}{2e^{2x}-3e^{3x}}$.

14. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}+4e^{2x}-3e^x-2}{2e^{3x}+5e^{2x}-6e^x-1}$.

15. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$.

16. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(3x^2+4x+1)}{6x^2-5x}$.

17. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-1-x}{x}$.

18. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-1-x}{x^2}$.

19. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{x^3e^x}$.

20. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cosh x}{\operatorname{senh}(3x)}$.

21. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x-\operatorname{sen}(5x)}{\operatorname{senh} x-\operatorname{senh}(4x)}$.

22. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos(3x)}{\ln\cos(7x)}$.

23. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x-x}{x^3}$.

24. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arcsen} x}{x}$.

25. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arcsen}^2 x}{1-\cos(3x)}$.

26. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arcsen} x}{\arctan x}$.

27. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x-\operatorname{arcsen} x}{\tan x-\arctan x}$.

28. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x-e^x}{\cos(3x)-e^{4x}}$.

29. $\lim_{x\to 0} \dfrac{6e^x-x^3-3x^2-6x-6}{3e^{2x}-4x^3-6x^2-6x-3}$.

30. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{senh} x}$.

31. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{1-\cosh x}$.

32. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\cos(3x)}{1-\cos(2x)\cos(4x)}$.

33. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{\pi}{2}-\arccos x}{x}$.

34. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\arccos x-\arccos(3x)}{x}$.

35. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2\cos x+x^2-2}{2\cosh x-x^2-2}$.

36. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\arctan(\operatorname{sen} x)-x}{\operatorname{sen} x-x}$.

37. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\arctan x)-x}{\operatorname{sen} x-x}$.

38. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\arctan x)-\tan(\operatorname{arcsen} x)}{\operatorname{sen} x-x}$.

39. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arcsen}(\tan x)-\arctan(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x-x}$.

40. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\arctan x)-\tan(\operatorname{arcsen} x)}{\operatorname{arcsen}(\tan x)-\arctan(\operatorname{sen} x)}$.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 7

EXAMEN TIPO (A)

1. Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 3x^3+2x+2$ en el punto de abscisa $x = -1$.

2. Determine la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{3}{x^2}$ que sea paralela a la recta $36x - y - 1 = 0$.

3. Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ dada implícitamente en la expresión $x^3 + y^3 = 2$ en el punto $(1, 1)$.

4. Calcule la longitud de los segmentos tangente y normal a la gráfica de la función $f(x) = 1 + xe^{-x}$ en el punto de abscisa $x = 0$.

5. Calcule la longitud de los segmentos subtangente y subnormal a la gráfica de la función $f(x) = \ln x$ en el punto de abscisa $x = e$.

6. Verifique la validez del teorema de Rolle con la función $f(x) = x^3 + 7x^2 - 4x - 1$ en el intervalo $[0, 3]$.

7. Verifique la validez del teorema de Lagrange con la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x+1}$ en el intervalo $[0, 1]$.

8. Demuestre que la función $f : (-1, 1) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \operatorname{arcsen} x + \arccos x$ es constante. ¿Cuál es el valor de la constante?

9. Calcule el límite $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\ln(x^2-8)}{(x-3)(x^2+3x+1)}$.

10. Calcule el límite $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{4\operatorname{sen}^2 x - 6\operatorname{sen} x + 1}{3\operatorname{sen}^2 x + 5\operatorname{sen} x - 4}$.

EXAMEN TIPO (B)

1. Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^{x^2}$ en el punto de abscisa $x = 2$.

2. Determine las ecuaciones de las rectas normales a la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{3x+2}$ que sean perpendiculares a la recta $x + 2y - 1 = 0$.

3. Determine la ecuación de la recta tangente a la astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2$ que sea paralela a la recta $x + y + 6 = 0$.

4. Calcule la longitud de los segmentos tangente, normal, subtangente y subnormal a la gráfica de la función $f(x) = x \arctan x$ en el punto de abscisa $x = 1$.

5. Calcule la longitud de los segmentos tangente, normal, subtangente y subnormal a la elipse $2x^2 + 3y^2 = 5$ en el punto $(1, 1)$.

6. Verifique la validez del teorema de Rolle con la función $f(x) = (x+2)(x-5)(-2x+1)$ en el intervalo $[-2, 5]$.

7. Verifique la validez del teorema de Lagrange con la función $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x+1}$ en el intervalo $[0, 1]$.

8. Considere la función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \operatorname{arcsen}(\cos x) - \arccos(\operatorname{sen} x)$. Observe que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}(-\operatorname{sen} x) - \left(-\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}}(\cos x)\right) \\ &= -\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x}} + \frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x}} = -1 + 1 = 0, \end{aligned}$$

de modo que (puesto que f está definida en el intervalo $\mathbf{R}$ y su derivada se anula en todo el intervalo), la función f es constante. Sin embargo se tiene que $f(0) = \operatorname{arcsen}(\cos 0) - \arccos(\operatorname{sen} 0) = \operatorname{arcsen}(1) - \arccos(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$, y por otra parte $f(\pi) = \operatorname{arcsen}(\cos \pi) - \arccos(\operatorname{sen} \pi) = \operatorname{arcsen}(-1) - \arccos(0) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi \neq f(0)$, contradiciendo el hecho de que f es constante. Explique el error en este razonamiento.

9. Calcule el límite $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x^2 - 2x + 1)}{x^4 - 3x^3 + 8}$.

10. Calcule el límite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4\operatorname{sen}^2 x + e^{2x} + e^x - 2}{3\operatorname{sen}^2 x + \ln(1+x) + e^x - 1}$.

NOTA HISTÓRICA: LOS MARQUESES TAMBIÉN APRENDEN (Y ESCRIBEN) CÁLCULO.



La segunda mitad del siglo XVII y la primera del XVIII estuvo llena de matemáticos que usaban las ideas de esa nueva disciplina apenas creada (el Cálculo) para resolver nuevos problemas. Algunas otras personas, no dedicadas completamente a la Matemática, se interesaban por conocer los alcances y las aplicaciones de esta incipiente rama de la matemática. Era, en cierto sentido, la moda de esa época: todo el mundo hablaba del nacimiento del Cálculo. En sus viajes a París, Johann Bernoulli, uno de los tres hermanos que conformaron la primera generación (de tres que hubo) de brillantes matemáticos, fue mandado llamar por un importante Marqués cuya vena matemática lo llevó a enterarse de que el tal Bernoulli era un joven y brillante matemático. Aprovechando su privilegiada posición económico-social, el Marqués G. F. A. de L'Hôpital

(1661-1704) firmó un pacto con Johann B. por medio del cual este último mandaría al Marqués todos sus descubrimientos matemáticos para que fueran usados como el Marqués considerara conveniente. Claro está, habría de por medio un (seguramente generoso) pago mensual. Dos aspectos importantes surgieron de este pacto: primero, en esa fluida correspondencia entre maestro y discípulo, entre plebeyo y noble, entre genio y persona con inteligencia normal pero con bolsillos llenos, se presentó un resultado muy importante para calcular límites que producen formas indeterminadas $\frac{0}{0}$, conocido hasta la actualidad como regla de L'Hôpital (que hemos estudiado en este capítulo), pero que todos saben que se debe a Johann B. En segundo lugar, el gusto que produjo en el Marqués de L'Hôpital el aprendizaje del Cálculo, lo llevó a escribir un libro sobre la materia, en el cual no solamente se exponían "tal cual" las ideas y resultados de esta disciplina (muchas de ellas originales, fruto de su propio trabajo matemático, y muchas otras fruto del pacto hecho con J. Bernoulli), sino que en la exposición se dejaba ver una preocupación didáctica, con la intención de que el lector verdaderamente entendiera lo que se estaba explicando. Surgió así el primer libro de Cálculo de la historia, llamado *Analyse des infiniment petits*, publicado en París en 1696. Este libro gozó de un gran éxito y reputación durante muchos años después de su publicación. En el prólogo del libro, el Marqués de L'Hôpital agradecía a Leibniz (con quien intercambió también correspondencia) por sus enseñanzas sobre la materia, pero agradecía especialmente al "joven profesor de Groningen" (lugar en donde Johann enseñó Matemática al Marqués en 1695). Johann B. escribió al Marqués por el gentil gesto de agradecimiento en el prólogo de su libro, aunque después de la muerte de L'Hôpital, en 1704, el mismo Johann B. escribió muchas cartas a sus colegas en las que acusaba abiertamente al Marqués de plagio de sus resultados. El trabajo matemático de Johann B. que vino después de esa fecha pudo dar credibilidad a sus acusaciones: Johann Bernoulli demostró ser un brillantísimo matemático y es muy probable que gran parte del contenido matemático de ese primer libro de Cálculo, firmado por el Marqués de L'Hôpital, sean exposiciones y resultados que se generaron en la mente de Johann Bernoulli. Esto no opaca en nada el mérito tan grande que tuvo L'Hôpital al escribir esa exposición sistemática de las ideas del Cálculo en su *Analyse*, pues seguramente este libro fue un motivador y semillero que puso a trabajar a muchas otras mentes matemáticas de los siglos XVIII y XIX.

CAPÍTULO 8
EXTREMOS DE LAS FUNCIONES

"Ya que la fábrica del Universo es la más perfecta y su trabajo el del más sabio Creador, nada en el Universo sucede en donde no intervenga alguna regla de máximo o mínimo."

L. Euler

Uno de los aspectos importantes de nuestra vida diaria es la optimización: siempre queremos obtener el *máximo* rendimiento en las cuentas del banco o tener el *mínimo* gasto para hacer una ventana, un cuadro, etcétera. Desde un punto de vista general, lo que se busca en estos problemas es localizar los puntos en donde cierta función alcanza el mayor o el menor valor. En este capítulo veremos cómo el Cálculo Diferencial se puede usar para resolver algunos problemas de este tipo (que en general se denominan "problemas de extremos —máximos y mínimos— de las funciones"). Comenzaremos el capítulo estudiando el problema de la determinación de extremos absolutos de una función en un intervalo. Luego desarrollaremos un poco de teoría sobre funciones crecientes y decrecientes, para después ver cómo encontrar los llamados "extremos locales" de la función. Al final del capítulo dedicaremos una sección especial para ver algunos problemas típicos de carácter práctico que se resuelven con la teoría que en el capítulo estudiaremos.

8.1 EXTREMOS ABSOLUTOS DE UNA FUNCIÓN

En el capítulo 3 vimos por primera vez los conceptos de máximo y mínimo absolutos de una función en un intervalo, que recordamos ahora: sea $f : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función definida en el intervalo I de $\mathbf{R}$.

I) Si para algún $x_0 \in I$ se tiene que $m = f(x_0) \leq f(x)$ para toda $x \in I$, decimos que x_0 es un punto en donde la función f alcanza un **mínimo absoluto en el intervalo** I.

II) Si para algún $x_1 \in I$ se tiene que $M = f(x_1) \geq f(x)$ para toda $x \in I$, decimos que x_1 es un punto en donde la función f alcanza un **máximo absoluto en el intervalo** I.

A los valores $m = f(x_0)$ y $M = f(x_1)$ se les llama **mínimo y máximo absolutos de la función** $f(x)$ **en el intervalo** I, respectivamente. Éstos constituyen los **extremos absolutos** de la función en el intervalo I.

Uno de los teoremas importantes estudiados en el capítulo 3 nos decía que si una función es continua y está definida en un intervalo compacto, entonces alcanza su máximo y mínimo

absolutos en el intervalo en el que está definida. Supondremos siempre que las funciones con las que vamos a trabajar en este capítulo son continuas en cualquier intervalo compacto dentro de su dominio, de modo que la existencia de los extremos absolutos queda garantizada por el teorema mencionado (primer teorema sobre funciones continuas en intervalos compactos). Lo que nos ocupará ahora es estudiar *cómo* determinar tales extremos. El primer paso que daremos es investigar en qué puntos pueden presentarse los extremos absolutos de una función. Las situaciones mostradas en la figura 8.1.1 nos dan alguna idea a este respecto.

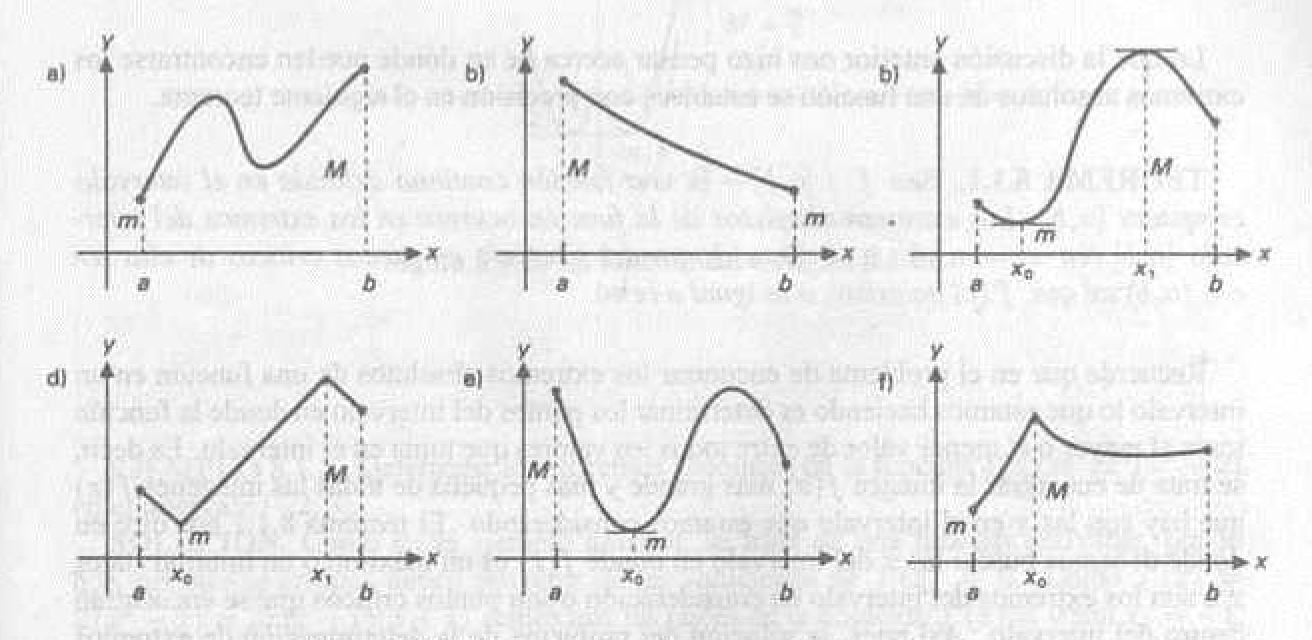


Figura 8.1.1. Extremos absolutos para algunas funciones.

Todas las gráficas mostradas en la figura 8.1.1 son gráficas de funciones continuas definidas en un intervalo compacto $[a,b]$:

- En la gráfica (a) tenemos una función cuyos extremos absolutos se encuentran en los extremos del intervalo $[a,b]$. Más precisamente, tiene el mínimo absoluto en $x=a$ y el máximo absoluto en $x=b$.
- En la gráfica (b) tenemos una situación análoga a la de la gráfica (a): la función alcanza sus extremos absolutos en los extremos del intervalo $[a,b]$, pero ahora su máximo absoluto está en $x=a$ y su mínimo absoluto en $x=b$.
- En la gráfica (c) tenemos una función cuyos extremos absolutos se encuentran dentro del intervalo $[a,b]$. Observe que en este caso los dos puntos x_0 y x_1 en donde se encuentran los extremos absolutos de la función son puntos en donde la derivada es igual a cero (la recta tangente a la gráfica en tales puntos es paralela al eje x).
- En la gráfica (d) tenemos una situación análoga a la de la gráfica (c): la función alcanza sus extremos absolutos en puntos x_0 y x_1 del interior del intervalo $[a,b]$, pero, a diferencia de la situación mostrada en (c), en donde la derivada de la función se anulaba en los puntos de extremo absoluto, ahora la función no tiene derivada en tales puntos.
- Los incisos (e) y (f) muestran combinaciones de los casos anteriores.

[2,5]

Los casos anteriores muestran que los extremos absolutos de una función definida en un intervalo compacto pueden estar en los extremos del intervalo, o bien, si están dentro del intervalo, se encuentran en puntos en donde la derivada de la función tiene un comportamiento muy especial, pues en ellos no existe la derivada, o si existe es igual a cero. Estos puntos reciben un nombre especial.

Sea $f : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función definida en el intervalo I de $\mathbf{R}$. Se dice que $x_0 \in I$ es un **punto crítico** *de f, si $f'(x_0) = 0$ o $f'(x_0)$ no existe.*

Lo que la discusión anterior nos hizo pensar acerca de en dónde pueden encontrarse los extremos absolutos de una función se establece con precisión en el siguiente teorema.

TEOREMA 8.1.1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una función continua definida en el intervalo compacto $[a, b]$. Los extremos absolutos de la función ocurren en los extremos del intervalo $[a, b]$ (en $x = a$ y/o $x = b$), o dentro del intervalo en puntos críticos de ella (en $c \in (a, b)$ tal que $f'(c)$ no existe, o es igual a cero).*

Recuerde que en el problema de encontrar los extremos absolutos de una función en un intervalo lo que estamos haciendo es determinar los puntos del intervalo en donde la función toma el mayor o el menor valor de entre todos los valores que toma en el intervalo. Es decir, se trata de encontrar la imagen $f(x)$ más grande y más pequeña de todas las imágenes $f(x)$ que hay con las x en el intervalo que estamos considerando. El teorema 8.1.1 nos dice en dónde debemos buscar las x del intervalo en donde $f(x)$ es un máximo o un mínimo: tales x o son los extremos del intervalo en consideración o son puntos críticos que se encuentran dentro del intervalo. Así pues, la solución del problema de la determinación de extremos absolutos de una función en un intervalo $[a, b]$ puede esquematizarse como:

1. Encontrar los puntos críticos de la función $c_1, c_2, \ldots, c_k \in (a, b)$. Éstos son puntos del interior del intervalo en donde la derivada de la función es cero o no existe.
2. Obtener las imágenes $f(a)$, $f(b)$ (en los extremos del intervalo) y $f(c_1), f(c_2), \ldots, f(c_k)$ (en los puntos críticos del interior del intervalo). El mayor valor de estas imágenes corresponde al máximo absoluto de la función en el intervalo y el menor al mínimo absoluto.

Observe que los puntos críticos de una función derivable son puntos c en donde $f'(c) = 0$, de modo que cuando se esté trabajando con este tipo de funciones, la determinación de los puntos críticos en el paso (1) se limita a encontrar las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$.

Observe también que si una función no tiene puntos críticos en el interior del intervalo, o los tiene fuera de él, los extremos absolutos de la función deben estar necesariamente en los extremos del intervalo.

EJEMPLO 8.1.1. Determinar los extremos absolutos de la función $f(x) = x + 1$ en el intervalo $[1, 3]$.

SOLUCIÓN. Se trata de una función derivable, por lo que los puntos críticos deben ser las soluciones de $f'(x) = 0$. Pero $f'(x) = 1 \neq 0$. Entonces la función no tiene puntos críticos. Los valores de la función en los extremos del intervalo $[1, 3]$ son $f(1) = 2$ y $f(3) = 4$,

de modo que el mínimo absoluto de la función dada en $[1,3]$ se encuentra en $x = 1$ y es $m = f(1) = 2$ y el máximo absoluto se encuentra en $x = 3$ y es $M = f(3) = 4$.

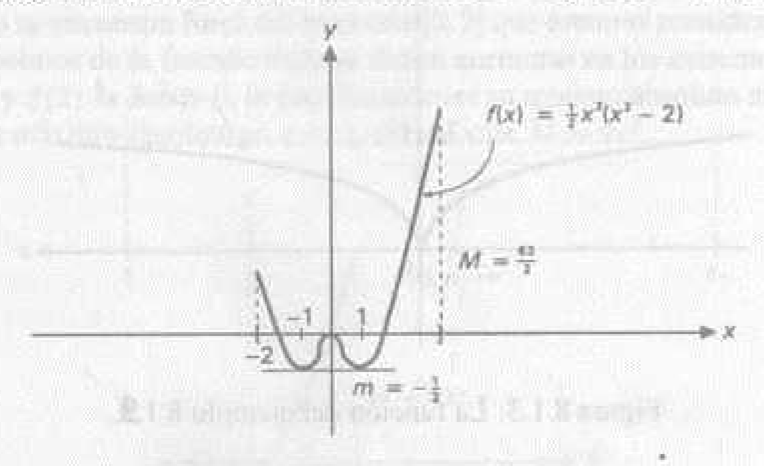


Figura 8.1.2. La función del ejemplo 8.1.1.

EJEMPLO 8.1.2. Determine los extremos absolutos de la función $f(x) = \frac{1}{2}x^2(x^2 - 2)$ en el intervalo $[-2,3]$.

SOLUCIÓN. Como en el ejemplo anterior, se trata de una función derivable, por lo que sus puntos críticos deben provenir de las soluciones de $f'(x) = 0$. Como $f'(x) = 2(x^3 - x) = 2x(x-1)(x+1)$ vemos que las raíces de la ecuación $f'(x) = 0$ son $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 1$. Estos tres puntos críticos se encuentran dentro del intervalo $(-2,3)$. Evaluamos entonces la función f en los extremos del intervalo $x = -2$ y $x = 3$, y en los puntos críticos. Tenemos:

$f(-2) = 4$	
$f(3) = \frac{63}{2}$	Máximo absoluto
$f(-1) = -\frac{1}{2}$	Mínimo absoluto
$f(0) = 0$	
$f(1) = -\frac{1}{2}$	Mínimo absoluto.

Entonces el máximo absoluto de la función dada en el intervalo $[-2,3]$ se encuentra en el extremo derecho del intervalo $x = 3$ y vale $M = f(3) = \frac{63}{2}$ y el mínimo absoluto de la función se encuentra en los puntos críticos $x = 1$ y $x = -1$, en donde $f(1) = f(-1) = -\frac{1}{2}$.

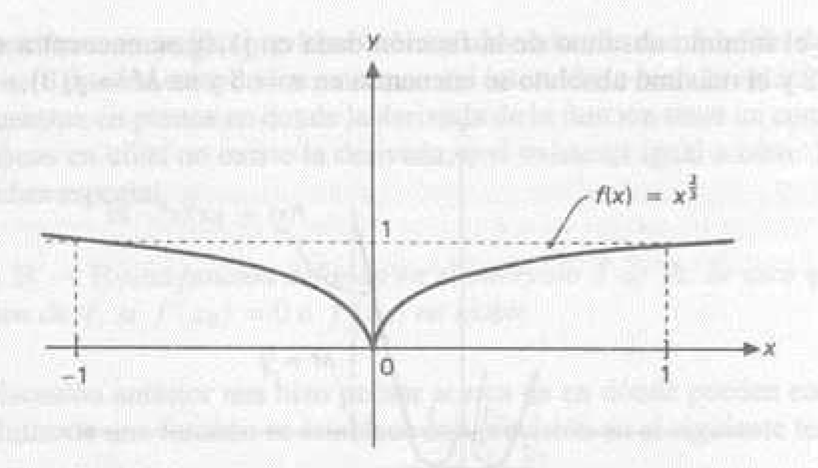


Figura 8.1.3. La función del ejemplo 8.1.3.

★

EJEMPLO 8.1.3. Determine los extremos absolutos de la función $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ en el intervalo $[-1, 1]$.

SOLUCIÓN. Observe que la función dada es continua en el intervalo $[-1, 1]$. Su derivada es $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, la cual no se anula en punto alguno del intervalo $(-1, 1)$. Sin embargo, observe que en $x = 0$ tal derivada no existe (se hace infinita).

Entonces $x = 0 \in (-1, 1)$ es un punto crítico que debemos considerar para investigar los extremos absolutos de la función. Como $f(-1) = f(1) = 1$ y $f(0) = 0$, vemos que el máximo absoluto se encuentra en los extremos del intervalo $x = -1$ y $x = 1$, y vale $M = 1$, y el mínimo absoluto se encuentra en el punto crítico $x = 0$ (en donde la derivada de la función no existe) y vale $f(0) = 0$.

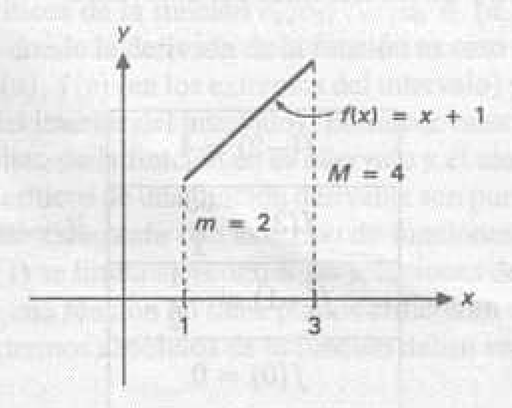


Figura 8.1.4. La función del ejemplo 8.1.3.

★

EJEMPLO 8.1.4. Determine los extremos absolutos de la función $f(x) = xe^x$ en el intervalo $[0, 2]$.

SOLUCIÓN. Encontramos los puntos críticos de la función en el intervalo $(0, 2)$. La

derivada de $f(x) = xe^x$ es $f'(x) = xe^x + e^x = (x+1)e^x$, de donde se ve que solamente hay un punto crítico $x = -1$ (ésta es la única solución de $f'(x) = (x+1)e^x = 0$). Sin embargo este punto crítico se encuentra fuera del intervalo $[0, 2]$ que estamos considerando. Entonces los extremos absolutos de la función dada se deben encontrar en los extremos del intervalo. Como $f(0) = 0$ y $f(2) = 2e^2 > 0$, la función alcanza su mínimo absoluto en $x = 0$, el cual vale $m = 0$, y su máximo absoluto en $x = 2$, el cual vale $M = 2e^2$.

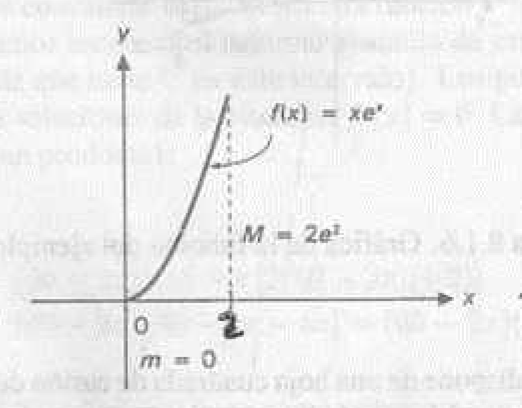


Figura 8.1.5. Gráfica de la función del ejemplo 8.1.4.

★

EJEMPLO 8.1.5. Determine los extremos absolutos de la función $f(x) = \arctan x - x$ en el intervalo $[-1, 1]$.

SOLUCIÓN. La derivada de la función dada es:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1.$$

Determinamos los puntos críticos de la función resolviendo la ecuación $f'(x) = 0$. Se tiene:

$$\frac{1}{1+x^2} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} = 1 \Rightarrow 1 = 1 + x^2 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Entonces hay un único punto crítico $x = 0$, el cual se encuentra dentro del intervalo que estamos considerando para la función $f(x)$ dada. Al evaluar la función en los extremos del intervalo $[-1, 1]$ y en el punto crítico encontrado tenemos:

$f(-1) = \arctan(-1) - (-1) = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0.2146$
$f(1) = \arctan 1 - 1 = \frac{\pi}{4} - 1 \approx -0.2146$
$f(0) = \arctan 0 - 0 = 0$

Entonces la función dada tiene su mínimo absoluto en $x = 1$, el cual es $m = \frac{\pi}{4} - 1$, y su máximo absoluto en $x = -1$, el cual es $M = 1 - \frac{\pi}{4}$.

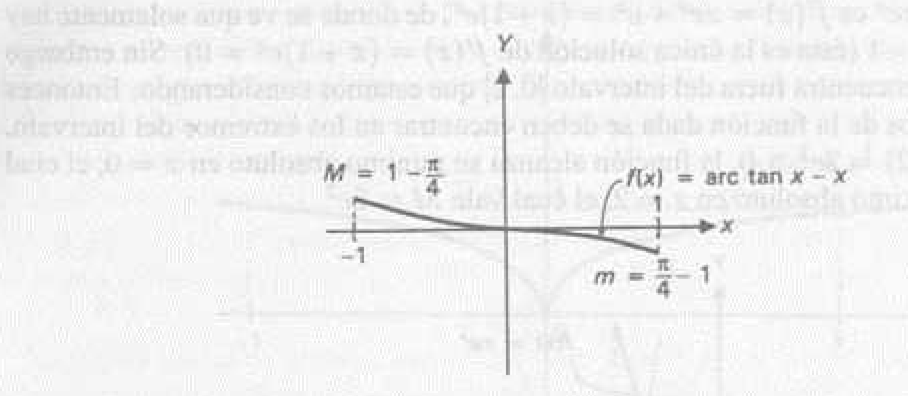


Figura 8.1.6. Gráfica de la función del ejemplo 8.1.5.

EJEMPLO 8.1.6. Se dispone de una hoja cuadrada de cartón de 60 cm de lado, con la cual se quiere construir una caja (abierta), de base cuadrada, cortando cuadrados de las esquinas de la hoja y doblando luego por las líneas punteadas, como se muestra en la figura. Encontrar la longitud de los lados de los cuadrados que deben cortarse de la hoja para obtener una caja cuyo volumen sea máximo.

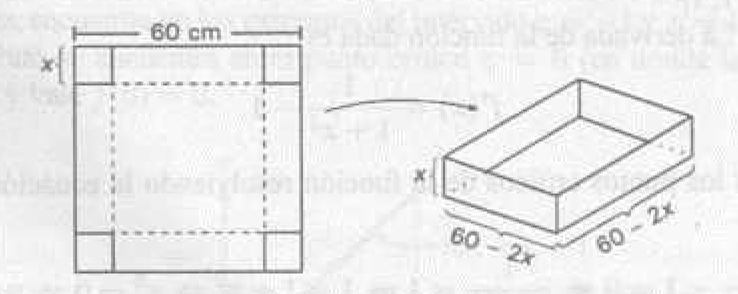


Figura 8.1.7. La caja del ejemplo 8.1.6.

SOLUCIÓN. Llamemos x al lado de cada cuadrado por cortar de la hoja de cartón dada. El volumen V que se obtenga de la caja será una función de x. Debemos buscar primeramente esta función $V = f(x)$ para la cual la imagen $f(x)$ de cada valor de x, es el volumen de la caja obtenida cortando cuadrados de longitud x de las esquinas de la hoja. Por la figura se ve que el cuadrado de la base de la caja tendrá lados de $60 - 2x$ cm de longitud, y la altura de ésta será igual a x, de modo que su volumen (que es igual al área de la base por la altura) será:

$$V = f(x) = (60 - 2x)^2 x.$$

Observe que ésta es una función polinomial cuyo dominio, en principio, es toda la recta real. Sin embargo, la situación física que estamos considerando impone restricciones naturales. ¿Podría, por ejemplo, ser x un número negativo? Ya que x representa la longitud de un lado de un cuadrado, los valores negativos de ella quedan fuera de cualquier contexto físico. Más aún, la misma construcción de la caja impone la restricción de que x debe ser no mayor que 30 cm, que es la mitad del lado de la hoja de cartón dada. Así, por consideraciones físicas del problema, debemos considerar definida nuestra función $V = f(x) = (60 - 2x)^2 x$ en el intervalo $[0, 30]$. Buscamos entonces el máximo absoluto de esta función en el intervalo $[0, 30]$ (el valor más grande que tiene V en este intervalo). Los puntos críticos de esta función deben provenir de las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$. La derivada $f'(x)$ es (según la regla de la derivada de un producto):

$$\begin{aligned} f'(x) &= (60 - 2x)^2(1) + x\,[2(60 - 2x)(-2)] \\ &= (60 - 2x)\,[60 - 2x - 4x] = (60 - 2x)(60 - 6x). \end{aligned}$$

La ecuación $(60 - 2x)(60 - 6x) = 0$ tiene como raíces a $x_1 = 30$ y $x_2 = 10$. Evaluamos la función $V = f(x)$ en los extremos del intervalo $x = 0$ y $x = 30$ (este último es también un punto crítico) y en el punto crítico $x = 10 \in (0, 30)$. Se tiene $f(0) = 0$, $f(30) = 0$ y $f(10) = (60 - 20)^2(10) = 16000$. Así que el volumen mayor que puede tener la caja construida es de 16000 cm^3 y se logra cuando se cortan cuadrados de 10 cm de longitud de las esquinas de la hoja de cartón dada.

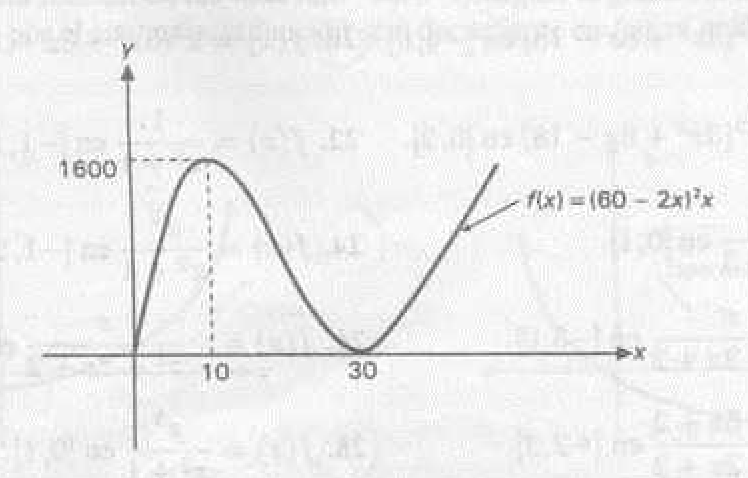


Figura 8.1.8. La función $V = f(x) = (60 - 2x)^2 x$ del ejemplo 8.1.6.

EJERCICIOS (8.1)

En los ejercicios 1 al 40, determine los extremos absolutos de la función dada en el intervalo indicado.

1. $f(x) = 2$ en $[-5, 24]$.

2. $f(x) = \pi^2$ en $[0, 0.1]$.

3. $f(x) = 3x + 2$ en $[0, 1]$.

4. $f(x) = x + 9$ en $[-2, 5]$.

5. $f(x) = -3x + 2$ en $[1, 5]$.

6. $f(x) = x^2$ en $[-1, 4]$.

7. $f(x) = 3x^2$ en $[4, 5]$.

8. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ en $[0, 2]$.

9. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 2$ en $[0, 4]$.

10. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ en $[-2, 0]$.

11. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$ en $[-2, 2]$.

12. $f(x) = x^3 - 3x + 2$ en $[-1, 1]$.

13. $f(x) = x^2(x^2 - 2)$ en $[-3, -2]$.

14. $f(x) = x^2(x^2 - 2)$ en $[-3, -1]$.

15. $f(x) = x^2(x^2 - 2) + 1$ en $[-3, 0]$.

16. $f(x) = 2x^2(x^2 - 2) - 2$ en $[-1, 0]$.

17. $f(x) = -x^2(x^2 - 2) + 1$ en $[-1, 1]$.

18. $f(x) = -3x^2(x^2 - 2) + 2$ en $[-2, 2]$.

19. $f(x) = \frac{1}{48}x^2(3x^2 + 8x - 18)$ en $[-4, 0]$.

20. $f(x) = x^2(3x^2 + 8x - 18)$ en $[-4, 2]$.

21. $f(x) = -2x^2(3x^2 + 8x - 18)$ en $[0, 2]$.

22. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ en $[-1, 1]$.

23. $f(x) = \frac{2}{x^2 + 3}$ en $[0, 1]$.

24. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 4}$ en $[-1, 2]$.

25. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x + 2}$ en $[-3, 0]$.

26. $f(x) = -\frac{x}{x^2 + 2x + 2}$ en $[-2, 0]$.

27. $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 2x + 2}$ en $[-2, 3]$.

28. $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ en $[0, 1]$.

29. $f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$ en $[-1, 0]$.

30. $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$ en $[-1, 0]$.

31. $f(x) = xe^{-x}$ en $[0, 2]$.

32. $f(x) = 3xe^{-x}$ en $[-2, 2]$.

33. $f(x) = 2xe^{-x} + 4$ en $[-1, 1]$.

34. $f(x) = \ln(1 + x^2)$ en $[-2, 0]$.

35. $f(x) = -\ln(1 + x^2)$ en $[-2, 2]$.

36. $f(x) = 2\ln(1 + x^2) + 2$ en $[0, 2]$.

37. $f(x) = \arctan(1 + x^2)$ en $[-1, 1]$.

38. $f(x) = 3 - 2\arctan(1 + x^2)$ en $[0, 2]$.

39. $f(x) = \arctan x + x$ en $[-1, 1]$.

40. $f(x) = 2\arctan x + 2x + 2$ en $[-2, 2]$.

41. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones definidas en el intervalo $[a, b]$. Suponga que ambas tienen un máximo (o un mínimo) absoluto en $x = x_0 \in [a, b]$. Demuestre que la función $\varphi(x) = f(x) + g(x)$ tiene un máximo (o un mínimo) absoluto en $x = x_0$.

42. Por medio de un ejemplo concreto, muestre que la afirmación anterior es falsa si consideramos la función $\varphi(x) = f(x)g(x)$.

8.2 FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

De manera intuitiva podemos decir que una función $f(x)$ es creciente en el intervalo I si la gráfica de esta función en ese intervalo "sube" (imagine la gráfica como un pedazo de montaña rusa), y, por el contrario, la función será decreciente en I si su gráfica "baja".

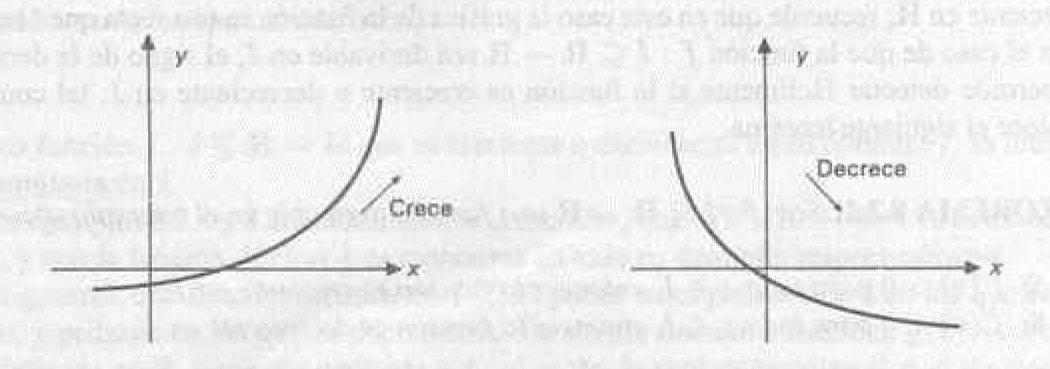


Figura 8.2.1. Una función creciente y una decreciente.

Más precisamente, considere la función $f : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida en el intervalo I de $\mathbf{R}$. Se tienen las siguientes definiciones:

La función f es **creciente** *en I si dados $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$.*

La función f es **decreciente** *en I si dados $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$.*

Esquemáticamente:

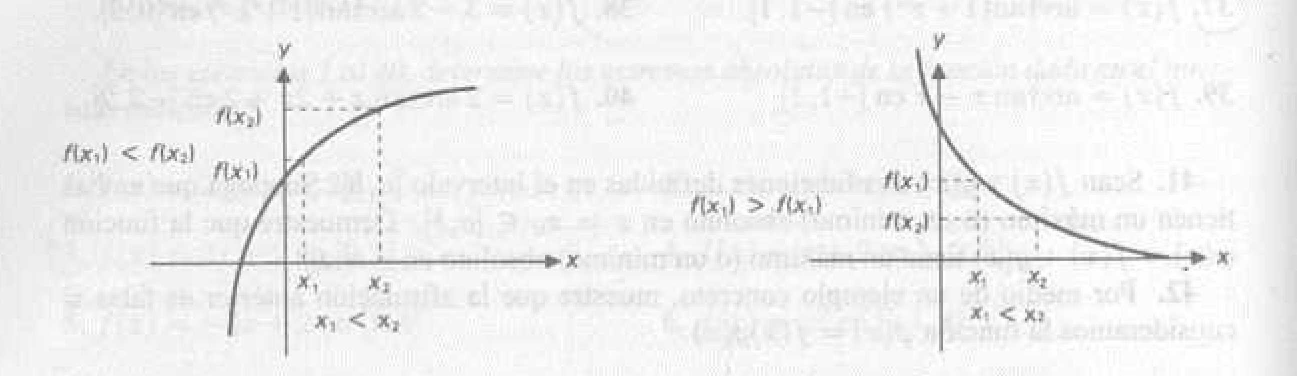


Figura 8.2.2. Una función creciente y una decreciente.

Por ejemplo, la función $f(x) = 4x + 3$ es creciente en R, pues si x_1, x_2 son dos números reales cualesquiera, se tienen las siguientes implicaciones (que usan algunas de las propiedades básicas de las desigualdades):

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 4x_1 < 4x_2 \Rightarrow 4x_1 + 3 < 4x_2 + 3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

(un argumento similar muestra que cualquier función lineal $f(x) = mx + b$, con $m > 0$, es creciente en R; recuerde que en este caso la gráfica de la función es una recta que "sube"), mientras que la función $f(x) = -3x + 5$ es decreciente en R pues:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -3x_1 > -3x_2 \Rightarrow -3x_1 + 5 > -3x_2 + 5 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2),$$

(un argumento similar muestra que cualquier función lineal $f(x) = mx + b$, con $m < 0$, es decreciente en R; recuerde que en este caso la gráfica de la función es una recta que "baja").

En el caso de que la función $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sea derivable en I, el signo de la derivada nos permite detectar fácilmente si la función es creciente o decreciente en I, tal como lo establece el siguiente teorema.

TEOREMA 8.2.1. *Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en el intervalo abierto I de R.*

1) Si $f'(x) > 0$ para toda $x \in I$, entonces la función es creciente en I.

2) Si $f'(x) < 0$ para toda $x \in I$, entonces la función es decreciente en I.

En efecto, tomemos dos puntos cualesquiera $x_1, x_2 \in I$, tales que $x_1 < x_2$ y supongamos que $f'(x) > 0$ para toda x del intervalo I. Vamos a ver que estas condiciones implican que $f(x_1) < f(x_2)$ (es decir, probaremos —bajo la hipótesis de que la derivada es positiva en todo punto del intervalo—, la implicación $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, que es la definición de función creciente). Consideremos el intervalo $[x_1, x_2] \subset I$. La derivabilidad de f en I nos asegura que esta función es continua en $[x_1, x_2]$ y derivable en (x_1, x_2). Podemos entonces aplicar el teorema del valor medio (Lagrange) —estudiado en el capítulo anterior—

a esta función en el intervalo $[x_1, x_2]$, el cual nos asegura que existe un $c \in (x_1, x_2)$ tal que $f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, expresión que se puede reescribir como:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Pero $f'(c) > 0$ (porque de hecho $f'(x) > 0$ para toda x de I) y los puntos x_1 y x_2 que tomamos (arbitrariamente) en I son tales que $x_1 < x_2$, es decir que $x_2 - x_1 > 0$. Así, el lado derecho de la expresión anterior es el producto de dos números positivos. Por tanto es positivo. Entonces $f(x_2) - f(x_1) > 0$, de donde $f(x_1) < f(x_2)$, que es la desigualdad que queríamos establecer. Esto prueba que (al ser $f'(x)$ positiva), la función $f(x)$ es creciente en I. La demostración de que si $f'(x)$ es negativa para toda x de I, entonces la función es decreciente en I, es completamente análoga.

Así pues, según el teorema 8.2.1, el crecimiento y/o decrecimiento de una función en un intervalo, lo podemos deducir del signo de la derivada de la función.

EJEMPLO 8.2.1. Determinar si la función $f(x) = 2x^5 + 3x^3 + 9x + 10$ es creciente o decreciente en **R**.

SOLUCIÓN. Como $f'(x) = 10x^4 + 9x^2 + 9 > 0$ para toda x real, pues es una suma de los términos no negativos $10x^4$ y $9x^2$, con el término positivo 9, concluimos que esta función es creciente en **R**.

$\star$

EJEMPLO 8.2.2. Determinar si la función $f(x) = \frac{1}{x}$ es creciente o decreciente en su dominio.

SOLUCIÓN. Como $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ para toda $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$, entonces la función dada es decreciente en todo su dominio (recuerde que la gráfica de esta función es una hipérbola con asíntotas en los ejes coordenados).

$\star$

Una función $f : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ que es creciente o decreciente en su dominio I, se dice que es **monótona** en I.

Los ejemplos 8.2.1 y 8.2.2 muestran que la función $f(x) = 2x^5 + 3x^3 + 9x + 10$ es monótona en **R**, y que la función $f(x) = \frac{1}{x}$ es monótona en todo su dominio, respectivamente.

En general, una función definida en $I \subseteq \mathbf{R}$ puede tener pedazos de I en los que es creciente, y pedazos en los que es decreciente. La simple función cuadrática $f(x) = x^2$, que está definida en **R**, tiene por derivada a $f'(x) = 2x$, la cual es negativa si $x < 0$ y positiva si $x > 0$. Así, la función $f(x) = x^2$ es decreciente en $\mathbf{R}^-$ y creciente en $\mathbf{R}^+$ (lo cual resulta claro al recordar la gráfica de esta función).

Los intervalos más grandes (subconjuntos del dominio de la función) en donde una función se mantiene monótona (creciente o decreciente) se llaman *intervalos de monotonía de la función*. Observe que los intervalos de monotonía $\mathbf{R}^-$ y $\mathbf{R}^+$ de la función $f(x) = x^2$ están separados por $x = 0$, el cual es un punto crítico de la función (pues $f'(0) = 0$). En general, puesto que en cada intervalo de monotonía de una función, la derivada de ésta mantiene signo constante, dos intervalos de monotonía (para una función continua) deben estar separa-

dos por un punto crítico de la función, es decir, un punto en donde la derivada de la función sea cero o no exista. Un ejemplo de esta última situación es el considerado en el ejemplo 8.1.3, $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$. Esta función está definida en todo $\mathbf{R}$, en donde es continua. Su derivada es $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, la cual es negativa para $x < 0$ (pues la raíz cúbica de números negativos es negativa) y positiva para $x > 0$. Así, según el teorema 8.2.1, esta función es decreciente en $\mathbf{R}^-$ y creciente en $\mathbf{R}^+$. Estos dos intervalos de monotonía están separados por $x = 0$, punto crítico de $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ en donde $f'(x)$ no existe.

Si una función tiene una discontinuidad en un punto $x = a$ es posible que ese punto marque un cambio en el crecimiento y/o decrecimiento de la función. Por ejemplo, la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ es discontinua en $x = 0$. Su derivada es $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$, la cual es positiva para $x < 0$ y negativa para $x > 0$. Es decir, esta función es creciente en $\mathbf{R}^-$ y decreciente en $\mathbf{R}^+$ (la gráfica de esta función se muestra en la figura 2.5.1 del capítulo 2). Estos dos intervalos de monotonía de la función están separados por $x = 0$, el cual es un punto de discontinuidad de la función. (No podemos decir que $x = 0$ es un punto crítico de esta función, pues un punto crítico es un punto *del dominio de la función* en donde $f'(x)$ es cero o no existe.)

Así entonces, **dos intervalos de monotonía** (con comportamiento distinto) **de una función están separados por un punto crítico o por una discontinuidad de la función.**

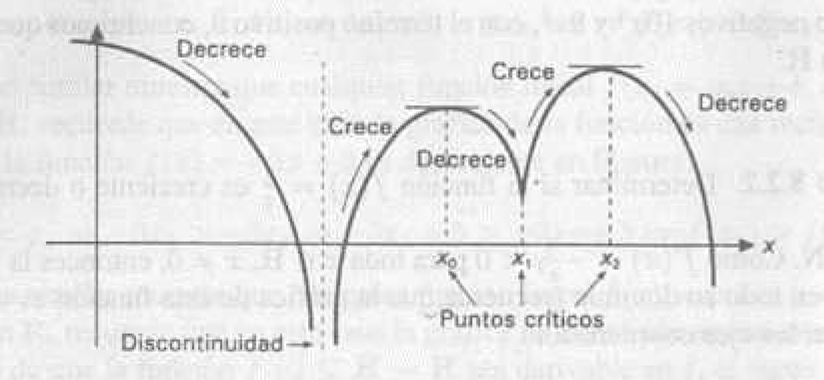


Figura 8.2.3. Los intervalos de monotonía de una función están separados por puntos críticos o por discontinuidades.

En conclusión, puesto que los puntos críticos y las discontinuidades de una función son los lugares en donde puede haber cambio de comportamiento (creciente o decreciente) de la función, lo que debemos hacer para obtener los intervalos de monotonía de una función es determinar los puntos críticos de ella, así como sus puntos de discontinuidad. Éstos son los puntos en donde *puede* haber una separación de dos intervalos de monotonía con comportamientos distintos de la función. En cada uno de los intervalos que resulten de la partición del dominio de la función por los puntos mencionados, verificamos el signo que tiene la derivada de la función. El teorema 8.2.1 nos dirá cuál es el comportamiento de la función en ese intervalo.

Enfatizamos en el párrafo anterior la palabra *puede* porque un punto crítico de una función o una discontinuidad de ella no necesariamente separan dos intervalos de monotonía distintos de la función. El ejemplo típico de esta situación es la función $f(x) = x^3$. Su derivada es $f'(x) = 3x^2$ la cual es igual a cero para $x = 0$, de modo que $x = 0$ es un punto crítico de esta

función. Para $x < 0$ tenemos $f'(x) = 3x^2 > 0$ y para $x > 0$ tenemos $f'(x) = 3x^2 > 0$, de modo que la función es creciente en $\mathbf{R}^-$ y también es creciente en $\mathbf{R}^+$. Así, para la función $f(x) = x^3$ tenemos el punto crítico $x = 0$ que separa dos intervalos de crecimiento de la función. De igual manera, la función $f(x) = \frac{1}{x}$ que ya habíamos examinado nos muestra que la discontinuidad $x = 0$ no separa dos intervalos de monotonía con distinto comportamiento de la función: esta función decrece en $\mathbf{R}^-$ y en $\mathbf{R}^+$.

EJEMPLO 8.2.3. Determine los intervalos de monotonía de la función $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

SOLUCIÓN. El dominio de esta función es $\mathbf{R}$, en donde es continua. Debemos determinar en qué intervalos de $\mathbf{R}$ la función crece y en qué intervalos decrece. Apoyados por el teorema 8.2.1, debemos determinar los intervalos de signo constante de la derivada de la función, la cual es:

$$f'(x) = \frac{(1+x^2)(1) - x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Los puntos en donde puede cambiar de signo $f'(x)$ son sus puntos críticos. Como:

$$\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1,$$

tenemos que los intervalos en donde se mantiene constante el signo de la derivada son $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, \infty)$. El resumen de las operaciones que hacemos para determinar el comportamiento de la función en cada uno de estos intervalos es, como hicimos en los ejemplos de la sección 2 de este capítulo:

Intervalo ...	**... en donde escogemos un punto x_0 ...**	**... y evaluamos $f'(x_0)$**	**Concluimos que el signo de $f'(x)$ en todo ese intervalo es ...**	**... y que por lo tanto la función es ...**
$(-\infty, -1)$	$x_0 = -2$	$f'(-2) = -\frac{3}{25}$	$-$	decreciente en $(-\infty, -1)$
$(-1, 1)$	$x_0 = 0$	$f'(0) = 1$	$+$	creciente en $(-1, 1)$
$(1, \infty)$	$x_0 = 2$	$f'(2) = -\frac{3}{25}$	$-$	decreciente en $(1, \infty)$

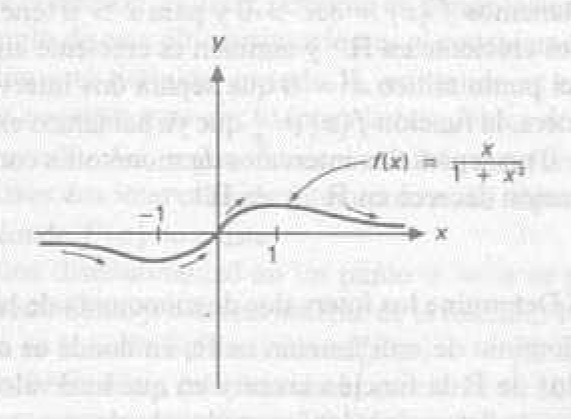


Figura 8.2.4. Gráfica de la función del ejemplo 8.2.3.

★

EJEMPLO 8.2.4. Determine los intervalos de monotonía de la función $f(x) = 2x \arctan x$ $-2\ln\sqrt{1+x^2} + 4x + 3$.

SOLUCIÓN. Esta función está definida y es continua en R. Como en el ejercicio anterior, debemos determinar los puntos críticos, pues éstos serán los puntos en donde posiblemente se den los cambios de signo de la derivada (y por lo tanto, del comportamiento creciente o decreciente de la función). La derivada de la función dada es:

$$f'(x) = 2x\left(\frac{1}{1+x^2}\right) + 2\arctan x - \left(\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}(2x)\right) + 4$$

$$= \frac{2x}{1+x^2} + 2\arctan x - \frac{2x}{1+x^2} + 4 = 2(\arctan x + 2).$$

La ecuación $f'(x) = \arctan x + 2 = 0$ no tiene solución, pues recordemos que el rango de la función $y = \arctan x$ es $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (o sea, aproximadamente $(-1.57, 1.57)$), de modo que no existe $x \in \mathbf{R}$ alguna tal que $\arctan x = -2$. De hecho, como $f'(x) = \arctan x + 2 > 0$ para toda $x \in \mathbf{R}$, concluimos que la función dada es creciente en todo R.

★

EJEMPLO 8.2.5. Determine los intervalos de monotonía de la función $f(x) = \frac{1}{2}x^2(x^2 - 2)$. (Ver ejemplo 8.1.2.)

SOLUCIÓN. Como la función dada es continua en R, los únicos cambios de comportamiento de la función pueden venir de puntos críticos. Ya que $f'(x) = 2x(x-1)(x+1)$, la función tiene en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$ puntos críticos. Debemos ver si hay cambio de signo en la derivada de la función en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, \infty)$ que resultan de la partición de R (el dominio de la función) por los puntos críticos. Una manera sistemática de proceder es dibujar la recta de los reales y marcar en ella los puntos encontrados. Luego escogemos un punto cualquiera en cada uno de los intervalos en los que quedó dividida la recta y calculamos en ese punto la derivada. El signo de ella nos dirá el signo

que tiene tal derivada en todos los puntos de ese intervalo (pues ya hemos separado la recta con los puntos en donde pueden ocurrir cambios de signo de la derivada). En nuestro caso tenemos:

Intervalo...	**...en donde escogemos un punto x_0...**	**...y evaluamos $f'(x_0)$**	**Concluimos que el signo de $f'(x)$ en todo ese intervalo es...**	**...y que por lo tanto la función es...**
$(-\infty,-1)$	$x_0=-2$	$f'(-2)=-12$	$-$	decreciente en $(-\infty,-1)$
$(-1,0)$	$x_0=-\frac{1}{2}$	$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$	$+$	creciente en $(-1,0)$
$(0,1)$	$x_0=\frac{1}{2}$	$f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}$	$-$	decreciente en $(0,1)$
$(1,\infty)$	$x_0=2$	$f'(2)=12$	$+$	creciente en $(1,\infty)$

que de manera esquemática se ve como:

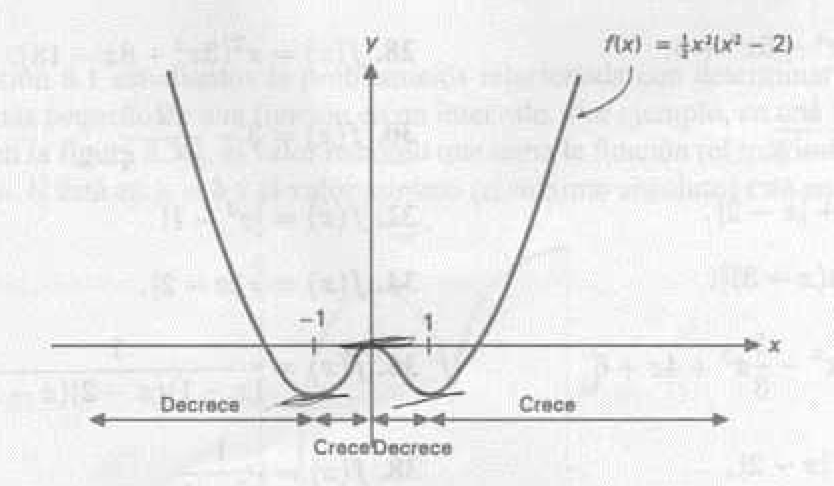


Figura 8.2.5. Investigación de los intervalos de monotonía de la función del ejemplo 8.2.5.

★

EJERCICIOS (8.2)

En los ejercicios 1 al 45, determine los puntos críticos y los intervalos de monotonía de la función dada.

1. $f(x) = 3x + 4$. **2.** $f(x) = e^x + 4$. **3.** $f(x) = 5 + e^{-x}$.

4. $f(x) = 3 - e^{-3x}$. **5.** $f(x) = x^2 + 1$. **6.** $f(x) = x^2 + 2x + 4$.

7. $f(x) = 3x^3 + 9x + 4$. **8.** $f(x) = \ln(1 + x)$. **9.** $f(x) = \ln(1 + x^2)$.

10. $f(x) = 2\arctan x - 1$. **11.** $f(x) = \dfrac{4}{x+2}$. **12.** $f(x) = \dfrac{x+1}{x+4}$.

13. $f(x) = \dfrac{3}{x^2+3}$. **14.** $f(x) = \dfrac{x^2+5}{x^2+1}$. **15.** $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{3+x^2}}$.

16. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. **17.** $f(x) = \sqrt{1+x^2}$. **18.** $f(x) = e^{-3x^2}$.

19. $f(x) = 2 + 3(x-1)^{\frac{2}{3}}$. **20.** $f(x) = e^{x^2-2x}$. **21.** $f(x) = \arctan(2 + x^2)$.

22. $f(x) = x + 2\arctan x$. **23.** $f(x) = 2x - \arctan x$. **24.** $f(x) = x - 2\arctan x$.

25. $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 4$. **26.** $f(x) = x^3 - 3x + 6$.

27. $f(x) = 3x^4 - 6x^2 + 5$. **28.** $f(x) = x^2(3x^2 + 8x - 18)$.

29. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$. **30.** $f(x) = 3 - \dfrac{2}{x^2-4}$.

31. $f(x) = 1 + |x-2|$. **32.** $f(x) = |x^2 - 1|$.

33. $f(x) = |\ln(x-3)|$. **34.** $f(x) = x|x-2|$.

35. $f(x) = \dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{5}{3}x^3 + 4x + 6$. **36.** $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

37. $f(x) = x^2|x-2|$. **38.** $f(x) = \dfrac{1}{x^3-1}$.

39. $f(x) = \dfrac{x}{x^4-1}$. **40.** $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4-1}$.

41. $f(x) = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}(2e^x+1)\right)$. **42.** $f(x) = \dfrac{1}{4}e^{4x} + 3e^{2x} + 9x + 1$.

43. $f(x) = \dfrac{x(x+2)}{x+1} - \ln(x+1)$.

44. $f(x) = 3\arctan(x+1) - \ln(x^2+2x+2) + x.$

45. $f(x) = \frac{4}{3}\arctan x + \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)\ln(x^2+1) - \frac{2}{9}x(x^2+6).$

46. Suponga que $f, g : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ son funciones crecientes. Demuestre que la función $f + g : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es creciente:

a) Sin suponer que las funciones son derivables.

b) Suponiendo que son derivables.

47. Suponga que la función $f : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es creciente. Demuestre que la función $\varphi : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\varphi(x) = x + f(x)$ es creciente:

a) Sin suponer que la función es derivable.

b) Suponiendo que f es derivable.

48. ¿Verdadero o falso? Si $f, g : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ son funciones crecientes, entonces el producto $fg : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es creciente.

8.3 EXTREMOS LOCALES

En la sección 8.1 estudiamos la problemática relacionada con determinar el valor más grande y el más pequeño de una función en un intervalo. Por ejemplo, en una función como la mostrada en la figura 8.3.1, el valor máximo que toma la función (el máximo absoluto) en el intervalo $[a, b]$ está en $x = b$ y el valor mínimo (el mínimo absoluto) está en $x = a$.

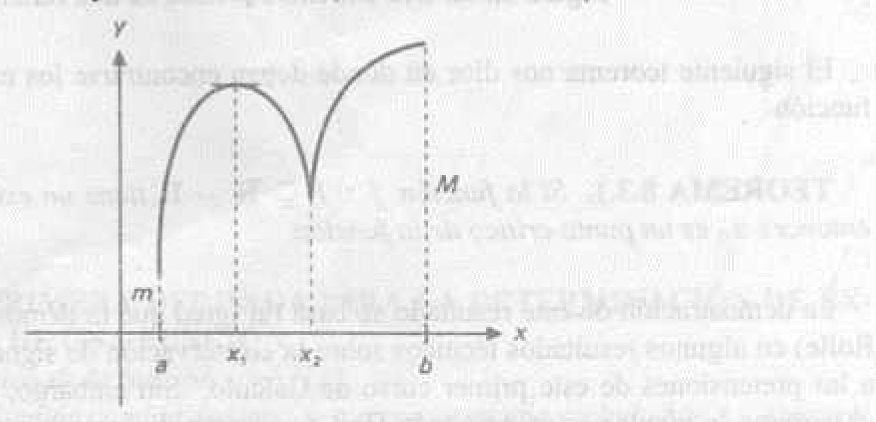


Figura 8.3.1. Los extremos de una función.

Sin embargo, observemos lo que sucede en los puntos de abscisas x_1 y x_2 que se encuentran dentro del intervalo. Éstos representan "chipotes" o "picos" de la gráfica de la función que tienen la propiedad de que, al menos para sus vecinos, son los puntos más altos o más

bajos de la gráfica. Si nos situamos en cada uno de esos puntos, estaremos en una cima o en un sumidero de un terreno (cuya superficie es modelada por la gráfica de la función). El que estemos en una cima no quiere decir que no haya puntos más elevados del terreno (si usted se sube al punto más alto del Ajusco, se encontrará en la cima del terreno en los alrededores de ese punto, aunque la cima del Popocatépetl es más alta). Ésta es la idea que hay detrás de los extremos locales de una función, que definimos a continuación.

Sea $f : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función definida en el intervalo abierto I de $\mathbf{R}$.

1. Se dice que esta función tiene un **máximo relativo (o máximo local)** en el punto $x_0 \in I$, si existe una vecindad de x_0, digamos $V_{x_0} = \{x \in I \mid |x - x_0| < r\} \subset I$ para la cual se tiene $f(x_0) \geq f(x)$ para toda $x \in V_{x_0}$.
2. Se dice que esta función tiene un **mínimo relativo (o mínimo local)** en el punto $x_0 \in I$, si existe una vecindad de x_0, digamos $V_{x_0} = \{x \in I \mid |x - x_0| < r\} \subset I$ para la cual se tiene $f(x_0) \leq f(x)$ para toda $x \in V_{x_0}$.

Así pues, los máximos y mínimos locales (los extremos locales) o relativos, son puntos en los que la función alcanza el mayor o el menor valor, respectivamente, pero *localmente*, fijándonos solamente en los alrededores del punto (en una vecindad de él).

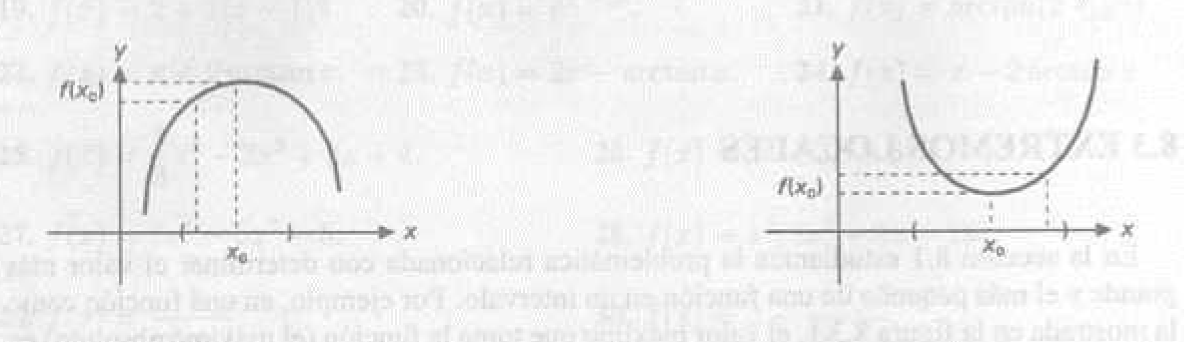


Figura 8.3.2. Los extremos locales de una función.

El siguiente teorema nos dice en dónde deben encontrarse los extremos locales de una función.

TEOREMA 8.3.1. *Si la función $f : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tiene un extremo local en $x_0 \in I$, entonces x_0 es un punto crítico de la función.*

La demostración de este resultado se basa (al igual que la demostración del teorema de Rolle) en algunos resultados técnicos sobre la conservación de signo en un límite y escapa a las pretensiones de este primer curso de Cálculo. Sin embargo, observe que lo que en el teorema se plantea es un resultado fácil de aceptar: los extremos locales de una función solamente pueden encontrarse en chipotes o picos de su gráfica, es decir, en puntos en donde la derivada es cero o no existe, respectivamente (puntos críticos de la función).

Lo que sí resulta muy importante que entendamos bien del teorema 8.3.1 es el sentido en el que está hecha la afirmación que contiene: *si* la función tiene un extremo local en un punto, *entonces* ese punto es un punto crítico de la función. Esto no significa que si x_0 es

un punto crítico de una función, entonces en x_0 debe haber un extremo local. El ejemplo por excelencia que muestra este hecho (el contraejemplo) es la función $f(x) = x^3$. Esta función tiene un punto crítico en $x_0 = 0$ (pues $f'(0) = 3(0)^2 = 0$) y sin embargo no hay extremo local en ese punto. En efecto, cualquier vecindad de $x_0 = 0$ tiene valores positivos y negativos de x, y $f(x) = x^3$ es positiva para $x > 0$ y negativa para $x < 0$, de modo que $f(0) = (0)^3 = 0$ no puede ser ni el valor mayor ni el menor de las imágenes $f(x)$ con x en una vecindad del cero.

Así pues, en el problema de la determinación de los extremos locales de una función, el teorema 8.3.1 nos dice solamente *en dónde debemos buscar tales extremos*. Éstos se deben encontrar en los puntos críticos de la función. Una vez que determinemos estos puntos críticos, tendremos la lista de *candidatos a extremos locales de la función*. Para saber si en cada uno de esos puntos críticos hay o no un extremo local, podemos usar lo que estudiamos en la sección anterior sobre funciones crecientes y decrecientes. En efecto, observemos lo que pasa en los alrededores de un punto de extremo local. Supongamos que en los puntos a la izquierda del punto crítico x_0 la derivada de la función es positiva y en los que están a su izquierda la derivada de la función es negativa. El teorema 8.2.1 nos dice entonces que antes de x_0 la función va creciendo (va de subida) y después de x_0 va decreciendo (va de bajada). Esto nos permite concluir que en el punto crítico x_0 debe haber una cima de la gráfica de la función, es decir, un máximo local. Similarmente, si en los puntos a la izquierda del punto crítico de la función la derivada de ésta es negativa y en los puntos a la derecha la derivada es positiva, significa que antes de ese punto crítico la función va decreciendo (va de bajada) y después va creciendo (va de subida), lo cual nos permite concluir que en ese punto crítico la función tiene un mínimo local. Este criterio, llamado "criterio de la primera derivada", nos permite decidir entonces cuándo en un punto crítico se tiene un extremo local.

CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA PARA LA DETERMINACIÓN DE EXTREMOS LOCALES DE UNA FUNCIÓN.

Sea x_0 un punto crítico de la función $y = f(x)$.

1. *Si la derivada de la función cambia de signo $+$ a signo $-$ en una vecindad de x_0, entonces la función tiene un máximo local en x_0.*
2. *Si la derivada de la función cambia de signo $-$ a signo $+$ en una vecindad de x_0, entonces la función tiene un mínimo local en x_0.*
3. *Si la derivada de la función no cambia de signo en una vecindad de x_0, entonces la función no tiene extremo local en el punto crítico x_0.*

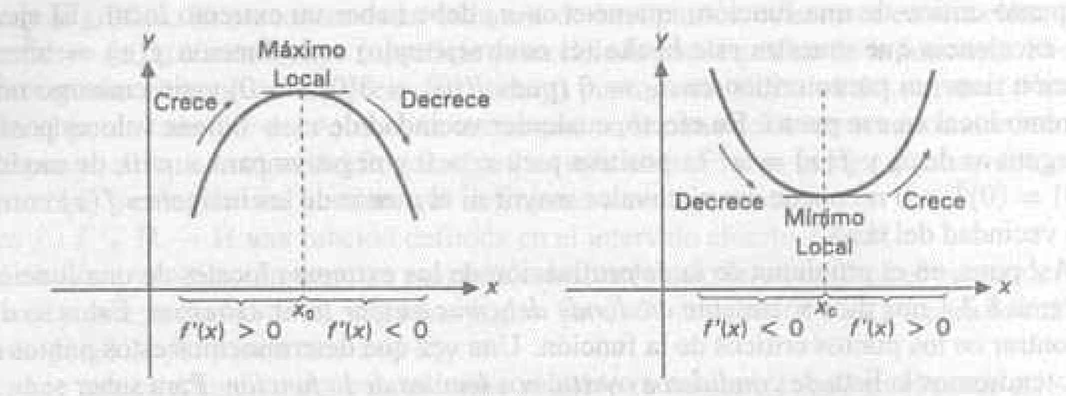


Figura 8.3.3. El criterio de la primera derivada para determinar la existencia de extremos locales en los puntos críticos de una función.

EJEMPLO 8.3.1. Determine los extremos locales de la función $f(x) = 2x^2 + 8x + 5$.

SOLUCIÓN. Buscamos primeramente los puntos críticos de la función, es decir, las soluciones de $f'(x) = 4x + 8 = 0$. Hay un único punto crítico $x_0 = -2$. Probamos el signo de la derivada $f'(x) = 4x + 8$ en una vecindad de este punto. Por ejemplo, para $x = -3 < x_0$ se tiene $f'(-3) = 4(-3) + 8 = -4 < 0$ y para $x = -1 > x_0$ se tiene $f'(-1) = 4(-1) + 8 = 4 > 0$, de modo que la derivada de la función cambia de menos a más en una vecindad del punto crítico $x_0 = -2$. Concluimos entonces que la función dada tiene un mínimo local en $x_0 = -2$. De hecho, sabemos que la gráfica de esta función es una parábola que abre hacia arriba, y que tiene su vértice en el punto de abscisa $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2(2)} = -2$, que es la abscisa del mínimo local que acabamos de determinar.

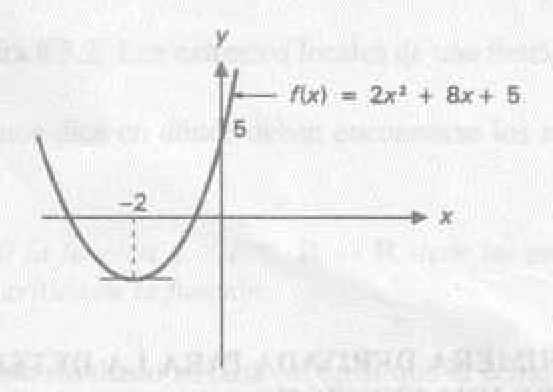


Figura 8.3.4. El ejemplo 8.3.1.

★

EJEMPLO 8.3.2. Determine los extremos locales de la función $f(x) = x^2e^x$.

SOLUCIÓN. Encontramos los puntos críticos resolviendo la ecuación $f'(x) = 0$. La derivada de la función dada es $f'(x) = x^2e^x + 2xe^x = (x^2 + 2x)e^x$. Como $e^x \neq 0$, los puntos críticos provienen de resolver $x^2 + 2x = 0$, es decir, son $x_0 = 0$ y $x_1 = -2$. Éstos

son los puntos en donde posiblemente haya extremos locales. Para ver si los hay, usamos el criterio de la primera derivada. Resumimos las cuentas en el siguiente esquema:

Punto crítico:	**Consideramos una vecindad del punto crítico…**	**Evaluamos la derivada antes y después…**	**El signo de la derivada cambió de…**	**Por tanto en el punto crítico hay un…**
$x_0 = 0$	$\left\{\begin{array}{c}\text{antes}\\ x=-1\end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{c}\text{después}\\ x=1\end{array}\right\}$	$\left\{\begin{array}{c}f'(-1)=\\ =-e^{-1}<0\end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{c}f'(1)=\\ =3e>0\end{array}\right\}$	$-$ a $+$	MINIMO LOCAL
$x_1 = -2$	$\left\{\begin{array}{c}\text{antes}\\ x=-3\end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{c}\text{después}\\ x=-1\end{array}\right\}$	$\left\{\begin{array}{c}f'(-3)=\\ =3e^{-3}>0\end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{c}f'(-1)=\\ =-e^{-1}<0\end{array}\right\}$	$+$ a $-$	MÁXIMO LOCAL

O bien, esquemáticamente:

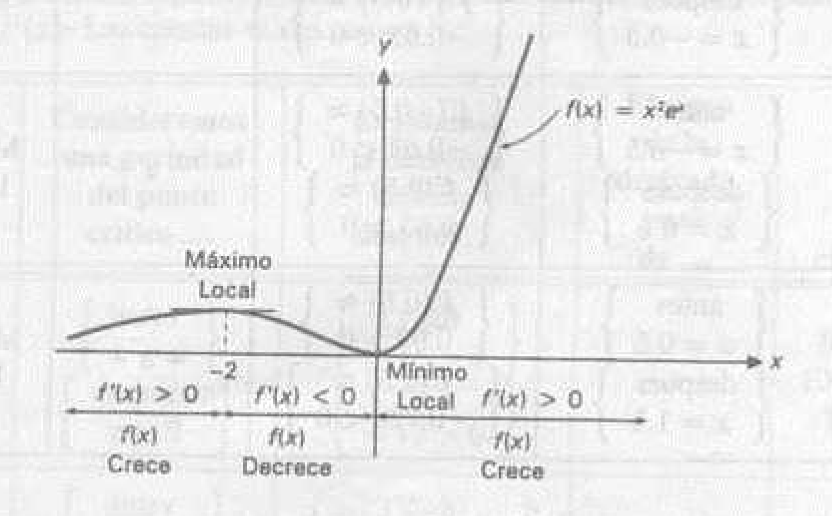


Figura 8.3.5. El ejemplo 8.3.2.

★

EJEMPLO 8.3.3. Determine los extremos locales de la función $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{4}x^{\frac{8}{3}}$.

SOLUCIÓN. Esta función está definida y es continua en todo $\mathbf{R}$. Investiguemos sus puntos críticos. La derivada de la función es:

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}\left(\frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}\right) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\left[1 - x^2\right] = \frac{2(1-x)(1+x)}{3\sqrt[3]{x}}.$$

En este caso tenemos dos puntos críticos soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$, a saber $x = -1$ y $x = 1$, y un punto crítico en donde $f'(x)$ no existe, a saber $x = 0$ (observe que la función dada sí está definida en $x = 0$; su derivada es la que no existe en este punto). Tenemos, pues, tres candidatos a extremos locales de la función: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 1$. Para saber si efectivamente hay extremos locales en estos puntos críticos, aplicamos el criterio de la primera derivada. Las cuentas se ven como:

Punto crítico:	**Consideramos una vecindad del punto crítico...**	**Evaluamos la derivada antes y después...**	**El signo de la derivada cambió de...**	**Por tanto en el punto crítico hay un...**
$x_1 = -1$	$\left\{\begin{array}{c}\text{antes}\\ x=-1.5\end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{c}\text{después}\\ x=-0.5\end{array}\right\}$	$\left\{\begin{array}{c}f'(-1.5)\approx\\ 0.728>0\end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{c}f'(-0.5)\approx\\ -0.63<0\end{array}\right\}$	$+$ a $-$	MÁXIMO LOCAL
$x_2 = 0$	$\left\{\begin{array}{c}\text{antes}\\ x=-0.5\end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{c}\text{después}\\ x=0.5\end{array}\right\}$	$\left\{\begin{array}{c}f'(-0.5)\approx\\ -0.63<0\end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{c}f'(0.5)\approx\\ 0.63>0\end{array}\right\}$	$-$ a $+$	MÍNIMO LOCAL
$x_3 = 1$	$\left\{\begin{array}{c}\text{antes}\\ x=0.5\end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{c}\text{después}\\ x=1.5\end{array}\right\}$	$\left\{\begin{array}{c}f'(0.5)\approx\\ 0.63>0\end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{c}f'(1.5)\approx\\ -0.728<0\end{array}\right\}$	$+$ a $-$	MÁXIMO LOCAL

Al evaluar la derivada en los puntos de la vecindad del punto crítico considerado, no importa mucho el valor que se obtenga, sino el signo de aquélla. Por eso, en ocasiones basta con hacer algunas "sustituciones mentales" en la fórmula de la derivada y deducir cuál es el signo del resultado que se obtendría. Observe también que la vecindad que se toma de cada punto crítico no debe invadir los terrenos de otro punto crítico: podemos tomar la vecindad que queramos sin incluir en ella discontinuidades de la función ni otros puntos críticos.

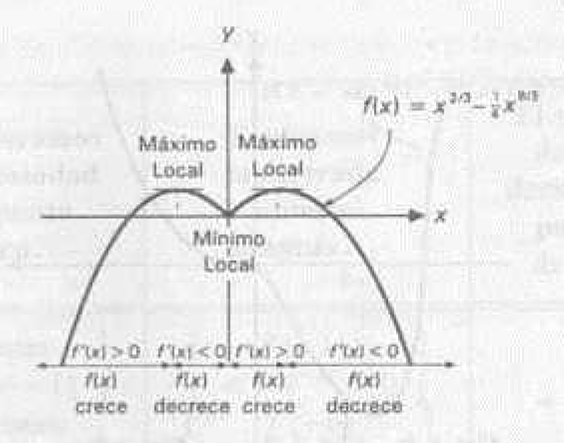


Figura 8.3.6. El ejemplo 8.3.3.

EJEMPLO 8.3.4. Determine los extremos locales de la función $f(x) = (x-1)^3(3x+17)$.

SOLUCIÓN. La función es polinomial y, por lo tanto, continua y derivable en todo R. Determinamos primeramente los puntos críticos de la función, los cuales serán los candidatos a extremos locales. La derivada de la función $f(x)$ es:

$$f'(x) = (x-1)^3(3)+3(x-1)^2(3x+17) = 3(x-1)^2(x-1+3x+17) = 3(x-1)^2(4x+16),$$

de modo que las soluciones de la ecuación $f'(x) = 3(x-1)^2(4x+16) = 0$ son $x_1 = 1$ y $x_2 = -4$. Analizamos, según el criterio de la primera derivada si en estos puntos hay cambio de signo de $f'(x)$. Las cuentas se ven como:

Punto crítico:	**Consideramos una vecindad del punto crítico...**	**Evaluamos la derivada antes y después...**	**El signo de la derivada pasó de...**	**Por tanto en el punto crítico...**
$x_0 = 1$	$\left\{\begin{array}{c}\text{antes}\\ x=0\end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{c}\text{después}\\ x=2\end{array}\right\}$	$\left\{\begin{array}{c}f'(0)\\ =48>0\\ f'(2)\\ =72>0\end{array}\right\}$	$+$ a $+$	NO HAY EXTREMO LOCAL
$x_1 = -4$	$\left\{\begin{array}{c}\text{antes}\\ x=-5\end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{c}\text{después}\\ x=-3\end{array}\right\}$	$\left\{\begin{array}{c}f'(-5)\\ =-432<0\end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{c}f'(-3)\\ =192>0\end{array}\right\}$	$-$ a $+$	HAY UN MÍNIMO LOCAL

Entonces la función dada tiene solamente un mínimo local en $x = -4$, en donde $f(-4) = -625$.

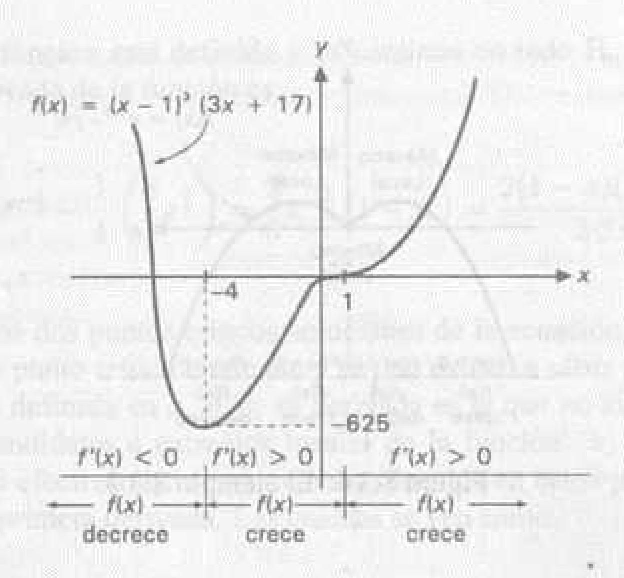


Figura 8.3.7. Gráfica de la función del ejemplo 8.3.4.

EJEMPLO 8.3.5. Determine los extremos locales de la función $f(x) = (x^2 + 9x + 1)e^x$.

SOLUCIÓN. La función es continua y derivable en todo $\mathbf{R}$. Como en el ejercicio anterior, determinamos primeramente los puntos críticos de la función, los cuales serán los candidatos a extremos locales. La derivada de la función $f(x)$ es:

$$f'(x) = (x^2 + 9x + 1)e^x + e^x(2x + 9) = e^x(x^2 + 11x + 10).$$

Las raíces de la ecuación $f'(x) = e^x(x^2 + 11x + 10) = 0$ se obtienen al resolver $x^2 + 11x + 10 = 0$ (puesto que $e^x \neq 0$ para toda $x \in \mathbf{R}$). Tales raíces son:

$$x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{(11)^2 - 4(10)}}{2} = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 40}}{2} = \frac{-11 \pm 9}{2} = \begin{cases} \frac{-11+9}{2} = -1 \\ \frac{-11-9}{2} = -10. \end{cases}$$

Entonces hay dos puntos críticos $x_1 = -10$ y $x_2 = -1$. Si analizamos cada uno de estos puntos críticos según el criterio de la primera derivada tenemos:

Punto crítico:	Consideramos una vecindad del punto crítico...	Evaluamos la derivada antes y después...	El signo de la derivada pasó de...	Por tanto en el punto crítico hay un...
$x_0 = -10$	$\left\{\begin{array}{c}\text{antes}\\ x=-11\end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{c}\text{después}\\ x=-5\end{array}\right\}$	$\left\{\begin{array}{c}f'(-11)\\ =10e^{-11}>0\end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{c}f'(-5)\\ =-20e^{-5}<0\end{array}\right\}$	+ a −	MÁXIMO LOCAL
$x_1 = -1$	$\left\{\begin{array}{c}\text{antes}\\ x=-5\end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{c}\text{después}\\ x=0\end{array}\right\}$	$\left\{\begin{array}{c}f'(-5)\\ =-20e^{-5}<0\end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{c}f'(0)\\ =10>0\end{array}\right\}$	− a +	MÍNIMO LOCAL

Por lo tanto, la función $f(x) = (x^2 + 9x + 1)e^x$ tiene un máximo local en $x = -10$, en donde $f(-10) = 11e^{-10}$, y un mínimo local en $x = -1$, en donde $f(-1) = -7e^{-1}$.

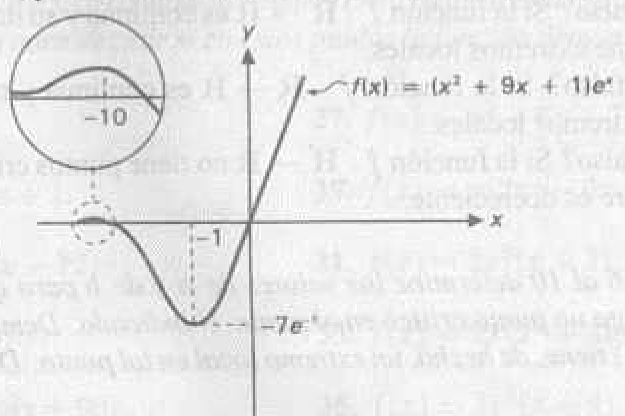


Figura 8.3.8. Gráfica de la función del ejemplo 8.3.5.

★

EJEMPLO 8.3.6. Determine los valores de a y de b para que la gráfica de la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ pase por el punto $(1, 1)$ y tenga un extremo local para $x = 3$.

SOLUCIÓN. Para que la gráfica de la función $f(x)$ pase por el punto $(1, 1)$ se debe tener $f(1) = 1$, es decir $(1)^3 + a(1)^2 + b(1) + 1 = 1$, o bien: $a + b = -1$. Queremos además que la función tenga un extremo local en $x = 3$. Éste debe ser, entonces, un punto crítico de la función, es decir, $f'(3) = 0$. Como $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$, también se debe tener que $3(3)^2 + 2a(3) + b = 0$, o sea: $6a + b = -27$. El par de condiciones $a + b = -1$ y $6a + b = -27$ nos da un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas a y b, cuya solución es $a = -\frac{26}{5}$ y $b = \frac{21}{5}$. Estos valores garantizan, en principio, que la gráfica de

la función pasa por el punto $(1,1)$ y que tiene un punto crítico en $x = 3$. Veamos que, de hecho, para estos valores de a y b, la función tiene un extremo local en $x = 3$. La derivada de $f(x) = x^3 - \frac{26}{5}x^2 + \frac{21}{5}x + 1$ es $f'(x) = 3x^2 - \frac{52}{5}x + \frac{21}{5}$, una de cuyas raíces es $x = 3$ (la otra es $x = \frac{7}{15}$), y además para $x = 2$ (un punto antes del punto crítico $x = 3$) se tiene $f'(2) = -\frac{23}{5} < 0$ y para $x = 4$ (un punto después del punto crítico $x = 3$) se tiene $f'(4) = \frac{53}{5} > 0$. Es decir, en el punto crítico $x = 3$ la función dada pasa de menos a más, lo cual indica que tiene un mínimo local para $x = 3$. Así pues, los valores encontrados de a y b satisfacen los requerimientos impuestos a la función del ejercicio. ⋆

EJERCICIOS (8.3)

1. ¿Verdadero o falso? Si la función $f(x)$ tiene un punto crítico en x_0, entonces tiene un extremo local en ese punto.

2. ¿Verdadero o falso? Si la función $f(x)$ tiene un extremo local en x_0, entonces tiene un punto crítico en ese punto.

3. ¿Verdadero o falso? Si la función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es continua y su derivada nunca se vuelve cero entonces no tiene extremos locales.

4. ¿Verdadero o falso? Si la función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es continua y no tiene puntos críticos entonces no tiene extremos locales.

5. ¿Verdadero o falso? Si la función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ no tiene puntos críticos entonces siempre es creciente o siempre es decreciente.

En los ejercicios 6 al 10 determine los valores de a y de b para que la función $f(x) = x^3 + x^2 + ax + b$ tenga un punto crítico en el punto P indicado. Demuestre que en todos los casos la función $f(x)$ tiene, de hecho, un extremo local en tal punto. Determine la naturaleza de este extremo.

6. $P = (2,2)$. **7.** $P = (-2,2)$. **8.** $P = (0,3)$.

9. $P = (4,-3)$. **10.** $P = (-2,1)$.

En los ejercicios 11 al 15 determine los valores de a y b para que la función $f(x) = x^4 + x^3 + ax^2 + bx$ tenga puntos críticos en los puntos de abscisas indicadas. Demuestre que en todos los casos la función $f(x)$ tiene, de hecho, extremos locales en tales puntos. Determine la naturaleza de esos extremos.

11. $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$. **12.** $x_1 = -2$ y $x_2 = 2$. **13.** $x_1 = 0$ y $x_2 = 4$.

14. $x_1 = -3$ y $x_2 = 2$. **15.** $x_1 = -1$ y $x_2 = 3$.

En los ejercicios 16 al 20 determine los valores de a y b para que la función $f(x) = \frac{1}{x^2+ax+b}$ tenga un punto crítico en el punto P indicado. Demuestre que en todos los casos la función $f(x)$ tiene, de hecho, un máximo local en tal punto.

16. $P = (0, 3)$. **17.** $P = (1, 2)$. **18.** $P = (-2, -1)$.

19. $P = (3, -1)$. **20.** $P = (-2, 1)$.

En los ejercicios 21 al 25 determine los valores de a, b, c y d para que la función $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga puntos críticos en los puntos P y Q indicados. Demuestre que en todos los casos la función $f(x)$ tiene, de hecho, extremos locales en tales puntos. Determine la naturaleza de esos extremos.

21. $P = (0, 0)$ y $Q = (3, 3)$. **22.** $P = (-1, -1)$ y $Q = (2, 2)$.

23. $P = (-2, -2)$ y $Q = (2, 2)$. **24.** $P = (0, 1)$ y $Q = (3, 1)$.

25. $P = (0, 0)$ y $Q = (2, -3)$.

En los ejercicios 26 al 65, determine los puntos críticos de la función dada, y use el criterio de la primera derivada para decidir si en estos puntos la función tiene o no extremos locales.

26. $f(x) = (x - 1)^3$. **27.** $f(x) = x^2 + 6x + 7$.

28. $f(x) = -2x^2 + 8x + 1$. **29.** $f(x) = x(2x^2 - 9x + 12)$.

30. $f(x) = x(2x^2 - 3x - 12)$. **31.** $f(x) = 2x^2(x + 3)$.

32. $f(x) = x^2(2x - 9)$. **33.** $f(x) = 2x(x^2 + 3x - 9)$.

34. $f(x) = x(4x^2 - 39x + 90)$. **35.** $f(x) = 3x^3(x - 4)$.

36. $f(x) = 3(x - 2)(x + 2)^3$. **37.** $f(x) = (x + 3)^3(3x - 11)$.

38. $f(x) = 3(x + 2)^3(2x^2 - 7x + 8)$. **39.** $f(x) = 2(x + 1)^3(3x^2 - 21x + 53)$.

40. $f(x) = 3(x - 1)^3(2x^2 - 19x + 47)$. **41.** $f(x) = 2(x + 2)^4(2x - 11)$.

42. $f(x) = 2(x + 1)^4(2x - 3)$. **43.** $f(x) = \frac{1}{30}(x + 2)^4(5x^2 - 52x + 146)$.

44. $f(x) = \frac{1}{768}(2x - 1)^4(8x^2 - 56x + 101)$. **45.** $f(x) = 3x^4 - 24x^3 + 66x^2 - 72x$.

46. $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + 3$. **47.** $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 72x - 1$.

48. $f(x) = 3x^4 - 12x^3 + 12x^2 + 2.$

49. $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 8x + 1.$

50. $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{8}{3}x^3.$

51. $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}.$

52. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 3x + 4}.$

53. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 9}.$

54. $f(x) = \ln(x^2 + x + 3).$

55. $f(x) = \ln(x^2 + 4x + 17).$

56. $f(x) = -2x + \ln(x + 3).$

57. $f(x) = x + \ln(x + 2).$

58. $f(x) = -2x + \arctan x.$

59. $f(x) = -x + \arctan x.$

60. $f(x) = -\frac{1}{2}x + \arctan x.$

61. $f(x) = -\frac{1}{4}x + \arctan x.$

62. $f(x) = 3xe^x + 2.$

63. $f(x) = (x^2 - 6x + 9)e^x.$

64. $f(x) = (x^2 - 2x - 2)e^x.$

65. $f(x) = \frac{1}{16}e^{2x}(4x^3 - 26x^2 + 54x - 39).$

66. Sea $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función derivable con un punto crítico en x_0. Demuestre que la función $\varphi(x) = e^{f(x)}$ tiene también un punto crítico en x_0.

67. Sea $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función derivable con un punto crítico en x_0. Demuestre que la función $\varphi(x) = f^2(x)$ tiene también un punto crítico en x_0.

68. Sea $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función derivable con puntos críticos en $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$. Demuestre que la función $\varphi(x) = f(x^2)$ tiene también puntos críticos en x_0 y x_1. ¿Es esto también cierto si $x \neq 0, 1$?

69. Sean $f, g : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dos funciones derivables que tienen un punto crítico en $x = x_0 \in I$. Demuestre que la función $\varphi(x) = f(x) + g(x)$ tiene un punto crítico en x_0.

70. Sean $f, g : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dos funciones derivables que tienen un punto crítico en $x = x_0 \in I$. Demuestre que la función $\varphi(x) = f(x)g(x)$ tiene un punto crítico en x_0.

71. Sean $f, g : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dos funciones derivables que tienen un punto crítico en $x = x_0 \in I$ y que $g(x_0) \neq 0$. Demuestre que la función $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ tiene un punto crítico en x_0.

72. Sean $f, g : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dos funciones derivables que tienen un máximo local en $x = x_0 \in I$. Demuestre que la función $\varphi(x) = f(x) + g(x)$ tiene un máximo local en x_0.

73. Demuestre que la afirmación del ejercicio anterior es verdadera si cambiamos la palabra máximo por la palabra mínimo.

74. Dé un ejemplo de dos funciones $f, g : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivables, con mínimo local en $x = x_0 \in I$, tales que la función $\varphi(x) = f(x)g(x)$ tenga un máximo local en x_0.

8.4 PROBLEMAS DE APLICACIONES

En esta sección vamos a estudiar algunos problemas prácticos cuya solución va a requerir la determinación de los extremos de alguna función. Aunque cada problema particular tiene sus propias complicaciones, algunas ideas que debemos tener siempre en mente al momento de resolverlo son:

- En cada problema se pide encontrar un "algo" (por ejemplo una longitud, un tiempo, etcétera, llamémosle x) para que otro "algo" (por ejemplo la cantidad de material, la distancia, etcétera, llamémosle y) sea máximo o mínimo. Se deben identificar primeramente estos dos "algos", y establecer una función del tipo $y = f(x)$, que establece la relación o dependencia de x con y. Con esta función es con la que se trabajará en el problema.
- En ocasiones las condiciones físicas del problema imponen restricciones al dominio de la función determinada en el paso anterior. En ocasiones resulta útil conocer el intervalo I de las equis con las que se va a trabajar.
- Se localizan los puntos críticos de la función que estén en el intervalo I identificado en el paso anterior.
- Muchas veces las condiciones físicas del problema permiten decidir *a priori* si el resultado del punto o de los puntos críticos considerados es un máximo o un mínimo, y si éste da la respuesta requerida en el problema. Si no se está seguro de ello, se aplica el criterio de la primera derivada visto en la sección anterior para decidir si en el punto crítico en consideración hay un extremo local.

Presentamos a continuación algunos ejemplos representativos.

EJEMPLO 8.4.1. Al lado de un gran muro de una granja, se quiere cercar un terreno que tenga forma rectangular. Se dispone solamente de 100 metros de malla de alambre para construir la cerca (la cual tendrá tres lados; de tal manera el cuarto lado del rectángulo será el muro). ¿Qué dimensiones debe tener el terreno cercado para que éste encierre la mayor área posible?

SOLUCIÓN. Observe que con 100 metros de malla podemos construir muchos terrenos rectangulares sobre el muro de la granja. Cada uno de ellos encerrará un área determinada de terreno. Por ejemplo los mostrados en la figura 8.4.1.

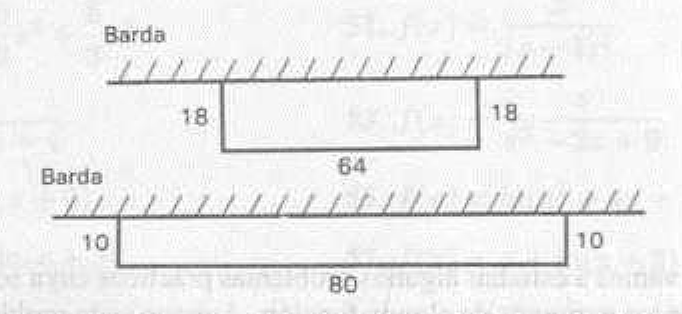


Figura 8.4.1. Terrenos rectangulares cercados con una malla de 100 metros.

El problema nos pregunta por las dimensiones del rectángulo que encierre la mayor área. Llamemos A al área encerrada por la cerca, y llamemos x y y a las dimensiones del rectángulo cercado. Ciertamente A es función tanto de x como de y. De hecho $A = xy$. Pero hay una restricción que el problema impone: solamente se tienen 100 metros de malla de alambre. Esto significa que $2x + y = 100$. Podemos entonces despejar de esta última expresión la y para obtener $y = 100 - 2x$. Así pues, la función que da el área A en términos de la dimensión x del rectángulo es $A = f(x) = x(100 - 2x)$. De esta función queremos saber cuál es el valor de x para que $A = f(x)$ sea máxima. Si tenemos determinada esta x, la otra dimensión y queda determinada como $y = 100 - 2x$. Las restricciones del dominio de nuestra función $A = x(100 - 2x)$ están dadas por $x \geq 0$ (no puede haber dimensiones de rectángulos negativas) y $x \leq 100$ (no podemos usar en la dimensión x del rectángulo más de los 100 metros de malla de alambre de que se dispone). Así entonces, lo que buscamos es el máximo absoluto de la función $A = x(100 - 2x)$ en el intervalo $[0, 100]$. La derivada de esta función es $A'(x) = 100 - 4x$, de modo que $A'(x) = 0$ para $x = \frac{100}{4} = 25$. Hay un único punto crítico y por las condiciones del problema podemos estar seguros de que se trata de un máximo. De hecho $A(0) = A(100) = 0$ y $A(25) = 25(100 - 50) = 1250$. La dimensión y del rectángulo es $y = 100 - 2x = 100 - 2(25) = 50$. Concluimos entonces que el área rectangular máxima que se puede cercar con la malla de 100 metros es de 1250 metros cuadrados, con un rectángulo de 25 por 50 metros.

★

EJEMPLO 8.4.2. En la ribera de un ancho río, en el que está anclado un bote, se encuentra un campamento. La distancia más corta entre el bote B y el punto P más cercano a la ribera es de 150 metros, y la distancia de este punto a donde se encuentra el campamento C es de 260 metros. Una persona debe ir del bote al campamento. Puede remar en una balsa, a una velocidad de 4 km/h, y luego caminar a una velocidad de 6 km/h. Se trata de calcular el punto sobre la ribera donde esta persona debe desembarcar, para de ahí caminar a C, de tal modo que emplee el menor tiempo posible en llegar del bote al campamento.

SOLUCIÓN. Llamemos x a la distancia, medida a partir de P, en donde la persona debe bajar de la balsa para de ahí caminar hacia C. La situación se presenta esquemáticamente como:

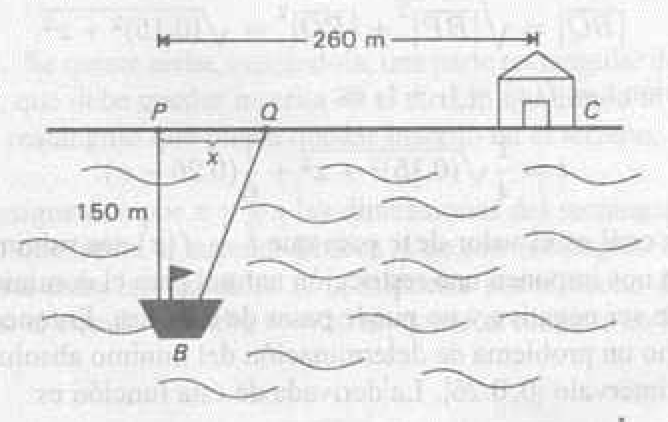


Figura 8.4.2. Esquema del ejemplo 8.4.2.

Puesto que la distancia más corta de B a C es la línea recta, podríamos pensar que el menor tiempo para realizar este recorrido se puede lograr yendo directamente de B a C (remando, por supuesto). Sin embargo, observe que la velocidad a la que la persona rema es menor que la velocidad con la que camina, de modo que, en el otro extremo, podríamos pensar en que la persona reme hasta el punto P más próximo a la ribera (que reme lo menos posible), y de ahí camine hasta C. El problema en esta otra situación extrema es que la persona haría un recorrido demasiado largo, y quizás eso le consuma más tiempo del necesario. Habrá que buscar una combinación (de eso trata el problema) para que la persona reme hasta un punto Q sobre la ribera, a una distancia x de P, y de ahí camine hasta C. Lo que buscamos que sea mínimo en este problema es el tiempo t que le toma a la persona para ir desde B hasta C. Este tiempo es función de x: el tiempo que le tome en llegar hasta C depende de en dónde baje de la balsa. Así que esta función $t = f(x)$ es la que entrará en juego en el problema. El tiempo t lo podemos ver como una suma de dos tiempos: t_1 =tiempo que tarda (remando) en ir de B a Q, y t_2 =tiempo que tarda (caminando) en ir de Q a P. Al usar la conocida fórmula de velocidad (v) igual a distancia recorrida (d) entre tiempo en recorrerla (en su versión de tiempo = distancia/velocidad), tenemos que:

$$t_1 = \frac{\text{distancia de } B \text{ a } Q}{\text{velocidad a la que rema}} = \frac{|\overline{BQ}| \text{ km}}{4 \text{ km/h}} = \frac{1}{4}|\overline{BQ}| \text{ h.}$$

De igual manera:

$$t_1 = \frac{\text{distancia de } Q \text{ a } C}{\text{velocidad a la que camina}} = \frac{|\overline{QC}| \text{ km}}{6 \text{ km/h}} = \frac{1}{6}|\overline{QC}| \text{ h.}$$

La distancia $|\overline{QC}|$ es igual a la distancia $|\overline{PC}| = 260$ m= 0.26 km menos la distancia $|\overline{PQ}| = x$. Es decir, $|\overline{QC}| = 0.26 - x$. Por otra parte, en el triángulo rectángulo BPQ, conocemos la longitud de dos de sus catetos, a saber, $|\overline{BP}| = 150$ m= 0.15 km, y $|\overline{PQ}| = x$,

de modo que, por el teorema de Pitágoras, podemos conocer la longitud de la hipotenusa $|\overline{BQ}|$, como:

$$|\overline{BQ}| = \sqrt{|\overline{BP}|^2 + |\overline{PQ}|^2} = \sqrt{(0.15)^2 + x^2}.$$

Entonces la función $t = f(x) = t_1 + t_2$ es:

$$t = \frac{1}{4}\sqrt{(0.15)^2 + x^2} + \frac{1}{6}(0.26 - x).$$

Se trata de saber cuál es el valor de x para que $t = f(x)$ sea mínima. Las condiciones físicas del problema nos imponen una restricción natural para el dominio de esta función: la distancia x no puede ser negativa y no puede pasar de 0.26 km. Entonces nuestro problema lo podemos ver como un problema de determinación del mínimo absoluto de la función $t = f(x)$ anterior, en el intervalo $[0, 0.26]$. La derivada de esta función es:

$$t' = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2\sqrt{(0.15)^2 + x^2}}\right)(2x) + \frac{1}{6}(-1) = \frac{x}{4\sqrt{(0.15)^2 + x^2}} - \frac{1}{6}.$$

Debemos ver en dónde ocurre que esta derivada es igual a cero. Es decir, debemos resolver la ecuación:

$$\frac{x}{4\sqrt{(0.15)^2 + x^2}} - \frac{1}{6} = 0.$$

Luego de hacer algunas cuentas para despejar la x nos queda:

$$\frac{x}{4\sqrt{(0.15)^2 + x^2}} - \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow \frac{x}{4\sqrt{(0.15)^2 + x^2}} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{(0.15)^2 + x^2}} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 3x = 2\sqrt{(0.15)^2 + x^2} \Rightarrow 9x^2 = 4\left((0.15)^2 + x^2\right) \Rightarrow 5x^2 = 4(0.15)^2$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{4(0.15)^2}{5} \Rightarrow x = \frac{2(0.15)}{\sqrt{5}} \approx 0.134 \text{ km}.$$

(Hemos desechado el valor negativo de x por las restricciones del dominio que habíamos comentado anteriormente para la función $t = f(x)$). Por el contexto físico del problema, es natural que sospechemos que este valor de x produce un mínimo para la función $t = f(x)$ en el intervalo $[0, 0.26]$. Sin embargo, lo podemos corroborar haciendo la evaluación de $f(x)$ en los extremos del intervalo y en el punto crítico que determinamos:

$f(0) = \frac{1}{4}\sqrt{(0.15)^2 + 0^2} + \frac{1}{6}(0.26 - 0) \approx 0.0808$ h.
$f(0.26) = \frac{1}{4}\sqrt{(0.15)^2 + (0.26)^2} + \frac{1}{6}(0.26 - 0.26) \approx 0.075$ h.
$f(0.134) = \frac{1}{4}\sqrt{(0.15)^2 + (0.134)^2} + \frac{1}{6}(0.26 - 0.134) \approx 0.0713$ h.

Se tiene entonces que, si desembarca a 0.134 km del punto más cercano del bote a la orilla del río y de ahí camina al campamento, se ocupa el menor tiempo en llegar del bote al campamento, es decir, 0.0713 h.

★

EJEMPLO 8.4.3. Se quiere aislar, cercándola, una parte rectangular de un terreno circular con radio $r = 20$ m, que debe quedar inscrita en el círculo que limita al terreno. Determine las dimensiones del rectángulo que puede quedar inscrito en el terreno, que tenga la mayor área posible.

SOLUCIÓN. Designemos por x y y a las dimensiones del rectángulo que debe quedar inscrito en el círculo que limita el terreno. El área A de este rectángulo es $A = xy$. Se tiene una restricción natural entre las variables x, y, impuesta por el hecho de que el rectángulo debe estar inscrito en el círculo de radio $r = 20$ m, como se muestra en la figura 8.4.3.

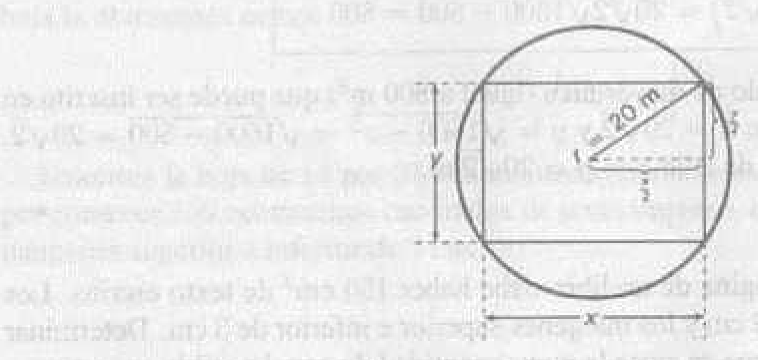


Figura 8.4.3. El rectángulo inscrito en el círculo de radio $r = 20$ m.

Por el teorema de Pitágoras, se debe cumplir que $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = (20)^2$, de donde podemos dejar expresada la variable y en términos de x como:

$$y = \sqrt{1600 - x^2}$$

entonces, al ser la función que nos da el área A del rectángulo en términos de la dimensión x de este último (la dimensión y queda automáticamente determinada por la expresión anterior), la función dada por:

$$A = f(x) = xy = x\sqrt{1600 - x^2}.$$

Ésta es la función de la que nos preguntamos por el valor de x que haga que A sea máxima. Las restricciones físicas del problema nos indican que la x debe encontrarse en el intervalo $[0, 40]$. El problema trata entonces de determinar el máximo absoluto de la función $A = f(x)$ en el intervalo $[0, 40]$. La derivada de esta función es:

$$A' = x\left(\frac{1}{2\sqrt{1600 - x^2}}(-2x)\right) + \sqrt{1600 - x^2} = -\frac{x^2}{\sqrt{1600 - x^2}} + \sqrt{1600 - x^2},$$

de tal modo que los puntos críticos los obtenemos de resolver $f'(x) = 0$, o sea:

$$-\frac{x^2}{\sqrt{1600-x^2}}+\sqrt{1600-x^2}=0 \Rightarrow \frac{x^2}{\sqrt{1600-x^2}}=\sqrt{1600-x^2}$$

$$\Rightarrow x^2=1600-x^2 \Rightarrow x^2=800 \Rightarrow x=20\sqrt{2}.$$

(No hemos tomado en cuenta la raíz negativa de x porque no se encuentra en el intervalo $[0,40]$ que estamos considerando.) Por el contexto físico del problema podríamos asegurar que este punto crítico corresponde a un máximo absoluto de la función $A=f(x)$ en el intervalo $[0,40]$, lo cual se puede corroborar con unos cálculos sencillos:

$f(0)=f(40)=0$
$f\left(20\sqrt{2}\right)=20\sqrt{2}\sqrt{1600-800}=800$

Las dimensiones del rectángulo de mayor área (igual a 800 m^2) que puede ser inscrito en el círculo de radio $r=20$ m, son $x=20\sqrt{2}$ y $y=\sqrt{1600-x^2}=\sqrt{1600-800}=20\sqrt{2}$. Es decir, se trata de un cuadrado de lado $x=y=20\sqrt{2}$ m.

★

EJEMPLO 8.4.4. En una página de un libro debe haber 150 cm^2 de texto escrito. Los márgenes laterales deben ser de 2 cm y los márgenes superior e inferior de 3 cm. Determinar las dimensiones de la hoja para que se gaste la menor cantidad de papel posible.

SOLUCIÓN. Llamemos x y y a las dimensiones de la hoja. El área de esta hoja será $A=xy$. Puesto que el texto escrito debe ocupar un área de 150 cm^2, atendiendo a los márgenes establecidos en el ejercicio, se debe tener que: $(x-4)(y-6)=150$, de donde podemos dejar determinada la variable y en términos de x como:

$$y=6+\frac{150}{x-4}.$$

Entonces el área A de la hoja es la función de x dada por:

$$A=f(x)=x\left(6+\frac{150}{x-4}\right).$$

De esta función buscamos el mínimo absoluto para $x>4$ (piense qué pasaría si $x\leq 4$). Observe que no hay una cota superior para los posibles valores de x: podríamos tener una hoja tan larga como queramos (con un ancho más pequeño, mientras el largo sea mayor). La derivada de la función $A=f(x)$ es:

$$f'(x)=x\left(-\frac{150}{(x-4)^2}\right)+\left(6+\frac{150}{x-4}\right)=\frac{-150x+6(x-4)^2+150(x-4)}{(x-4)^2}$$

$$=\frac{6(x^2-8x-84)}{(x-4)^2},$$

de modo que los puntos críticos se obtienen de resolver $x^2 - 8x - 84 = 0$, cuyas raíces son:

$$x_{1,2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(-84)}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{400}}{2} = \frac{8 \pm 20}{2} = \begin{cases} 14 \\ -6. \end{cases}$$

De las raíces obtenidas, conservamos solamente $x = 14$ que está en el intervalo $(4, \infty)$. El contexto físico del problema nos indica que este punto crítico debe ser un mínimo para la función $f(x)$, lo cual podemos verificar con el criterio de la primera derivada: para $x = 13$ (un punto antes del punto crítico $x = 14$) tenemos $f'(13) < 0$ y para $x = 15$ (un punto después del punto crítico $x = 14$) tenemos $f'(15) > 0$. Así que en el punto crítico $x = 14$ la derivada pasa de menos a más, lo cual indica la presencia de un mínimo local. Como para $x > 14$ ya no vuelve a haber cambios de signo en la derivada (¿por qué?) y $f'(15) > 0$, la función $A = f(x)$ se mantiene creciendo siempre después de $x = 14$. Entonces éste es el valor de x con el que se logra el mínimo de la función $A = f(x)$. La otra dimensión de la hoja la obtenemos como:

$$y = 6 + \frac{150}{x-4} = 6 + \frac{150}{14-4} = 21.$$

Entonces la hoja de 14 por 21 centímetros cuadrados es en la que se gasta menos papel, por contener 150 centímetros cuadrados de texto impreso, con márgenes laterales de 2 cm y márgenes superior e inferior de 3 cm.

★

EJEMPLO 8.4.5. Dos carreteras se cortan perpendicularmente en el punto C. Al tiempo $t = 0$ se encuentra un automóvil en una de las carreteras a una distancia de 5 km del punto C, en donde se encuentra otro automóvil. Entonces el primer automóvil se dirige al punto C a una velocidad constante de 40 km/h y el otro comienza a andar por la otra carretera (parte de C) a una velocidad de 60 km/h. Determinar el momento en el que los dos automóviles se encuentran más cerca el uno del otro.

SOLUCIÓN. La distancia d (la mediremos en kilómetros) entre los dos automóviles es una función del tiempo t (lo mediremos en horas) transcurrido desde que comenzó el movimiento de éstos. Esquemáticamente la situación se ve como:

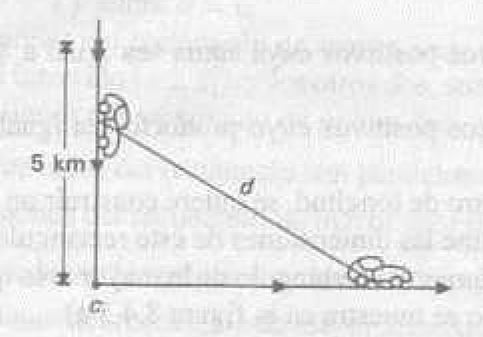


Figura 8.4.4. Los automóviles del ejemplo 8.4.5.

A un tiempo $t > 0$, la distancia que ha recorrido el primer automóvil (el que se dirige a C) es de $\left(40\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)(t\ \text{h}) = 40t$ km, de modo que, puesto que comenzó su movimiento a una distancia de 5 km de C, se encuentra a $5 - 40t$ km del punto C. El otro automóvil (el que se aleja de C) ha recorrido en un tiempo t una distancia de $60t$ km. Esta última es la distancia que se ha alejado de C, puesto que en ese punto comenzó su movimiento. Por el teorema de Pitágoras, la distancia d entre los dos automóviles a un tiempo $t > 0$ es:

$$d = f(t) = \sqrt{(5-40t)^2 + (60t)^2}.$$

Ésta es la función de nuestro problema, de la cual buscamos el valor de $t > 0$ para que $d = f(t)$ sea mínimo. La derivada de esta función es:

$$d' = \frac{1}{2\sqrt{(5-40t)^2 + (60t)^2}}\left[2(5-40t)(-40) + 2(60t)(60)\right] = \frac{200(26t-1)}{\sqrt{(5-40t)^2 + (60t)^2}}.$$

Al resolver la ecuación $d' = 0$, obtenemos $26t - 1 = 0$, o bien $t = \frac{1}{26}$. Éste es el único punto crítico de la función $d = f(t)$ y por el contexto físico del problema resulta natural esperar que se trate de un mínimo. De hecho, observe que para $t > \frac{1}{26}$ la derivada d' se mantiene positiva, de modo que la función $d = f(t)$ se mantiene creciendo. Es decir, la distancia entre los dos automóviles va aumentando con el tiempo, después del instante $t = \frac{1}{26}$ h en el que se encuentran más cerca el uno del otro.

★

EJERCICIOS (8.4)

1. Determine dos números positivos cuya suma sea igual a 10 y cuyo producto sea el mayor posible.

2. Determine dos números positivos cuyo producto sea igual a 10 y cuya suma sea el menor posible.

3. Con una cinta de 1 metro de longitud, se quiere construir un rectángulo que encierre la mayor área posible. Determine las dimensiones de este rectángulo.

4. Determine las dimensiones del rectángulo de la mayor área que puede inscribirse en un semicírculo de radio 1, como se muestra en la figura 8.4.5 a).

5. Determine las dimensiones del rectángulo de la mayor área que puede inscribirse en un círculo de radio 1, como se muestra en la figura 8.4.5 b).

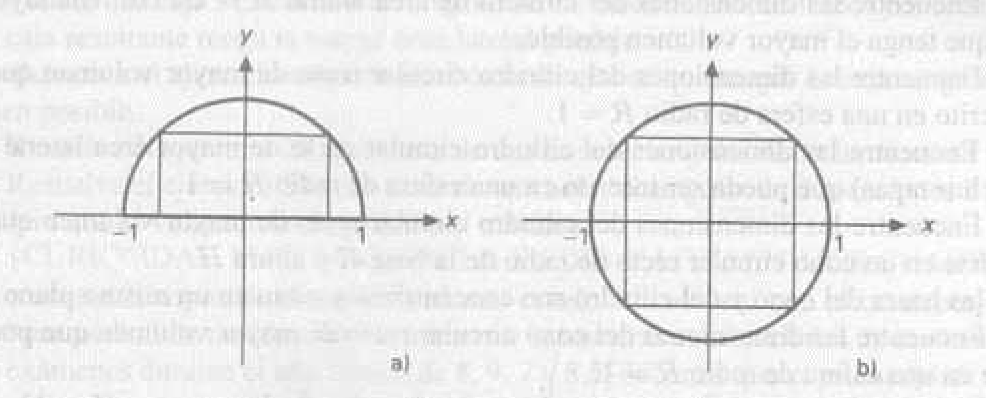


Figura 8.4.5. Los rectángulos de los ejercicios 4 y 5.

6. Determine las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un triángulo rectángulo de catetos 3 y 4, como se muestra en la figura 8.4.6 a).

7. Determine las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un triángulo rectángulo de catetos 3 y 4, como se muestra en la figura 8.4.6 b).

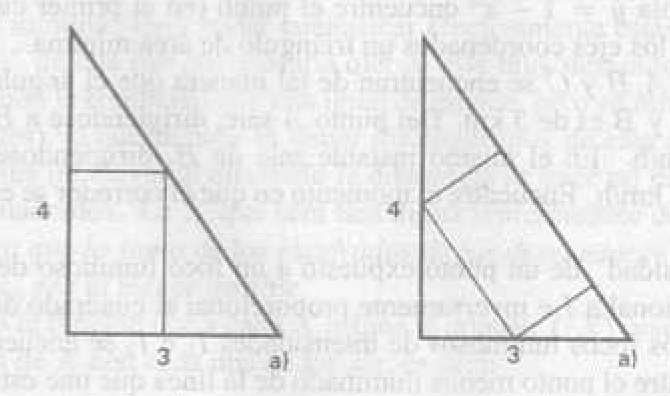


Figura 8.4.6. Los rectángulos de los ejercicios 6 y 7.

8. Determine las dimensiones del rectángulo de la mayor área que puede inscribirse en un triángulo isósceles de base $b = 4$ y altura $h = 6$.

9. Determine las dimensiones del rectángulo de mayor área; dos de sus vértices se encuentran sobre el eje x (en el intervalo $[-2, 2]$), y los otros dos, sobre la parábola $y = 4 - x^2$.

10. Determine las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en la semielipse $y = \dfrac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$ (los lados del rectángulo son paralelos a los ejes coordenados).

11. Determine las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en la elipse $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ (los lados del rectángulo son paralelos a los ejes coordenados).

12. Encuentre las dimensiones del rectángulo de mayor área cuya diagonal sea$d = 10$ cm.

13. Encuentre las dimensiones del cilindro de volumen $V = 50\text{ cm}^3$ que tenga la menor área lateral posible (incluyendo las tapas).

14. Encuentre las dimensiones del cilindro de área lateral $A = 50$ cm^2 (incluyendo las tapas) que tenga el mayor volumen posible.

15. Encuentre las dimensiones del cilindro circular recto de mayor volumen que pueda ser inscrito en una esfera de radio $R = 1$.

16. Encuentre las dimensiones del cilindro circular recto de mayor área lateral posible (sin incluir tapas) que pueda ser inscrito en una esfera de radio $R = 1$.

17. Encuentre las dimensiones del cilindro circular recto de mayor volumen que pueda inscribirse en un cono circular recto de radio de la base R y altura H.
(Nota: las bases del cono y del cilindro son concéntricas y están en un mismo plano.)

18. Encuentre las dimensiones del cono circular recto de mayor volumen que puede inscribirse en una esfera de radio $R = 1$.

19. En la parábola $y = x^2$ encuentre el punto más cercano al punto $p = (5, -1)$.
(Sugerencia: la función por minimizar es la distancia del punto (x, x^2) que se encuentra en la parábola $y = x^2$ con el punto $p = (5, -1)$, es decir $f(x) = \sqrt{(x-5)^2 + (x^2+1)^2}$.)

20. En la semielipse $y = \sqrt{1 - 4x^2}$ encuentre los puntos más cercano y más lejano a $(1, 0)$.

21. En la recta $x + y + 1 = 0$ encuentre el punto más cercano al $(3, 4)$.

22. En la semiparábola $y = \sqrt{4 - x}$ encuentre el punto tal que la recta tangente trazada por él forme un triángulo de área mínima con los ejes coordenados.

23. En la parábola $y = 1 - x^2$ encuentre el punto (en el primer cuadrante) cuya recta tangente forme con los ejes coordenados un triángulo de área mínima.

24. Tres puntos A, B y C se encuentran de tal manera que el ángulo ABC es de 60° y la distancia entre A y B es de 3 km. Del punto A sale, dirigiéndose a B, un corredor a una velocidad de 18 km/h. En el mismo instante sale de B, dirigiéndose a C, un ciclista a una velocidad de 27 km/h. Encuentre el momento en que el corredor se encuentra más próximo del ciclista.

25. La "luminosidad" de un punto expuesto a un foco luminoso de intensidad I es directamente proporcional a I e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que lo separa del foco. Dos focos luminosos de intensidades I_1 e I_2 se encuentran separados una distancia d. Encuentre el punto menos iluminado de la línea que une estos dos focos.

26. Se va a colocar un foco luminoso directamente encima del centro de una mesa redonda de radio r. Determine la altura a la que debe colocarse el foco para que la iluminación en el borde de la mesa sea la mejor posible, si se sabe que la iluminación de un punto sobre la mesa es directamente proporcional al coseno del ángulo de incidencia (el medido respecto de la normal) de los rayos luminosos e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa al punto del foco.

27. Dos carreteras se cortan perpendicularmente en el punto C. Al tiempo $t = 0$ se encuentra un automóvil en una de las carreteras a una distancia de d km del punto C, en donde se encuentra otro automóvil. Entonces el primer automóvil comienza a dirigirse al punto C a una velocidad constante de v_1 km/h y el otro comienza a andar por la otra carretera (partiendo de C) a una velocidad de v_2 km/h. Determine el momento en el que los dos automóviles se encuentran más cerca el uno del otro.

28. De una hoja de cartón cuadrada que mide 2 m de lado se van a recortar pequeños cuadrados en las esquinas para, después de doblar las partes salientes de la figura en forma

de cruz, hacer una caja . Encuentre la longitud de los lados de los cuadrados por recortar para que la caja resultante tenga la mayor área lateral posible.

29. Resuelva el ejercicio anterior en el caso de que se quiera que la caja tenga el mayor volumen posible.

30. Resuelva el ejercicio 28 si se parte de una hoja rectangular de dimensiones 1 por 2 m.

31. Resuelva el ejercicio 28 si se parte de una hoja rectangular de dimensiones 2 por 3 m, y se quiere que el volumen de la caja sea el máximo.

32. (CURIOSIDAD MATEMÁTICA: LA MEDIA Y LOS MÍNIMOS CUADRADOS.) Desde nuestros tiempos de secundaria hemos estado en contacto con el concepto de "media" o "promedio" de un conjunto de números: si nuestras calificaciones de matemáticas en cuatro exámenes durante el año fueron de 8, 9, 7 y 8.5, decimos que el promedio de nuestros exámenes de ese curso fue de $\frac{8+9+7+8.5}{4} = 8.125$. Ahora, con la ayuda de lo aprendido en este capítulo, podemos enterarnos de lo que hay detrás del concepto de media.

Cuando se tiene un conjunto de números, digamos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, de los cuales se quiere obtener un representante, que denotaremos con X, lo que se hace en matemáticas es aplicar el llamado "principio de los mínimos cuadrados". Se trata de que el representante X sea lo más "democrático" posible, en el sentido de que se encuentre tan "cerca de su pueblo" (las equis que representa) como sea posible. Es decir, el valor de X deberá ser, según el principio de los mínimos cuadrados, tal que las diferencias que haya con cada una de las equis a las que representa sea mínima. Para poder cuantificar efectivamente estas diferencias, sin que interfiera el "signo" de ella (no nos gustaría que X esté muy desviado de x_1, por ejemplo, aunque esa desviación la compense con una igual de grande, pero en otro sentido, con alguna de las equis restantes), lo que se hace es tomar *los cuadrados* de esas diferencias de X con cada una de las equis (al elevar al cuadrado la diferencia se hace no negativa) y considerar la suma de estos cuadrados. La X que será una digna representante de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ será aquella X *que haga que la suma de los cuadrados de las desviaciones con cada una de las equis* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *sea la menor posible.*

Si consideramos la función que a cada X asigna la imagen $f(X)$ =suma de los cuadrados de las desviaciones de X con cada una de las $x's$, es decir:

$$f(X) = (X - x_1)^2 + (X - x_2)^2 + \ldots + (X - x_n)^2,$$

la X que queremos escoger como buena representante de las $x's$, es la que haga que $f(X)$ sea mínima. Éste es un típico problema de los que estudiamos en este capítulo: encontramos el o los valores de X que hagan que $f'(X) = 0$. Como:

$$f'(X) = 2(X - x_1) + 2(X - x_2) + \ldots + 2(X - x_n),$$

la ecuación $f'(X) = 0$ se convierte en:

$$(X - x_1) + (X - x_2) + \ldots + (X - x_n) = 0.$$

Observe que en esta expresión hay n $X's$ que se están sumando. Entonces escribimos:

$$nX = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

de donde la X, punto crítico de $f(X)$, es:

$$X = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Es decir, la digna representante (en el sentido de los mínimos cuadrados) de los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es ni más ni menos que nuestra vieja conocida media aritmética de este conjunto de números. Compruebe que esta X (la media) es efectivamente un *mínimo* para la función $f(X)$.

33. (LEY DE SNELL.) Considere los puntos A en el primer cuadrante y B en el cuarto cuadrante. Suponga que el eje x es la línea de separación de dos medios con propiedades mecánicas distintas, digamos el medio I en el primer cuadrante y el medio II en el cuarto cuadrante. Del punto A sale un rayo hacia un punto M sobre el eje x y de este punto sale el rayo hacia B. La velocidad de propagación del rayo en el medio I es de v_1 y en el medio II es de v_2. Demuestre que el tiempo total de recorrido del rayo del punto A al B es mínimo si se cumple la relación

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{v_1}{v_2}$$

(conocida como Ley de Snell) en donde α y β son los ángulos que forman los segmentos $\overline{AM}$ y $\overline{MB}$ con la vertical que pasa por M, llamados *ángulo de incidencia y ángulo de refracción* del rayo, respectivamente.

En los ejercicios 34 al 43 se dan funciones $f(x)$ que tienen un único punto crítico. Se pide determinar este punto así como su naturaleza (en todos los casos es un extremo local). Para calcular la abscisa de tal punto habrá que echar mano del método de Newton-Raphson estudiado en el capítulo anterior (al resolver la ecuación $f'(x) = 0$, la cual, como dijimos, tiene una única raíz real).

34. $f(x) = 5x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 28x + 1$.

35. $f(x) = x(10x^3 - 3x^2 - 54x - 900)$.

36. $f(x) = x^6 - 3x^5 + 6x^4 - 17x^3 + 9x^2 - 40x + 3$.

37. $f(x) = x^6 - 3x^5 + 8x^4 - 21x^3 + 18x^2 - 76x$.

38. $f(x) = \ln\sqrt{x^2+4} - \arctan\frac{x}{2} - \dfrac{2323x + 4000}{2500(x^2+4)}$.

39. $f(x) = \arctan(x+1) + \ln(x^2 + 2x + 2) + \dfrac{1}{2}x^2 - 2x$.

40. $f(x) = 2x\ln^3 x - 7x\ln^2 x + 8x\ln x - 17x$.

41. $f(x) = 2e^{3x} - e^{2x} - 60e^x - 176x$.

42. $f(x) = 7e^x\cos^2 x + 14e^x \operatorname{sen} x\cos x + 19e^x - 57\operatorname{sen} x\cos x - 72x$.

43. $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 4x)e^{2x} - (x^3 - x^2 + x + 3)e^{-2x} + x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 5x.$

En los ejercicios 44 al 48 determine el punto de la gráfica de la función $f(x)$ dada que se encuentre más próximo al punto P indicado.

44. $f(x) = \arctan x$, $P = (3, 2)$.

45. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $P = (1, 2)$.

46. $f(x) = x \arctan x$, $P = (2, 1)$.

47. $f(x) = e^{-x^2}$, $P = (2, 2)$.

48. $f(x) = \tanh x$, $P = (1, 1)$.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 8

EXAMEN TIPO (A)

1. Determine los extremos absolutos de la función $f(x) = x^3 + 4x + 1$ en el intervalo $[0, 2]$.

2. Determine los extremos absolutos de la función $f(x) = x^3 - 3x + 2$ en el intervalo $[-2, 2]$.

3. Verifique que la función $f(x) = \dfrac{3 - x}{2 - x}$ es creciente en todo su dominio.

4. Verifique que la función $f(x) = 2 - \operatorname{senh} x$ es decreciente en todo su dominio.

5. Determine los intervalos de monotonía de la función $f(x) = \dfrac{3}{2 + x^2}$.

6. Determine los intervalos de monotonía de la función

$$f(x) = e^x(x^2 - 2x + 2) + e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + x.$$

7. Encuentre los extremos locales de la función $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$.

8. Encuentre los extremos locales de la función $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$.

9. Un alambre de 2 metros de longitud se va a cortar en dos partes, una de las cuales será usada para hacer un círculo y la otra para hacer un cuadrado. Determine la manera como ha de cortarse el alambre para que la suma de las áreas de las figuras obtenidas sea la menor posible.

10. De un tronco cilíndrico cuya sección transversal tiene un radio que mide 20 cm, se va a cortar una viga. Se sabe que la resistencia R de una viga rectangular es del tipo $R = kab^2$, en donde k es una constante de proporcionalidad, a es la base del rectángulo (de su sección transversal), y b es su altura. Determine las dimensiones de la sección transversal de la viga para que ésta tenga una resistencia máxima.

EXAMEN TIPO (B)

1. Determine los extremos absolutos de la función $f(x) = x^2(x^2 - 2)$ en el intervalo $[-2, 2]$.

2. Dé un ejemplo de una función discontinua en $(-2, 2)$ que tenga un máximo y un mínimo absolutos en puntos críticos del intervalo $(-2, 2)$.

3. Verifique que la función $f(x) = \arctan(x+1) + \dfrac{1}{2(x^2+2x+2)}$ es creciente en todo su dominio.

4. Verifique que la función $f(x) = \frac{1}{2}\arctan^2 x - 3\arctan x$ es decreciente en todo su dominio.

5. Determine los intervalos de monotonía de la función $f(x) = x\ln^2 x - 3x\ln x + 3x$.

6. Determine los intervalos de monotonía de la función $f(x) = \dfrac{x+2}{(x-1)(x-4)}$.

7. Encuentre los extremos locales de la función $f(x) = 2x(x^3 - 8x^2 + 22x - 24)$.

8. Encuentre los extremos locales de la función $f(x) = -(x^3 - 3x^2 + 5x - 1)e^{-x}$.

9. Un alambre de 2 metros de longitud se va a cortar en dos partes, una de las cuales será usada para hacer un triángulo equilátero y la otra para hacer un cuadrado. Determine la manera como ha de cortarse el alambre para que la suma de las áreas de las figuras obtenidas sea la menor posible.

10. Encuentre las dimensiones del cono circular recto de menor volumen que pueda circunscribirse a una esfera de radio $R = 1$.

NOTA HISTÓRICA: LOS BERNOULLI Y LA BRAQUISTÓCRONA.

Relacionados con la idea de "minimizar", existe una gran variedad de problemas que han hecho historia dentro de la Matemática. Quizás uno de los más famosos e importantes problemas de este tipo es el "problema de la braquistócrona": famoso porque sorprendió a toda la comunidad matemática del siglo XVII por sus diversos planteamientos y su solución, e importante porque las ideas que se suscitaron al atacar este problema dieron origen a una nueva rama de la Matemática conocida ahora como "Cálculo de Variaciones". Los antecedentes de este problema se encuentran en el siglo XVI con Galileo, quien se planteó calcular el tiempo que le toma a un cuerpo en caer (suponiendo que no hay fricción) de un punto A a un punto B como se muestra en la figura 1, cuando éste se desliza por dos trayectorias distintas, a saber, por una línea recta y por un arco de circunferencia.



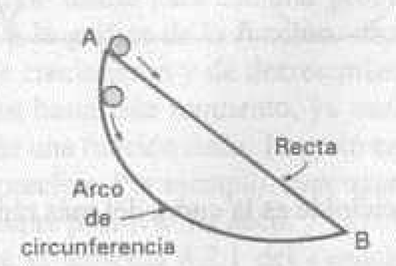


Figura 1. ¿Por dónde cae más rápido un cuerpo de A a B, por la recta, o por la circunferencia?

Galileo mismo resolvió este problema y demostró que el cuerpo caería más rápido yendo por la circunferencia. Años después, en 1696, Johann Bernoulli hace un planteamiento mucho más general de este problema: suponiendo dados los puntos A y B, se trata de describir la trayectoria que debe seguir un cuerpo que cae de A a B, de tal modo que le tome el menor tiempo posible. Surge así el problema de la braquistócrona, nombre formado por las raíces griegas *brachistos* = 'el menor' y *cronos* = 'tiempo'. Un año después se reportaron tres soluciones al problema, con distintas ideas pero con la misma respuesta (una del mismo Johann Bernoulli, otra de su hermano Jakob y otra de Leibniz): la curva sobre la cual se debe deslizar un cuerpo para caer de A a B en el menor tiempo posible es una cicloide. Esta curva, cuyas ecuaciones paramétricas están dadas por $x = t - \operatorname{sen} t$, y $y = 1 - \cos t$ (para cada valor del parámetro $t \in \mathbf{R}$ se obtienen los valores de x y y y se grafican en el plano) era ya una curva famosa, pues había aparecido como solución a otro tipo de problemas. De hecho, poco tiempo antes, Huygens había resuelto el problema de la tautócrona: se trata de determinar la curva tal que si soltamos por ella varios cuerpos en distintas posiciones, todos llegarán a la parte final de la curva al mismo tiempo (las raíces griegas de la palabra tautócrona son *tautos* = 'el mismo', *cronos* = 'tiempo'). La solución a este problema es también la cicloide. En la carta en la que Johann Bernoulli reporta la solución al problema de la braquistócrona, dice:

"... tenemos justa admiración por Huygens, porque él fue el primero en descubrir que un cuerpo sobre una cicloide ordinaria cae en el mismo tiempo, cualquiera que sea la posición de la cual comienza su movimiento. Pero el lector estará gratamente sorprendido cuando diga que exactamente esta cicloide o tautócrona de Huygens es nuestra requerida braquistócrona... ."

La cicloide es la curva que genera el movimiento de un punto dado de una circunferencia, cuando ésta gira sin deslizarse sobre el eje x (por ejemplo, si pone un pequeño foco en el rin de una llanta de bicicleta y se fija en la curva que describe la luz del foco cuando la bicicleta va andando, esta curva es una cicloide).

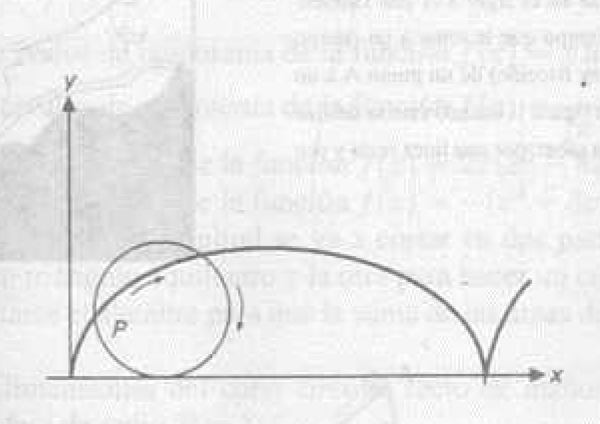


Figura 2. La cicloide es la curva del más rápido descenso.

CAPÍTULO 9
OTRAS APLICACIONES GEOMÉTRICAS

"Será necesario haber olvidado completamente la historia de la ciencia para no recordar que el deseo de entender la naturaleza ha tenido sobre el desarrollo de la Matemática la más feliz y la más importante de las influencias ..."

H. Poincaré

En este capítulo vamos a continuar explotando el contenido geométrico de la derivada de una función. Ya vimos cómo usarla para estudiar propiedades geométricas que tienen que ver con la recta tangente a la gráfica de la función. También hemos visto cómo usarla para estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos locales de la función. Con lo que llevamos hasta este momento, ya casi podemos hacer bosquejos del comportamiento geométrico de una función dada. Hay, sin embargo, algunos detalles más finos que todavía no podemos precisar. Por ejemplo, supongamos que se sabe que la derivada de la función $y = f(x)$ es siempre positiva. Es decir, $f'(x) > 0$ para toda x en el dominio de la función. Lo que nos dice el teorema 8.2.1 del capítulo anterior es que esta función es creciente en todo su dominio y que, por lo tanto, tiene una gráfica que siempre "va para arriba". Pero, en la figura siguiente se muestran dos gráficas de funciones crecientes y, en principio, no sabríamos por cuál de ellas decidirnos para graficar nuestra función.

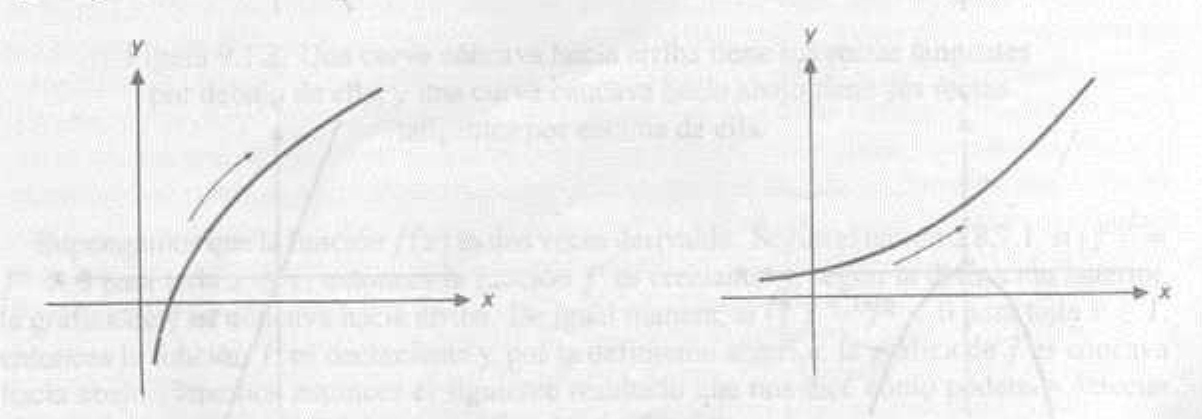


Figura. Gráficas de dos funciones crecientes.

En este capítulo veremos que la segunda derivada nos ayuda a precisar la manera como crece una función con derivada positiva (o bien, la manera como decrece una función con derivada negativa). Esta nueva propiedad tendrá que ver con un concepto que aquí estudiaremos llamado "concavidad de una curva", el cual es abordado adecuadamente usando la derivada de segundo orden de la función (cuya gráfica es la curva en estudio). Hacia el final del capítulo mezclaremos todas las ideas que dejamos sembradas en el capítulo anterior, y las que desarrollaremos en el presente, para hacer algo así como "análisis exhaustivos de funciones", en los cuales pondremos a funcionar toda la maquinaria del contenido geométrico de la primera y segunda derivada de una función para obtener información sobre ella y su gráfica.

9.1 SENTIDO DE CONCAVIDAD DE UNA CURVA

Consideremos la función $f(x) = x^2$. Sabemos que su derivada es la función $\varphi(x) = f'(x) = 2x$, la cual es creciente, pues si $x_1 < x_2$, entonces $f'(x_1) = 2x_1 < 2x_2 = f'(x_2)$. De igual manera, la función $g(x) = -x^2$ tiene como derivada a $\psi(x) = g'(x) = -2x$, la cual es una función decreciente, pues si $x_1 < x_2$, entonces $g'(x_1) = -2x_1 > -2x_2 = g'(x_2)$. Esquemáticamente tenemos:

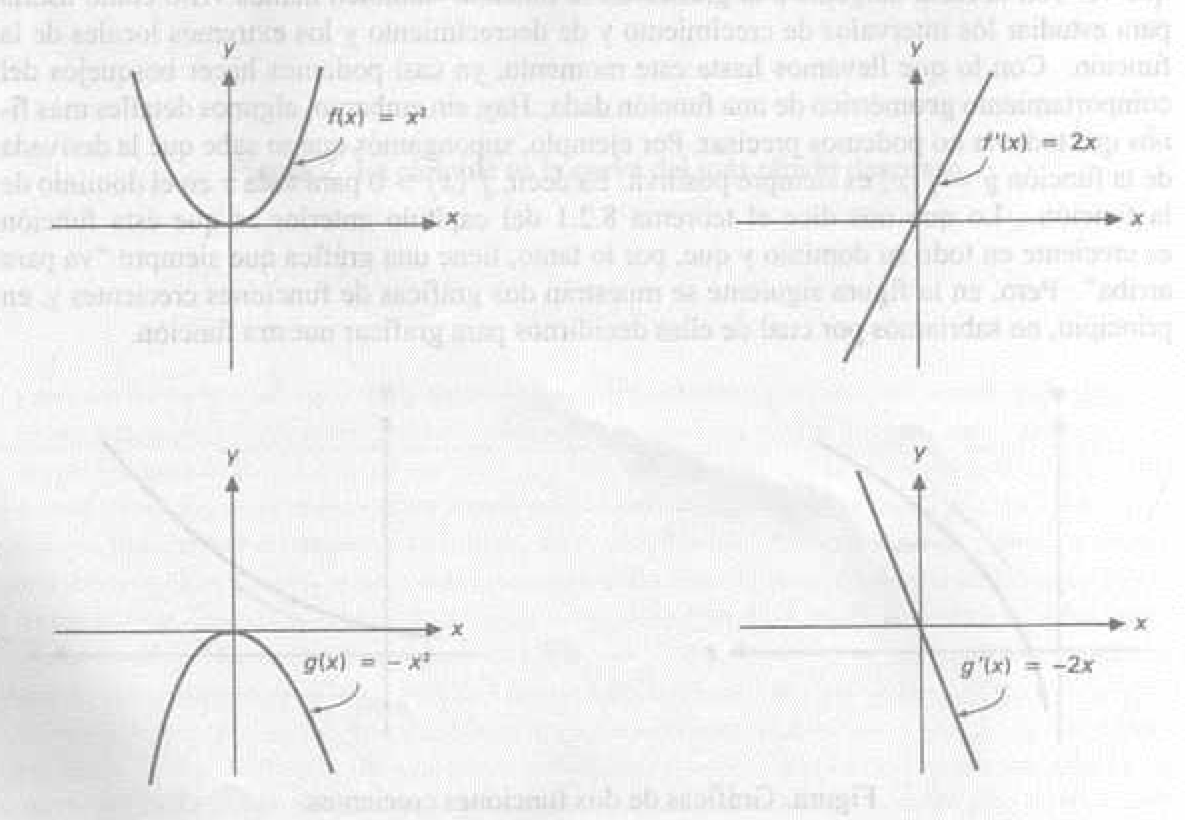


Figura 9.1.1. Las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2$ y sus derivadas.

Las gráficas de las dos funciones anteriores $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2$ son prototipos de una nueva propiedad de la gráfica de una función que queremos estudiar, llamada concavidad . Más concretamente, la parábola que representa la función $f(x) = x^2$ es el prototipo de una gráfica cóncava hacia arriba, y la parábola que representa $g(x) = -x^2$ es el prototipo de una gráfica cóncava hacia abajo. Observe que en la primera de ellas la derivada es una función creciente, y en la segunda, la derivada es una función decreciente.

En el caso general, se tiene la siguiente definición.

Sea $f : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función derivable en el intervalo abierto I de $\mathbf{R}$.

- *Se dice que la gráfica de esta función es cóncava hacia arriba si su derivada $f' : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es una función creciente en I.*
- *Se dice que la gráfica de esta función es cóncava hacia abajo si su derivada $f' : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es una función decreciente en I.*

Una caracterización geométrica de la concavidad de una curva (cuya equivalencia se puede demostrar con la definición anterior) es la siguiente: una curva es cóncava hacia arriba si sus rectas tangentes se encuentran siempre por debajo de la curva, y es cóncava hacia abajo si sus rectas tangentes se encuentran siempre por encima de la curva.

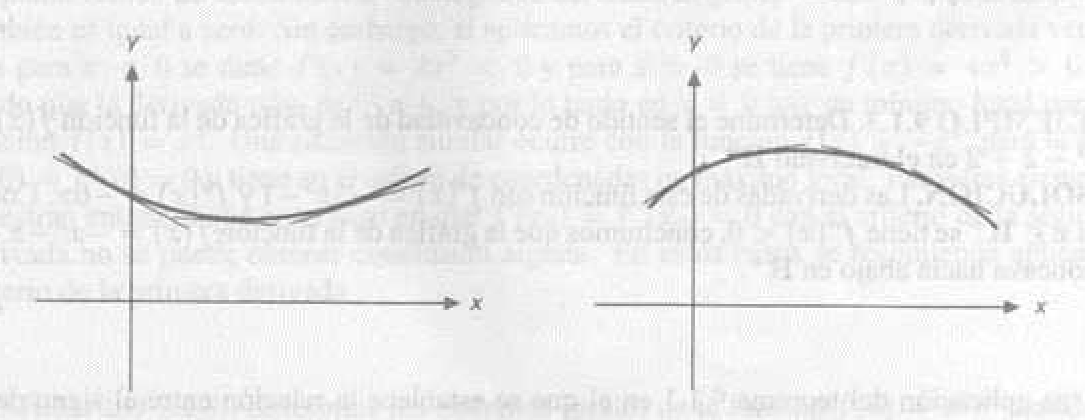


Figura 9.1.2. Una curva cóncava hacia arriba tiene sus rectas tangentes por debajo de ella, y una curva cóncava hacia abajo tiene sus rectas tangentes por encima de ella.

Supongamos que la función $f(x)$ es dos veces derivable. Según el teorema 8.2.1, si $(f')' = f'' > 0$ para toda $x \in I$, entonces la función f' es creciente, y, según la definición anterior, la gráfica de f es cóncava hacia arriba. De igual manera, si $(f')' = f'' < 0$ para toda $x \in I$, entonces la función f' es decreciente y, por la definición anterior, la gráfica de f es cóncava hacia abajo. Tenemos entonces el siguiente resultado que nos dice cómo podemos detectar el sentido de la concavidad de una gráfica de una función.

TEOREMA 9.1.1. *Sea $f : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función dos veces derivable definida en el intervalo abierto I de $\mathbf{R}$.*
1) Si $f''(x) > 0$ para toda $x \in I$, entonces la gráfica de la función es cóncava hacia arriba en I.
2) Si $f''(x) < 0$ para toda $x \in I$, entonces la gráfica de la función es cóncava hacia abajo en I.

EJEMPLO 9.1.1. Determine el sentido de concavidad de la gráfica de la función $f(x) = x^6 + x^4 + 5x^2 + 7$.

SOLUCIÓN. Las derivadas de la función son: $f'(x) = 6x^5 + 4x^3 + 10x$, $f''(x) = 30x^4 + 12x^2 + 10$. Como $f''(x) > 0$ para toda $x \in \mathbf{R}$ (es una suma de dos términos no negativos con un positivo) concluimos que la gráfica de la función dada es cóncava hacia arriba en todo $\mathbf{R}$.

★

EJEMPLO 9.1.2. Determine el sentido de concavidad de la gráfica de la función $f(x) = 1 - \ln x$.

SOLUCIÓN. Las derivadas de esta función son $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$ y $f''(x) = \frac{1}{x^2}$. Como $f''(x) > 0$ para todas las $x > 0$ (del dominio de la función dada), concluimos que la gráfica de la función $f(x) = \ln x$ es cóncava hacia arriba en todo su dominio ($\mathbf{R}^+$).

★

EJEMPLO 9.1.3. Determine el sentido de concavidad de la gráfica de la función $f(x) = -x^3 - x + 2$ en el intervalo $\mathbf{R}^+$.

SOLUCIÓN. Las derivadas de esta función son $f'(x) = -3x^2 - 1$ y $f''(x) = -6x$. Como para $x \in \mathbf{R}^+$ se tiene $f''(x) < 0$, concluimos que la gráfica de la función $f(x) = -x^3 - x + 2$ es cóncava hacia abajo en $\mathbf{R}^+$.

★

Una aplicación del teorema 9.1.1 en el que se establece la relación entre el signo de la segunda derivada de una función y la concavidad de su gráfica, es el llamado "criterio de la segunda derivada para la determinación de extremos locales". Vimos en la sección anterior que si x_0 es un punto crítico de la función $f(x)$, este punto era un candidato a extremo local de la función. Para poder decidir si en ese punto se tenía efectivamente un extremo local, usábamos el criterio de la primera derivada, que consistía en detectar un cambio de signo en la derivada de la función en un vecindad del punto crítico en cuestión. Podemos ahora aprovechar el contenido del teorema 9.1.1. para hacer el siguiente razonamiento: si la derivada de la función $f(x)$ se anula en x_0 y además $f''(x_0) > 0$, entonces el punto x_0 es un punto en donde la recta tangente a la gráfica de la función es horizontal (pues $f'(x_0) = 0$), y además es un punto en donde tal gráfica es cóncava hacia arriba (la recta tangente que es horizontal está por debajo de la gráfica de la función). Debe tratarse entonces de un mínimo local. Similarmente, si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$, la recta tangente a la gráfica de la función es horizontal (pues $f'(x_0) = 0$) y se encuentra por encima de la gráfica (pues $f''(x_0) < 0$).

Debe tenerse entonces en este caso un máximo local de $f(x)$ en x_0. Tenemos así entonces un nuevo criterio para determinar extremos locales de las funciones:

CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA PARA DETERMINAR EXTREMOS LOCALES DE UNA FUNCIÓN.

Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida en el intervalo abierto I de $\mathbb{R}$ tal que en el punto $x_0 \in I$ se tiene $f'(x_0) = 0$. Entonces:
1) si $f''(x_0) > 0$, la función tiene un mínimo local en x_0.
2) si $f''(x_0) < 0$, la función tiene un máximo local en x_0.

Faltaría decir qué pasa si (además de que $f'(x_0) = 0$) se tiene $f''(x_0) = 0$. En este caso el criterio no concluye nada: puede ser que la función tenga extremo local en x_0 o que no lo tenga. Por ejemplo, si $f(x) = x^3$ tenemos que $f'(x) = 3x^2$ de donde se obtiene que $x = 0$ es un punto crítico de la función (la derivada se anula en ese punto). La segunda derivada es $f''(x) = 6x$, de modo que en $x_0 = 0$ se tiene $f''(0) = 0$ (no aplica el criterio de la segunda derivada). Sabemos ya que la función $f(x) = x^3$ no tiene extremo local en $x = 0$. Por otra parte, para la función $f(x) = x^4$, se tiene $f'(x) = 4x^3$, y entonces $x = 0$ es también un punto crítico de esta función. La segunda derivada es $f''(x) = 12x^2$, la cual en $x = 0$ también es igual a cero. Sin embargo, si aplicamos el criterio de la primera derivada vemos que para $x < 0$ se tiene $f'(x) = 4x^3 < 0$ y para $x > 0$ se tiene $f'(x) = 4x^3 > 0$, de modo que la derivada pasa de $-$ a $+$, y por lo tanto en $x = 0$ hay un mínimo local para la función $f(x) = x^4$. Una situación similar ocurre con la función $f(x) = -x^4$, para la cual $f'(0) = f''(0) = 0$ y tiene en el origen de coordenadas un máximo local. Estos tres ejemplos muestran entonces que en el caso en que $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ con el criterio de la segunda derivada no se puede obtener conclusión alguna. En estos casos se recomienda aplicar el criterio de la primera derivada.

EJEMPLO 9.1.4. Determine los extremos locales de la función $f(x) = x^2e^x$ usando el criterio de la segunda derivada. (Ver ejemplo 8.3.2.)

SOLUCIÓN. La derivada de la función es $f'(x) = (x^2 + 2x)e^x$ la cual se anula en $x_0 = 0$ y $x_1 = -2$ (éstos son los puntos críticos). La segunda derivada de la función es $f''(x) = (x^2 + 2x)e^x + e^x(2x + 2) = (x^2 + 4x + 2)e^x$. Evaluando $f''(x)$ en los puntos críticos tenemos $f''(0) = 2 > 0$ y entonces, por el criterio de la segunda derivada la función dada tiene un mínimo local en $x_0 = 0$. En $x_1 = -2$ se tiene $f''(-2) = (4 - 8 + 2)e^{-2} = -2e^{-2} < 0$, y entonces, por el criterio de la segunda derivada, la función tiene un máximo local en $x_1 = -2$.

*

EJERCICIOS (9.1)

1. Suponga que la derivada de la función $f(x)$ es $f'(x) = 5x - 2$. ¿Cómo es la concavidad de la gráfica de la función?

2. Suponga que la derivada de la función $f(x)$ es $f'(x) = -3x + 4$. ¿Cómo es la concavidad de la gráfica de la función?

En los ejercicios 3 al 25, determine el sentido de concavidad de la gráfica de la función en el intervalo indicado.

3. $f(x) = -x^3 + 3x + 9$ en $\mathbf{R}^-$.

4. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 9x + 2$ en $\mathbf{R}^+$.

5. $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $(0, \pi)$.

6. $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $(\pi, 2\pi)$.

7. $f(x) = \cosh x$ en $\mathbf{R}$.

8. $f(x) = \operatorname{senh} x$ en $\mathbf{R}^+$.

9. $f(x) = 4x^2 + 9x + 12$ en $\mathbf{R}$.

10. $f(x) = 3 - x - 2x^2$ en $\mathbf{R}$.

11. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ en $(-0.5, 0.5)$.

12. $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$ en $\mathbf{R}^+$.

13. $f(x) = \dfrac{3}{x - 2}$ en $(-\infty, 2)$.

14. $f(x) = \dfrac{1 + x}{1 - x}$ en $(-\infty, 1)$.

15. $f(x) = \arctan x$ en $\mathbf{R}^+$.

16. $f(x) = e^{5x}$ en $\mathbf{R}$.

17. $f(x) = x^2(2x^4 + 5x^2 + 60)$ en $\mathbf{R}$.

18. $f(x) = x \arctan x - \ln \sqrt{1 + x^2}$ en $\mathbf{R}$.

19. $f(x) = 3x^2(x^2 + 8x + 60)$ en $\mathbf{R}$.

20. $f(x) = \arctan x + \dfrac{1}{2} x \ln(1 + x^2) - x$ en $\mathbf{R}^-$.

21. $f(x) = (2x - 4) \arctan x - (2x + 1) \ln(x^2 + 1) + \dfrac{1}{2} x^2 + 4x$ en $(1, 3)$.

22. $f(x) = \left(\dfrac{1}{12} x^4 + \dfrac{1}{6} x^3 + \dfrac{1}{2} x^2\right) \ln x - \dfrac{1}{144} x^2 (7x^2 + 20x + 108)$ en $(1, \infty)$.

23. $f(x) = \dfrac{1}{4}(x - 4)e^{2x}$ en $(-\infty, 3)$.

24. $f(x) = \dfrac{1}{12} x^4 \ln^2 x + \dfrac{11}{72} x^4 \ln x + \dfrac{487}{864} x^4$ en $\mathbf{R}^+$.

25. $f(x) = -\dfrac{1}{2}(x + 1) \arctan x$ en $(1, \infty)$.

En los ejercicios 26 al 35, use el criterio de la segunda derivada para determinar la naturaleza de los puntos críticos de las funciones dadas.

26. $f(x) = 2x(2x^2 - 9x + 12) + 4.$

27. $f(x) = x(x^3 - 4x^2 + 2x - 12).$

28. $f(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x\right)\ln x + \frac{1}{4}x(16 - x).$

29. $f(x) = (x - 2)e^x.$

30. $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 4)e^{2x}.$

31. $f(x) = -(x^2 + 3x - 3)e^{-x}.$

32. $f(x) = x\ln^2 x - 3x\ln x + 3x.$

33. $f(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{1}{2}\right)\arctan x + \frac{3}{2}\ln(1 + x^2) - \frac{1}{2}x.$

34. $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)\arctan x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x.$

35. $f(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1\right)\arctan x + \frac{5}{3}\ln(1 + x^2) - \frac{1}{6}x(x + 6).$

9.2 PUNTOS DE INFLEXIÓN

La gráfica de una función continua $f : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ puede tener intervalos en los que es cóncava hacia arriba e intervalos en los que es cóncava hacia abajo. Cada uno de éstos los llamaremos *intervalos de concavidad de la gráfica de la función.* Según el teorema 9.1.1, en cada uno de tales intervalos la segunda derivada de la función debe mantener signo constante. Por lo tanto, en los puntos en donde hay un cambio de concavidad en la gráfica de la función la segunda derivada de ésta o es igual a cero o no existe. Estos puntos son análogos a los puntos críticos estudiados en el capítulo anterior, en donde la función cambiaba su comportamiento de creciente a decreciente, o viceversa. Tales puntos reciben un nombre especial.

A un punto de la gráfica de una función, en donde la gráfica cambia de concavidad, se le llama **punto de inflexión** *de la gráfica de la función.*

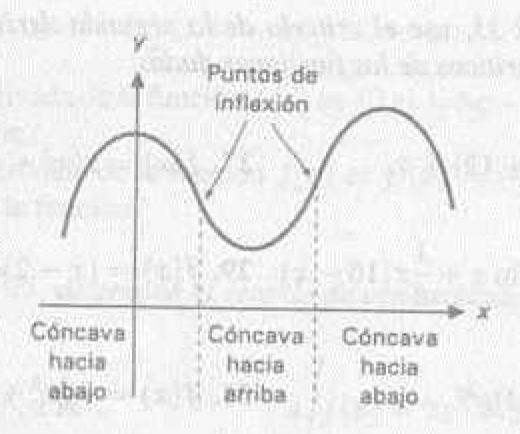


Figura 9.2.1. Un punto de inflexión de una función es un punto en donde la gráfica cambia de sentido de concavidad.

Así pues, para determinar los puntos de inflexión de una función, debemos considerar los puntos en donde la segunda derivada de aquélla es cero o no existe. Estos puntos serán los candidatos a puntos de inflexión (es decir, si la función tiene puntos de esta naturaleza, éstos deben estar en donde la segunda derivada es cero o no existe). Lo anterior no significa que en todo punto en donde $f''(x)$ es cero o no existe hay un punto de inflexión: debemos verificar que en estos puntos ocurra efectivamente un cambio de concavidad en la gráfica de la función (hemos definido punto de inflexión como un punto de la gráfica de la función *en donde ocurre un cambio de concavidad en su gráfica*, y no un punto en donde la segunda derivada es cero o no existe). Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ es tal que $f''(x) = 6x$, de modo que en $x = 0$ se tiene $f''(0) = 0$. El punto $x = 0$ es entonces un candidato a punto de inflexión de $f(x) = x^3$. Observamos que para $x < 0$ se tiene $f''(x) = 6x < 0$, y para $x > 0$ se tiene $f''(x) > 0$, de modo que la gráfica de la función es cóncava hacia abajo en $\mathbf{R}^-$ y es cóncava hacia arriba en $\mathbf{R}^+$. El punto $x = 0$ es efectivamente un punto de inflexión de la parábola cúbica $y = x^3$. Observe además que tanto en $\mathbf{R}^-$ como en $\mathbf{R}^+$, la función $f(x) = x^3$ es creciente, pues para cualquier x en estos intervalos se tiene $f'(x) = 3x^2 > 0$. La diferencia del crecimiento de esta función en cada uno de estos dos intervalos la da el signo de la segunda derivada: en $\mathbf{R}^-$ la función crece con gráfica cóncava hacia abajo (podríamos decir que en este intervalo la función crece y su derivada decrece), y en $\mathbf{R}^+$ la función crece con gráfica cóncava hacia arriba (la función crece y su derivada también). Sin embargo, si consideramos la función $f(x) = x^4$, tenemos que $f''(x) = 12x^2$, de modo que para $x = 0$ se tiene $f''(0) = 0$. Así, el punto $x = 0$ es también un candidato a punto de inflexión de la función $f(x) = x^4$. Observe que para $x < 0$ se tiene $f''(x) = 12x^2 > 0$ y para $x > 0$ se tiene $f''(x) = 12x^2 > 0$, de modo que en este caso no hay cambio de signo en la segunda derivada y por lo tanto no hay cambio de concavidad en la gráfica de la función: la función es cóncava hacia arriba en $\mathbf{R}^-$ y cóncava hacia arriba también en $\mathbf{R}^+$.

Es importante señalar que un punto de inflexión *es un punto de la gráfica de la función*. En los puntos en donde la función no existe (por ejemplo en algunas discontinuidades de la función) se pueden presentar también cambios en la concavidad de la gráfica. Por lo tanto, al estudiar los intervalos de concavidad de la función también debemos considerar (además de los puntos en donde la segunda derivada es cero o no existe) que en las discontinuidades

puede haber cambios de concavidad en la gráfica de la función. Por ejemplo, la función $f(x) = \frac{1}{x}$ que está definida en todos los reales excepto $x = 0$, tiene por segunda derivada a $f''(x) = \frac{2}{x^3}$, la cual existe para toda x en el dominio de la función y nunca es cero. Entonces en este momento podemos afirmar que la función $f(x) = \frac{1}{x}$ no tiene puntos de inflexión (porque si los tuviera, en ellos la segunda derivada sería cero o no existiría). Esto, sin embargo, no significa que la gráfica de la función no pueda cambiar de concavidad. De hecho, observe que para $x < 0$ se tiene $f''(x) = \frac{2}{x^3} < 0$ y para $x > 0$ se tiene $f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$, de modo que la gráfica de la función es cóncava hacia abajo en $\mathbf{R}^-$ y cóncava hacia arriba en $\mathbf{R}^+$.

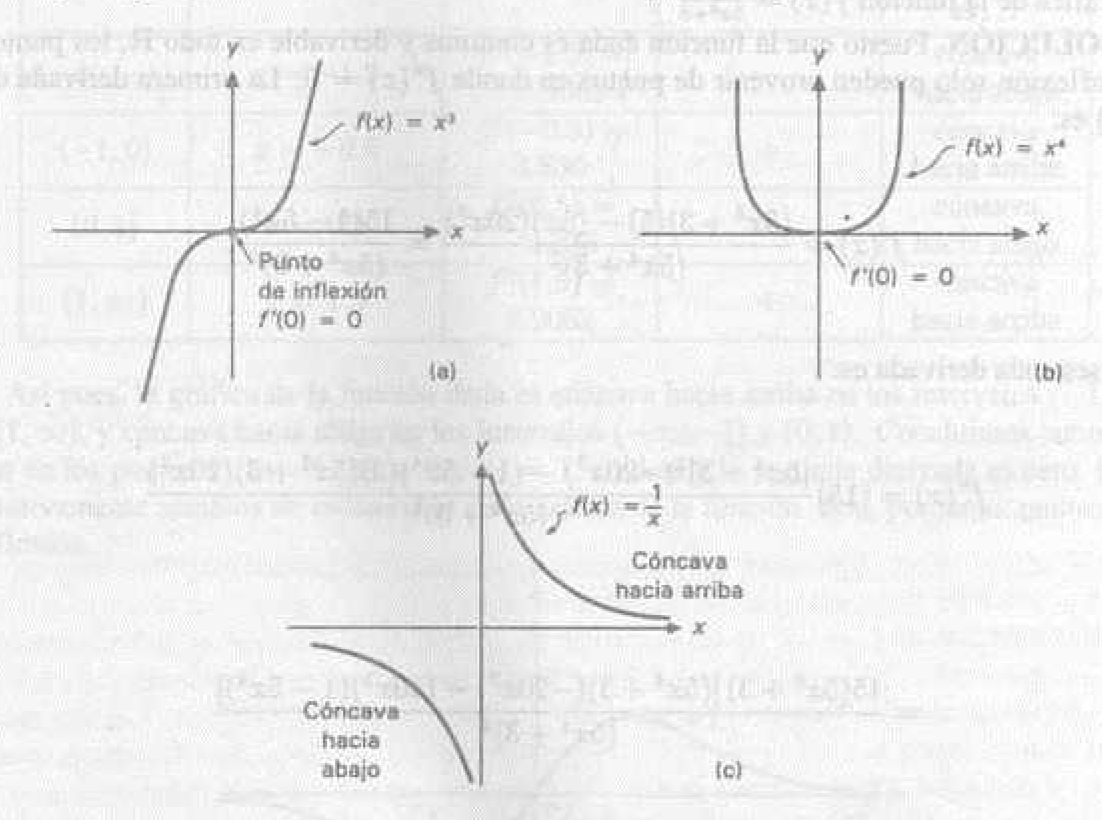


Figura 9.2.2. (a) En $x = 0$ la segunda derivada de $f(x) = x^3$ es cero. La gráfica tiene un punto de inflexión en $x = 0$. (b) En $x = 0$ la segunda derivada de $f(x) = x^4$ es cero. La gráfica no tiene punto de inflexión en $x = 0$. (c) En $x = 0$ hay una discontinuidad de $f(x) = \frac{1}{x}$. Hay un cambio de concavidad en la gráfica de la función. En $x = 0$ no hay punto de inflexión.

EJEMPLO 9.2.1. Determine los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de la gráfica de la función $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.

SOLUCIÓN. Puesto que se trata de una función polinomial (que es continua y derivable en todo $\mathbf{R}$) los posibles puntos de inflexión deben provenir de puntos en donde $f''(x) = 0$. Las derivadas de esta función son: $f'(x) = 3x^2 + 6x + 2$ y $f''(x) = 6x + 6$, de modo que $f''(x) = 6x + 6 = 0$ para $x = -1$. Éste es un candidato a punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$. Para $x < -1$, por ejemplo para $x = -2$, tenemos $f''(-2) = 6(-2) + 6 = -6 < 0$

y para $x > -1$, por ejemplo para $x = 0$, tenemos $f''(0) = 6 > 0$, de modo que en $x = -1$ hay efectivamente un cambio de concavidad y tenemos que para $x < -1$ la gráfica de la función es cóncava hacia abajo (pues en este intervalo se tiene $f''(x) < 0$), y para $x > -1$ la gráfica es cóncava hacia arriba (pues en este intervalo se tiene $f''(x) > 0$).

★

EJEMPLO 9.2.2. Determine los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de la gráfica de la función $f(x) = \frac{5x}{5x^4+3}$.

SOLUCIÓN. Puesto que la función dada es continua y derivable en todo $\mathbf{R}$, los puntos de inflexión sólo pueden provenir de puntos en donde $f''(x) = 0$. La primera derivada de $f(x)$ es:

$$f'(x) = \frac{(5x^4+3)(5) - (5x)(20x^3)}{(5x^4+3)^2} = \frac{15(1-5x^4)}{(5x^4+3)^2},$$

y la segunda derivada es:

$$f''(x) = (15)\frac{(5x^4+3)^2(-20x^3) - (1-5x^4)(2)(5x^4+3)(20x^3)}{(5x^4+3)^4}$$

$$= \frac{15(5x^4+3)\left[(5x^4+3)(-20x^3) - (40x^3)(1-5x^4)\right]}{(5x^4+3)^4}$$

$$= \frac{1500x^3(x^4-1)}{(5x^4+3)^3}.$$

Los puntos en donde $f''(x) = 0$ los obtenemos como soluciones de la ecuación $1500x^3(x^4-1) = 0$, o sea $x^3(x-1)(x+1)(x^2+1) = 0$, las cuales son $x_1 = -1, x_2 = 0$ y $x_3 = 1$. Como en el caso de los extremos locales estudiados en el capítulo anterior, partimos la recta de los reales en los intervalos que estos puntos separan: $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, \infty)$. En cada uno de ellos debemos ver qué signo tiene la segunda derivada y decidir si en el punto dado hay un punto de inflexión (si hay cambio de signo de la segunda derivada). Para ver qué signo tiene $f''(x)$ en cada uno de los intervalos considerados, tomamos algún punto de él y evaluamos $f''(x)$: el signo que obtengamos será aquel que esta segunda derivada tenga en todo el intervalo. Las cuentas las resumimos en el siguiente cuadro.

Intervalo	Consideramos un punto del intervalo	Evaluamos $f''(x)$	Signo de $f''(x)$ en el intervalo considerado	Por lo tanto la gráfica de la función en tal intervalo es...
$(-\infty, -1)$	$x = -1.5$	$f''(-1.5) = -0.9062$	$-$	cóncava hacia abajo
$(-1, 0)$	$x = -0.5$	$f''(-0.5) = 4.836$	$+$	cóncava hacia arriba
$(0, 1)$	$x = 0.5$	$f''(0.5) = -4.836$	$-$	cóncava hacia abajo
$(1, \infty)$	$x = 1.5$	$f''(1.5) = 0.9062$	$+$	cóncava hacia arriba

Así pues, la gráfica de la función dada es cóncava hacia arriba en los intervalos $(-1, 0)$ y $(1, \infty)$, y cóncava hacia abajo en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$. Concluimos también que en los puntos $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 1$, en donde la segunda derivada es cero, hay efectivamente cambios de concavidad en la gráfica de la función. Son, por tanto, puntos de inflexión.

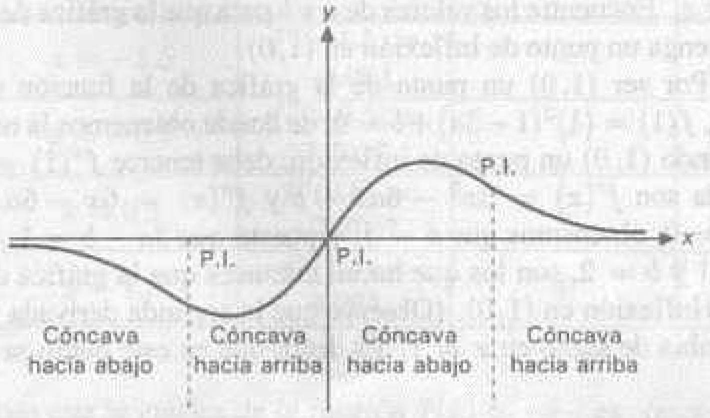


Figura 9.2.3. Gráfica de la función del ejemplo 9.2.2.

EJEMPLO 9.2.3. Determine los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de la gráfica de la función $f(x) = x^2 \ln x$.

SOLUCIÓN. La función está definida para $x > 0$ (restricción que impone el logaritmo natural). La primera y segunda derivadas de esta función son $f'(x) = x^2\left(\frac{1}{x}\right) + 2x\ln x = x + 2x\ln x$ y $f''(x) = 1 + 2x\left(\frac{1}{x}\right) + 2\ln x = 3 + 2\ln x$. Los posibles puntos de inflexión se encuentran en las soluciones de la ecuación $f''(x) = 0$, o sea en las x tales que $3 + 2\ln x = 0$.

Al despejar la x de esta ecuación obtenemos $x = e^{-\frac{3}{2}} \approx 0.223$. Si la gráfica de la función tiene un punto de inflexión (es decir, si existe algún cambio de concavidad), lo tiene en este punto. Veamos si efectivamente esto ocurre: para $x = 0.1 < e^{-\frac{3}{2}}$ se tiene $f''(0.1) = 3 + 2\ln(0.1) \approx -1.605 < 0$ y para $x = 1 > e^{-\frac{3}{2}}$ se tiene $f''(1) = 3 + 2\ln 1 = 3 > 0$, de tal modo que en $x = e^{-\frac{3}{2}}$ hay efectivamente un cambio de concavidad en la gráfica de la función. Entonces hay un punto de inflexión en $x = e^{-\frac{3}{2}}$, por ser la gráfica de la función cóncava hacia abajo en el intervalo $\left(0, e^{-\frac{3}{2}}\right)$ y cóncava hacia arriba en $\left(e^{-\frac{3}{2}}, \infty\right)$.

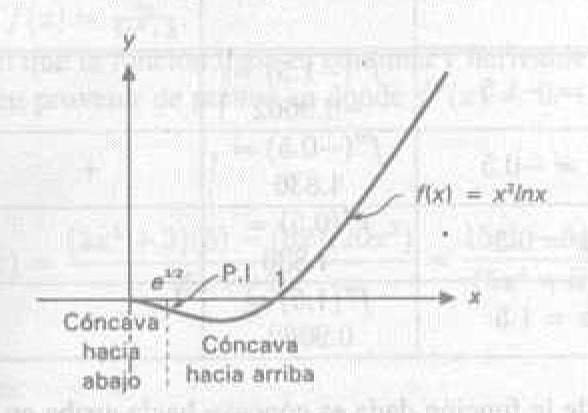


Figura 9.2.4. La gráfica de la función del ejemplo 9.2.3.

★

EJEMPLO 9.2.4. Encuentre los valores de a y b para que la gráfica de la función $f(x) = x^2(x - 3a) + bx$ tenga un punto de inflexión en $(1, 0)$.

SOLUCIÓN. Por ser $(1, 0)$ un punto de la gráfica de la función se debe tener que $f(1) = 0$, es decir, $f(1) = (1)^2(1 - 3a) + b = 0$, de donde obtenemos la relación $3a - b = 1$. Por otra parte, siendo $(1, 0)$ un punto de inflexión, debe tenerse $f''(1) = 0$. Las derivadas de la función dada son $f'(x) = 3x^2 - 6ax + b$ y $f''(x) = 6x - 6a$. Entonces, como $f''(1) = 6 - 6a = 0$, obtenemos que $a = 1$, y puesto que $3a - b = 1$, obtenemos $b = 2$. Los valores $a = 1$ y $b = 2$, son los que hacen entonces que la gráfica de la función dada tenga un punto de inflexión en $(1, 0)$. (Observe que la segunda derivada $f''(x) = 6(x - 1)$ efectivamente cambia de signo en $x = 1$. Es decir, que en este punto se tiene un punto de inflexión.)

★

EJEMPLO 9.2.5. Determine los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de la gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$.

SOLUCIÓN. Observe que la función dada es discontinua en $x = -1$ y en $x = 1$ (son los ceros del denominador). Estos puntos deberán tomarse en cuenta como posibles cambios en la concavidad de la gráfica de la función. Las derivadas de $f(x)$ son

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 1)(1) - x(2x)}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$$

y

$$f''(x) = -\frac{(x^2-1)^2(2x) - (x^2+1)2(x^2-1)(2x)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2-1) - 4x(x^2+1)}{(x^2-1)^3}$$

$$= \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

El único punto en donde $f''(x) = 0$ es $x = 0$ (el factor $x^2 + 3$ no tiene raíces reales). Entonces los posibles cambios de concavidad de la función se presentan en las discontinuidades $x = \pm 1$ y en el punto $x = 0$. Analizamos el signo de la segunda derivada en cada uno de los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, \infty)$.

Intervalo	**Consideramos un punto representativo del intervalo**	**Evaluamos $f''(x)$**	**Signo de $f''(x)$ en el intervalo considerado**	**Por lo tanto la gráfica de la función en tal intervalo es...**
$(-\infty, -1)$	$x = -1.5$	$f''(-1.5) = -8.064$	$-$	cóncava hacia abajo
$(-1, 0)$	$x = -0.5$	$f''(-0.5) = 7.7037$	$+$	cóncava hacia arriba
$(0, 1)$	$x = 0.5$	$f''(0.5) = -7.7037$	$-$	cóncava hacia abajo
$(1, \infty)$	$x = 1.5$	$f''(1.5) = 8.064$	$+$	cóncava hacia arriba

Así pues, tenemos que la gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ es cóncava hacia arriba en los intervalos $(-1, 0)$ y $(1, \infty)$, y cóncava hacia abajo en $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$. En $x = 0$ hay entonces un punto de inflexión.

EJEMPLO 9.2.6. Determine los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de la gráfica de la función $f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}}(x-3)^{\frac{2}{3}}$.

SOLUCIÓN. Observe que se trata de una función que está definida en todos los reales, y que es continua siempre (las operaciones de elevar al cuadrado y extraer una raíz impar son permisibles para todos los reales y no alteran la continuidad de las funciones polinomiales sobre las que se efectúan). La primera derivada de $f(x)$ es:

$$f'(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{5}\right)(x-3)^{-\frac{3}{5}} + (x-3)^{\frac{2}{5}}\left(\frac{2}{3}\right)(x-1)^{-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{2}{15}(x-1)^{-\frac{1}{3}}(x-3)^{-\frac{3}{5}}\left[3(x-1)+5(x-3)\right] = \frac{4}{15}(x-1)^{-\frac{1}{3}}(x-3)^{-\frac{3}{5}}(4x-9)$$

y la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{4}{15}(x-1)^{-\frac{1}{3}}(x-3)^{-\frac{3}{5}}(4) + \frac{4}{15}(x-1)^{-\frac{1}{3}}\left(-\tfrac{3}{5}\right)(x-3)^{-\frac{8}{5}}(4x-9) +$$

$$+\frac{4}{15}\left(-\tfrac{1}{3}\right)(x-1)^{-\frac{4}{3}}(x-3)^{-\frac{3}{5}}(4x-9)$$

$$= \frac{4}{15}(x-1)^{-\frac{4}{3}}(x-3)^{-\frac{8}{5}}\left[4(x-1)(x-3) - \frac{3}{5}(x-1)(4x-9) - \frac{1}{3}(x-3)(4x-9)\right]$$

$$= \frac{8}{225}(x-1)^{-\frac{4}{3}}(x-3)^{-\frac{8}{5}}\left(2x^2-9x-18\right) = \frac{8(2x+3)(x-6)}{225(x-1)^{\frac{4}{3}}(x-3)^{\frac{8}{5}}}.$$

Se nos presentan ahora dos tipos de posibles puntos de inflexión: las raíces del numerador de $f''(x)$ son $x = -\frac{3}{2}$ y $x = 6$. En estos puntos $f''(x) = 0$. Pero además tenemos a $x = 1$ y $x = 3$ como raíces del denominador. En estos puntos $f''(x)$ no existe. Así, como candidatos a puntos en donde puede cambiar la concavidad tenemos a $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$ y $x_4 = 6$. La recta de los reales (en donde está definida la función) queda dividida en cinco intervalos de signo constante de la segunda derivada, a saber $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$, $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$, $(1, 3)$, $(3, 6)$ y $(6, \infty)$. Hacemos entonces el análisis de los signos de $f''(x)$ en cada uno de ellos. Una ayuda para evitar hacer las evaluaciones exactas de la segunda derivada en los puntos representativos que tomemos en cada uno de los intervalos, consiste en ver que el denominador de la expresión de $f''(x)$ sea *siempre positivo* (pues son números elevados a potencias pares, lo que, independientemente del signo que tengan, los deja positivos, y luego se les extrae una raíz impar, lo cual no altera su signo positivo). Podemos entonces hacer las cuentas de la evaluación solamente con el numerador de $f''(x)$: el signo que se obtenga será el signo de $f''(x)$ en todo el intervalo.

Intervalo	Consideramos un punto del intervalo	Evaluamos el numerador de $f''(x)$	Signo de $f''(x)$ en el intervalo considerado	Por lo tanto la gráfica de la función en tal intervalo es...
$(-\infty, -\frac{3}{2})$	$x = -2$	64	+	cóncava hacia arriba
$(-\frac{3}{2}, 1)$	$x = 0$	-144	−	cóncava hacia abajo
$(1, 3)$	$x = 2$	-224	−	cóncava hacia abajo
$(3, 6)$	$x = 4$	-176	−	cóncava hacia abajo
$(6, \infty)$	$x = 7$	136	+	cóncava hacia arriba

Vemos entonces que solamente en $x = -\frac{3}{2}$ y en $x = 6$ hay cambios en la concavidad de la gráfica de la función. Éstos son los puntos de inflexión. La gráfica es cóncava hacia arriba en los intervalos $(-\infty, -\frac{3}{2})$ y $(6, \infty)$, y cóncava hacia abajo en los intervalos $(-\frac{3}{2}, 1)$, $(1, 3)$ y $(3, 6)$.

⋆

EJERCICIOS (9.2)

1. ¿Verdadero o falso? Si la gráfica de una función cambia de concavidad en un punto, entonces la segunda derivada de la función es cero en ese punto.

2. ¿Verdadero o falso? Si la segunda derivada de una función polinomial nunca se anula, entonces la gráfica de la función no tiene puntos de inflexión.

3. ¿Verdadero o falso? Si x_0 es un punto en R tal que para $x < x_0$ la gráfica de la función $f(x)$ es cóncava hacia arriba, y para $x > x_0$ es cóncava hacia abajo, entonces x_0 es un punto de inflexión de la gráfica de la función.

En los ejercicios 4 al 40, determine los intervalos de concavidad de la gráfica de la función dada, así como sus puntos de inflexión.

4. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 4$.

5. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 56x + 98$.

6. $f(x) = x^2(x - 3) + x + 1$.

7. $f(x) = x^2(4x + 9) + 4$.

8. $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$.

9. $f(x) = \dfrac{3}{x-1} + x + 2$.

10. $f(x) = \dfrac{2x+3}{2x+7}$.

11. $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 \ln x - \dfrac{3}{4}x^2$.

12. $f(x) = (x-2)\,e^x$.

13. $f(x) = x^2(3x^3 - 5x^2 + 10x - 30)$.

14. $f(x) = 2x^2(3x^3 + 15x^2 + 25x + 225)$.

15. $f(x) = x^2(x^4 - 15)$.

16. $f(x) = x^2(x^4 + 5x^2 - 45)$.

17. $f(x) = x^2(2x^4 + 3x^3 + 10x^2 + 40x - 240)$.

18. $f(x) = x^7 + x^5 + x^3 + x + 2$.

19. $f(x) = x^7 + 2x^5 + 3x^3 + 9x + 4$.

20. $f(x) = 10x^7 + 21x^5 - 140x^3 + 8x + 3$.

21. $f(x) = 35x^9 + 60x^7 + 126x^5 + 420x^3 + x$.

22. $f(x) = 6x^{11} + 33x^5 + 110x^3 + 9x + 1$.

23. $f(x) = \arctan x + x \ln \sqrt{1+x^2} - x$.

24. $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 \ln^2 x - 2x^2 \ln x + \dfrac{5}{2}x^2$.

25. $f(x) = \left(\dfrac{1}{6}x^3 - x^2\right) \ln x + \dfrac{1}{36}x^2(54 - 5x)$.

26. $f(x) = \left(\dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2\right) \ln x + \dfrac{1}{36}x^2(45 - 11x)$.

27. $f(x) = \left(\dfrac{1}{12}x^4 - x^3 + 4x^2\right) \ln x - \dfrac{1}{144}x^2(7x^2 - 120x + 864)$.

28. $f(x) = \left(\dfrac{1}{12}x^4 - \dfrac{7}{6}x^3 + 5x^2\right) \ln x - \dfrac{1}{144}x^2(7x^2 - 140x + 1080)$.

29. $f(x) = \left(\dfrac{1}{12}x^4 - \dfrac{7}{6}x^3 + 6x^2\right) \ln x - \dfrac{1}{144}x^2(19x^2 - 308x + 2160)$.

30. $f(x) = (x^2 - 1) \arctan x - x \ln(1 + x^2) + x$.

31. $f(x) = e^x(x-3) - e^{-x}(x+1)$.

32. $f(x) = e^x(x-4) + xe^{-x}$.

33. $f(x) = \left(\dfrac{1}{6}x^3 - x^2\right) \ln^2 x + \dfrac{1}{18}x^2(54 - 5x) \ln x + \dfrac{1}{108}x^2(19x - 378)$.

34. $f(x) = \dfrac{1}{2}(x-3) \ln(x^2 - 2x + 1) + \dfrac{1}{x-1} - x$.

35. $f(x) = 7344 \ln|x-2| + 187x^4 + 544x^3 + 918x^2 + 3500x - 5200$.

36. $f(x) = \frac{1}{16}(12 - 7x)\ln(x-1)^2 + \frac{1}{16}(7x - 12)\ln(x-3)^2 + \frac{2x-1}{4(x-1)(x-3)}$.

37. $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$. **38.** $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$.

39. $f(x) = \frac{3}{x^2-x-2} + 2x + 3$. **40.** $f(x) = \frac{3x}{4(x^2-4)} - \frac{3}{16}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$.

En los ejercicios 41 al 48, calcule los valores de a *y* b *para que la gráfica de la función dada tenga un punto de inflexión en el punto indicado.*

41. $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ en $P = (1, 1)$. **42.** $f(x) = 2x^3 + ax^2 + x + b$ en $P = (-1, 1)$.

43. $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ en $P = (2, 1)$. **44.** $f(x) = 5x^3 + 3ax^2 + 5x + b$ en $P = (2, 3)$.

45. $f(x) = \frac{1}{x^2+a} + bx$ en $P = (1, 1)$. **46.** $f(x) = \frac{2}{x^2+a} + 3bx$ en $P = (2, 3)$.

47. $f(x) = a\ln|x-1| + bx^2$ en $P = (2, 2)$. **48.** $f(x) = a\ln|x-3| + bx^2$ en $P = (4, 3)$.

49. (EN UN TONO MENOS SERIO: UN PROBLEMA PARA DETECTIVES.) La noticia se regó como pólvora. Todos los medios de comunicación hablaban de un científico mexicano que se dedicaba a mandar bombas. Originario de Mérida, Yucatán, el matemático mexicano de origen libanés, Simón Omar Scharar (conocido entre sus amigos como el S.O.S., y luego, por la prensa internacional, como el *Mexican Bomber*), tenía varios años cobrando víctimas en distintas partes del país. Su manera de atacar era siempre la misma: a la medianoche marcaba un teléfono y a la persona que contestaba le decía, con una tenebrosa voz, una bomba matemático-yucateca. Las víctimas eran presas de ataques de histeria y algunas de ellas morían a los pocos días, sin poder dormir ni probar alimento, intentando descifrar las claves matemáticas que en sus bombas decía el *Mexican Bomber*. La última de sus bombas decía:

Y con gran serenidad,
con profunda convicción,
ahí te mando esta bomba,
y perderás la razón,
cuanto tu concavidad
se anule en una inflexión.

La víctima, una abuelita octogenaria con una estupenda memoria, había superado la crisis nerviosa que le produjo la bomba y pudo luego repetir palabra por palabra los versos que le habían dicho. Después de un mes, cuando recobró la calma, comenzó a colaborar con la Procuraduría General de la República (PGR) para poder atrapar al *Mexican Bomber*. Ella creía que los puntos de inflexión eran una clave importante. En un cateo en la casa de un matemático sospechoso que justo faltaba a clases cuando eran reportadas las llamadas del *Bomber*, se encontraron algunos apuntes en una vieja libreta. En una esquina de la primera

hoja estaban escritas las palabras "colineales", "cinco", "parte entera" y, esparcidas por la hoja, cuatro ecuaciones. El documento fue dado para su análisis a la abuelita y ella, después de un par de horas de trabajo con papel y lápiz en la mano, se comunicó a la PGR.

— Departamento de Bombas. ¿En qué podemos servirle?

— Soy la última víctima del *Mexican Bomber*. Creo que tengo datos importantes.

— ¿Sí?, ¿Como cuáles?

— Tengo el teléfono de la próxima víctima ... y si no se apuran, ese pillo estará hablándole ya por teléfono.

Rápidamente llegaron los agentes de la PGR con la abuelita, y ella les dio los tres pares de dígitos que seguirían al primero en el número telefónico (de seis dígitos) de la próxima víctima. Se procedió a intervenir los teléfonos con esos 6 dígitos finales y se colocaron expertos en cada uno de ellos. Efectivamente, un día después estaba entrando la llamada al teléfono 5-__ __-__ __-__ __ a la medianoche. La voz del *Bomber* se escuchó diciendo:

Las inflexiones son buenas,
aunque las concavidades vanas ...

No alcanzó a decir más. Una enérgica voz se escuchó por el teléfono: "¡Sabemos en dónde estás *Mexican Bomber* ... ríndete de inmediato!". Y así la historia tuvo un final feliz.

Pero ... ¿qué hizo la abuelita con aquella hoja de donde pudo adivinar el teléfono de la víctima? En una conferencia de prensa, la abuelita explicó que en aquella hoja que le proporcionó la Procuraduría había cuatro funciones:

$$f(x) = 0.03x^5 - 0.8x^4 + 6.9x^3 - 16.2x^2 + 0.8x + 10$$

$$g(x) = 0.03x^5 - 0.55x^4 + 3.6x^3 - 10.8x^2 + 0.2x$$

$$h(x) = 0.03x^5 - 0.3x^4 + 1.1x^3 - 1.8x^2 + 0.25x + 2$$

$$i(x) = 0.03x^5 - 0.7x^4 + 5.9x^3 - 21x^2 + 0.1x - 3.6.$$

Cada una de las gráficas de estas funciones tiene tres puntos de inflexión, cuya primera coordenada es un número entero entre 0 y 9, pero solamente una de esas funciones tiene sus tres puntos de inflexión colineales. Como la palabra "colineales" aparecía escrita en la hoja, pensó que en esa función se encontraba la clave del teléfono de la próxima víctima. Luego, construyó los pares de dígitos del teléfono escribiendo, de menor a mayor (respecto de la primera coordenada), las coordenadas de los tres puntos colineales: la primera tal cual (pues era un entero positivo con un solo dígito), y de la segunda, tomando solamente la parte entera (otra de las palabras clave en la libreta del *Mexican Bomber*. Por ejemplo, si era 4.23, tomaba el 4). Digamos que si los puntos de inflexión (colineales) tenían coordenadas $(a_1, b_1.c_1c_2\ldots)$, $(a_2, b_2.d_1d_2\ldots)$ y $(a_3, b_3.e_1e_2\ldots)$, en donde $a_1 < a_2 < a_3$, entonces el teléfono era:

$$5 \;-\; a_1b_1 \;-\; a_2b_2 \;-\; a_3b_3.$$

DESCUBRA USTED MISMO LAS CUENTAS QUE HIZO LA ABUELITA PARA DAR CON EL TELÉFONO DE LA VÍCTIMA DEL MEXICAN BOMBER.

9.3 RESUMEN: GRÁFICA DE $f(x)$ VS. GRÁFICA DE $f'(x)$

En esta sección queremos resumir algunos aspectos que se han enfatizado en los análisis del capítulo anterior y en las dos primeras secciones de este capítulo, acerca de los resultados estudiados sobre funciones crecientes y decrecientes, extremos locales, gráficas cóncavas hacia arriba y hacia abajo, y puntos de inflexión, así como del contenido geométrico de estos conceptos. Uno de los objetivos que perseguimos es que podamos efectivamente exprimir toda la información que se pueda al contenido geométrico de una función (de su gráfica) y poder interpretar éste en términos de derivadas. Éste es, como ya decíamos, uno de los objetivos de un curso de Cálculo Diferencial.

Los hechos fundamentales que usaremos aquí son los teoremas 8.2.1 y 9.1.1 que recordamos a continuación, así como las definiciones correspondientes de extremos locales y puntos de inflexión.

TEOREMA 8.2.1. *Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en el intervalo abierto I de $\mathbb{R}$.*

1) Si $f'(x) > 0$ para toda $x \in I$, entonces la función es creciente en I.

2) Si $f'(x) < 0$ para toda $x \in I$, entonces la función es decreciente en I.

TEOREMA 9.1.1. *Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida en el intervalo abierto I de $\mathbb{R}$.*

1) Si $f''(x) > 0$ para toda $x \in I$, entonces la gráfica de la función es cóncava hacia arriba en I.

2) Si $f''(x) < 0$ para toda $x \in I$, entonces la gráfica de la función es cóncava hacia abajo en I.

Cuando además se supone que la función involucrada es dos veces derivable, los resultados anteriores toman el aspecto más fuerte:

TEOREMA 8.2.1

$$\left\{\begin{array}{c}\text{La función}\\ f: I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}\\ \text{es creciente}\end{array}\right\} \Leftrightarrow f'(x) > 0 \; \forall x \in I$$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{La función}\\ f: I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}\\ \text{es decreciente}\end{array}\right\} \Leftrightarrow f'(x) < 0 \; \forall x \in I$$

TEOREMA 9.1.1

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Gráfica de}\\ f: I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}\\ \text{cóncava hacia arriba}\end{array}\right\} \Leftrightarrow f''(x) > 0 \; \forall x \in I$$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Gráfica de}\\ f: I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}\\ \text{cóncava hacia abajo}\end{array}\right\} \Leftrightarrow f''(x) < 0 \; \forall x \in I$$

Estas equivalencias son con las que más trabajaremos en esta sección. Por supuesto, debemos también tener presente que cuando se dice que una función $\varphi(x)$ es positiva (negativa) significa que su gráfica se encuentra por encima (por debajo, respectivamente) del eje x, y que un punto x_0 en donde $\varphi(x_0) = 0$ representa geométricamente un punto del eje x por donde cruza la gráfica de la función.

Supongamos entonces dada la gráfica de una función $f(x)$ —que supondremos lo suficientemente derivable, a menos que se indique lo contrario— en un cierto intervalo $[a, b]$. A partir de ella, queremos tener un *bosquejo* de la gráfica de su derivada $f'(x)$. Para concretar nuestro análisis, supongamos que la gráfica de $f(x)$ es como la que se muestra en la figura 9.3.1.

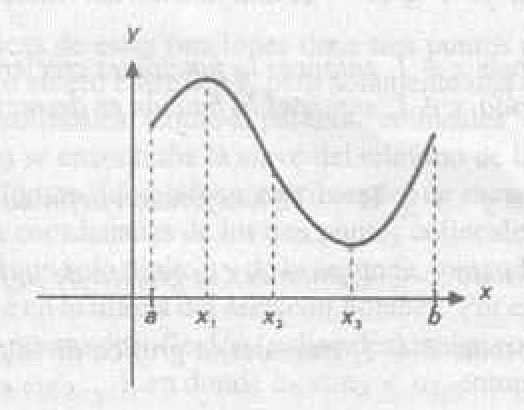


Figura 9.3.1. La gráfica de la función $f(x)$.

Se han marcado los puntos x_1, x_2, x_3 en donde ocurre "algo importante" con la función. En particular en x_1 tenemos un máximo local, en x_3 un mínimo local, y en x_2 un punto de inflexión. Es conveniente, al menos en esta primera vez que hacemos este tipo de análisis, que procedamos "pedazo por pedazo" a analizar el comportamiento geométrico de la gráfica de $f(x)$ y veamos qué tipo de conclusiones (en términos de la derivada) podemos obtener.

• *Lo que pasa en* $a < x < x_1$. En este intervalo observamos que la función $f(x)$ es creciente, por lo que podemos concluir que $f'(x) > 0$. Este hecho nos indica que la gráfica de $f'(x)$ se encuentra por encima del eje x en el intervalo considerado. Además, la gráfica de $f(x)$ es en este intervalo, cóncava hacia abajo, lo que indica que $f''(x) < 0$, es decir, que $(f'(x))' < 0$, lo cual a su vez nos dice que la función $f'(x)$ es decreciente (pues su derivada es negativa). En resumen, en este intervalo la función $f'(x)$ es decreciente y su gráfica se encuentra por encima del eje x.

• *Lo que pasa en* $x = x_1$. En este punto se tiene $f'(x_1) = 0$. Así, x_1 es una raíz de $f'(x)$.

• *Lo que pasa en* $x_1 < x < x_2$. En este intervalo observamos que la función $f(x)$ es decreciente, por lo que podemos concluir que $f'(x) < 0$. Este hecho nos indica que la gráfica de $f'(x)$ se encuentra por debajo del eje x en el intervalo considerado. Además, la gráfica de $f(x)$ es en este intervalo sigue siendo cóncava hacia abajo, lo que indica que $f''(x) < 0$, es decir, que $(f'(x))' < 0$, lo cual a su vez nos dice que la función $f'(x)$ sigue siendo decreciente (pues su derivada es negativa). En resumen, en este intervalo la función $f'(x)$ es decreciente y su gráfica se encuentra por debajo del eje x, después de haber cruzado por x_1.

• *Lo que pasa en* $x = x_2$. En este punto se tiene $f''(x_2) = 0$. Así, x_2 es un punto crítico de $f'(x)$ (pues en x_2 la derivada de $f'(x)$ se anula). Éste es un candidato a extremo local de $f'(x)$. Observe que antes de este punto se tiene $f''(x) < 0$ y después de él se tiene $f''(x) > 0$, por lo que la derivada de $f'(x)$ efectivamente cambia de signo, y esto nos permite concluir la presencia de un extremo local para $f'(x)$. De hecho, como su derivada cambia de menos a más, debe haber un mínimo local en este punto.

• *Lo que pasa en* $x_2 < x < x_3$. En este intervalo observamos que la función $f(x)$ sigue siendo decreciente, por lo que podemos concluir que $f'(x) < 0$. Este hecho nos indica que la gráfica de $f'(x)$ se encuentra por debajo del eje x en el intervalo considerado. Además, la gráfica de $f(x)$ en este intervalo es ahora cóncava hacia arriba, lo que indica que $f''(x) > 0$, es decir, que $(f'(x))' > 0$, lo cual a su vez nos dice que la función $f'(x)$ es creciente (pues su derivada es positiva). En resumen, en este intervalo la función $f'(x)$ es creciente y su gráfica se encuentra por debajo del eje x, después de haber alcanzado un mínimo local en x_2.

• *Lo que pasa en* $x = x_3$. En este punto se tiene $f'(x_3) = 0$. Así que x_3 es una raíz de $f'(x)$.

• *Lo que pasa en* $x_3 < x < b$. En este intervalo observamos que la función $f(x)$ es creciente, por lo que podemos concluir que $f'(x) > 0$. Este hecho nos indica que la gráfica de $f'(x)$ se encuentra ahora por encima del eje x en el intervalo considerado (después de haber pasado por la raíz x_3). Además, la gráfica de $f(x)$ en este intervalo sigue siendo cóncava hacia arriba, lo que indica que $f''(x) > 0$, es decir, que $(f'(x))' > 0$, lo cual a su vez nos dice que la función $f'(x)$ es creciente (pues su derivada es positiva). En resumen, en este intervalo la función $f'(x)$ es creciente y su gráfica se encuentra por encima del eje x.

Los hechos anteriores los podemos resumir en una tabla.

Punto o intervalo	**Lo que se puede decir de $f(x)$ y de su gráfica**	$f'(x)$	$f''(x)$	**Conclusión acerca de $f'(x)$ y de su gráfica**
$a < x < x_1$	Es creciente. Gráfica cóncava hacia abajo.	$+$	$-$	Gráfica por encima del eje x. Es decreciente.
x_1	Máximo local	0	$-$	Raiz de $f'(x)$. Es decreciente
$x_1 < x < x_2$	Es decreciente. Gráfica cóncava hacia abajo.	$-$	$-$	Gráfica por debajo del eje x. Es decreciente.
x_2	Punto de inflexión	$-$	0	Gráfica por debajo del eje x. Punto crítico (mínimo local).
$x_2 < x < x_3$	Es decreciente. Gráfica cóncava hacia arriba.	$-$	$+$	Gráfica por debajo del eje x. Es creciente.
x_3	Mínimo local	0	$+$	Raiz de $f'(x)$. Es creciente
$x_3 < x < b$	Es creciente. Gráfica cóncava hacia arriba.	$+$	$+$	Gráfica por encima del eje x. Es creciente.

Con los hechos concluidos en la última columna acerca de $f'(x)$ y de su gráfica, podemos presentar el siguiente bosquejo de ella.

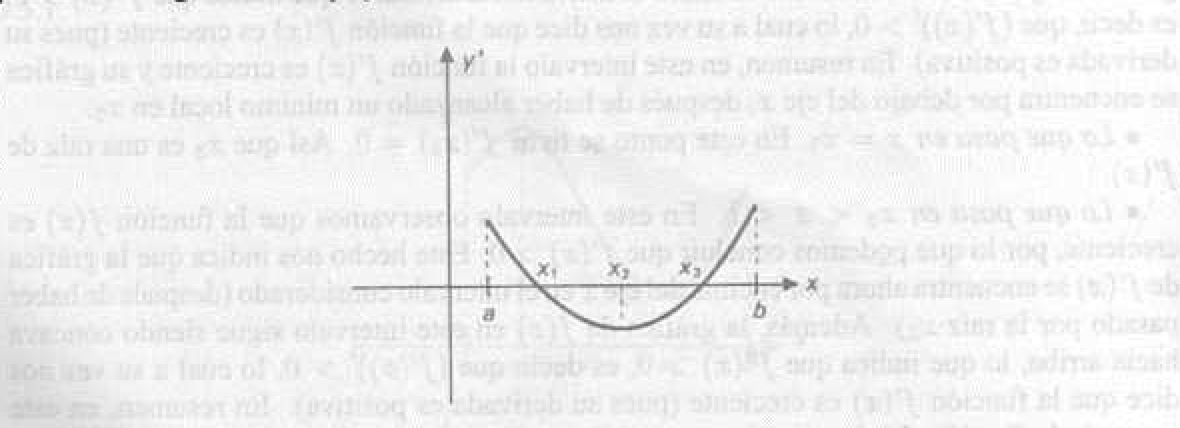


Figura 9.3.2. Bosquejo de la gráfica de la derivada $f'(x)$ de la función $f(x)$ de la figura 9.3.1.

Un poco más de reflexión acerca del ejemplo presentado previamente nos permite sacar las siguientes conclusiones:

• Un extremo local de $f(x)$ corresponde a una raíz de $f'(x)$, es decir, a un punto en donde $f'(x)$ cruza (o toca) al eje x. En el caso de máximo local de $f(x)$, la gráfica de $f'(x)$ pasa de arriba para abajo del eje x, y en el caso de mínimo local de $f(x)$, la gráfica de $f'(x)$ pasa de abajo para arriba del eje x.

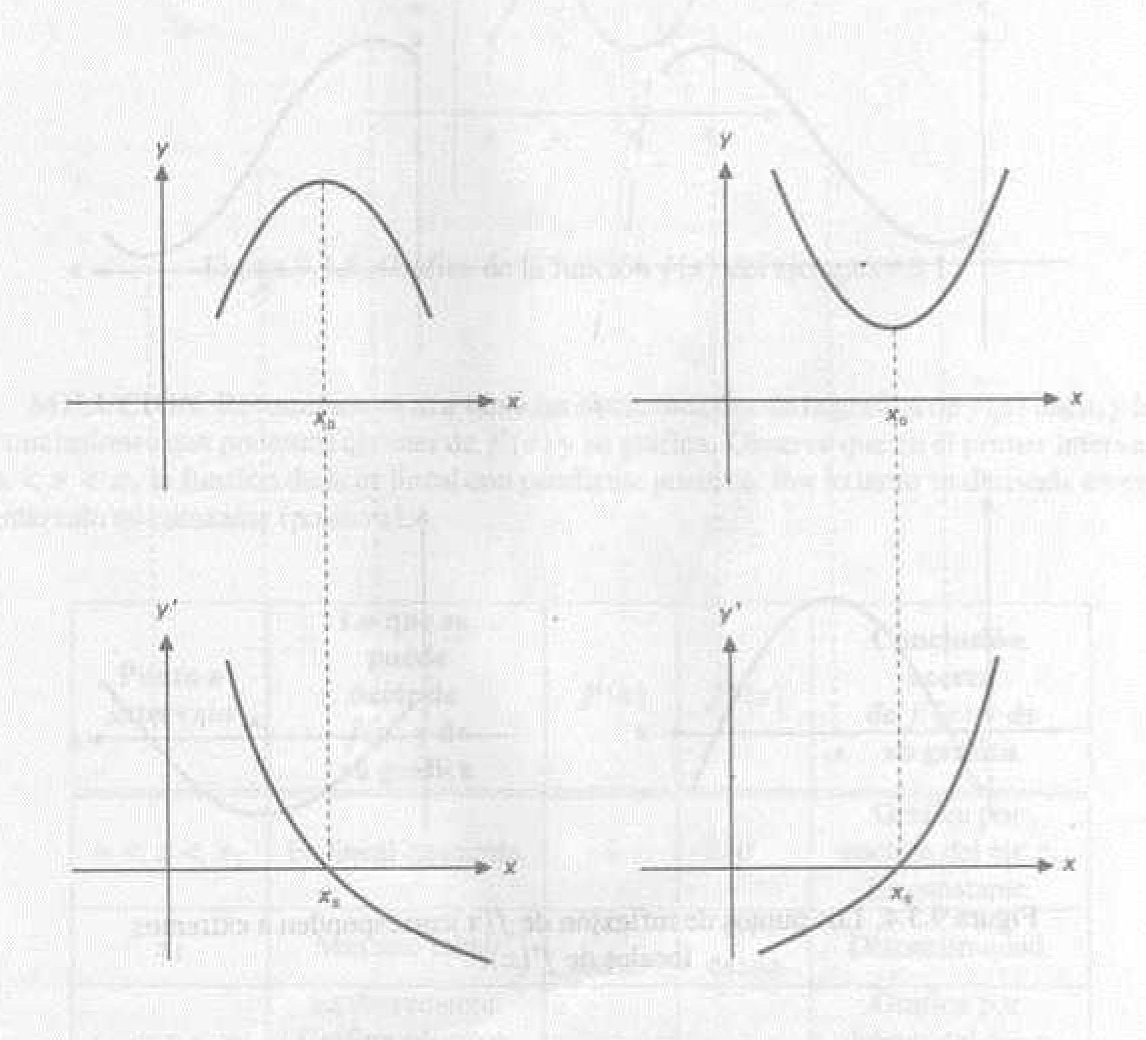


Figura 9.3.3. Los extremos locales de $f(x)$ corresponden a raíces de $f'(x)$.

• Un punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$ corresponde a un extremo local de $f'(x)$. En caso de que el punto de inflexión separe una parte cóncava hacia arriba (en la izquierda) de una parte cóncava hacia abajo (en la derecha), se tendrá un máximo local en $f'(x)$, y en el

caso de que el punto de inflexión separe una parte cóncava hacia abajo (en la izquierda) de una parte cóncava hacia arriba (en la derecha) se tendrá un mínimo local en $f'(x)$.

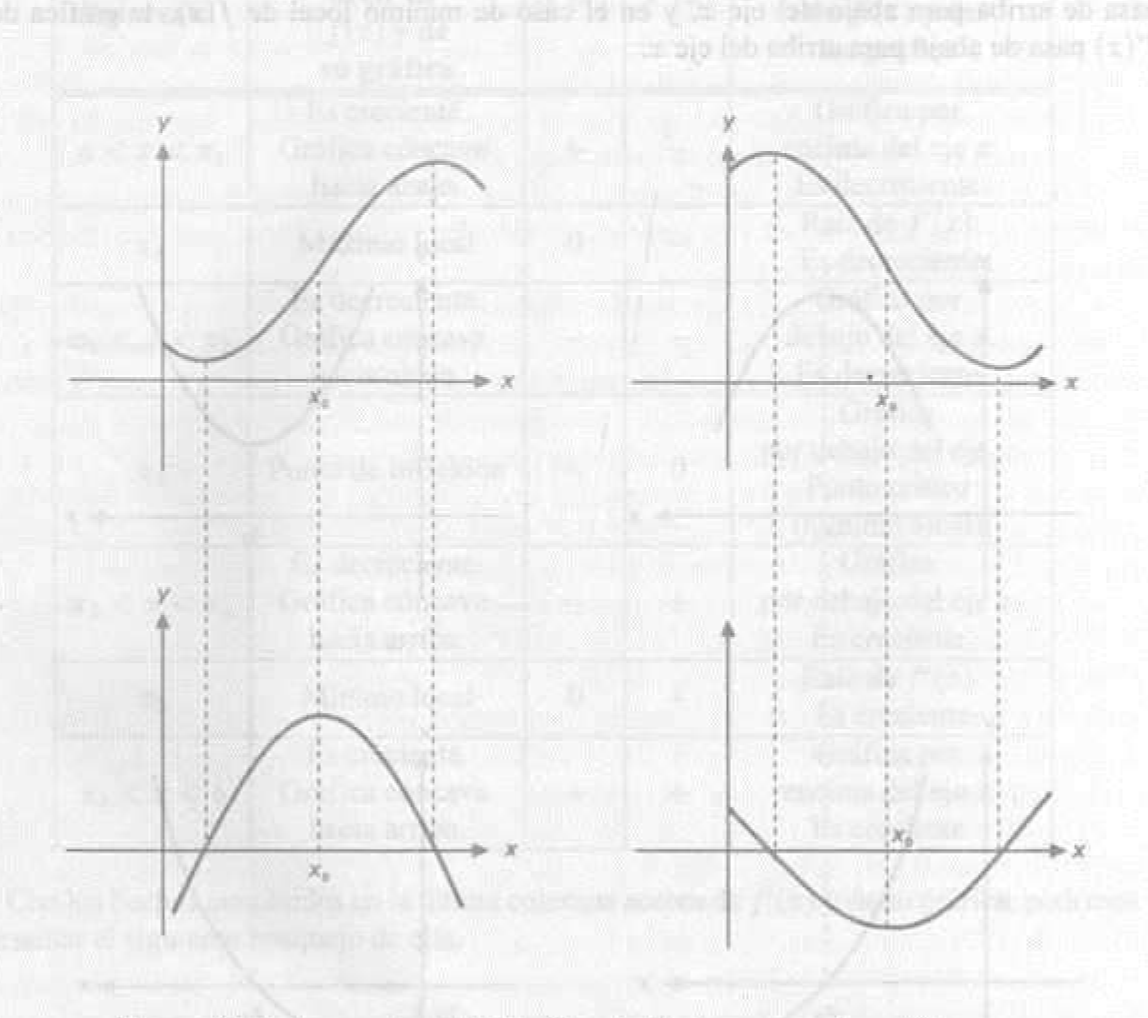


Figura 9.3.4. Los puntos de inflexión de $f(x)$corresponden a extremos locales de $f'(x)$.

Estas indicaciones de carácter general nos pueden ayudar a realizar los bosquejos de la gráfica de $f'(x)$ a partir de la gráfica de $f(x)$.

Veamos algunos ejemplos más.

EJEMPLO 9.3.1. Dada la gráfica de $f(x)$, bosquejar la gráfica de $f'(x)$.

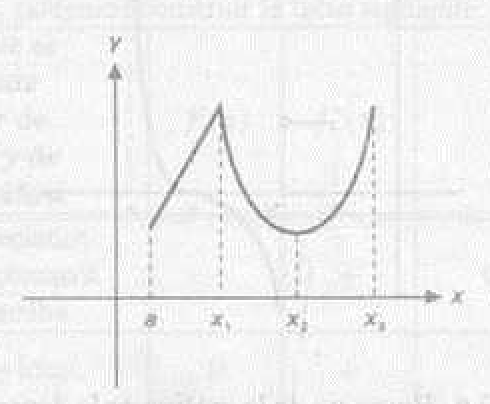


Figura 9.3.5. Gráfica de la función $f(x)$ del ejemplo 9.3.1.

SOLUCIÓN. Resumimos en una tabla las observaciones de la gráfica de $f(x)$ dada, y las conclusiones que podemos obtener de $f'(x)$ y su gráfica. Observe que en el primer intervalo $a < x < x_1$ la función dada es lineal con pendiente positiva. Por lo tanto su derivada en este intervalo es constante (positiva).

Punto o intervalo	**Lo que se puede decir de $f(x)$ y de su gráfica**	$f'(x)$	$f''(x)$	**Conclusión acerca de $f'(x)$ y de su gráfica**
$a < x < x_1$	Es lineal creciente.	+	0	Gráfica por encima del eje x. Es constante.
x_1	Máximo local.	No existe	No existe	Discontinuidad.
$x_1 < x < x_2$	Es decreciente. Gráfica cóncava hacia arriba.	−	+	Gráfica por debajo del eje x. Es creciente.
x_2	Mínimo local.	0	+	Raíz de $f'(x)$. Es creciente.
$x_2 < x < x_3$	Es creciente. Gráfica cóncava hacia arriba.	+	+	Gráfica por encima del eje x. Es creciente.

Entonces, un bosquejo de la gráfica de $f'(x)$ sería:

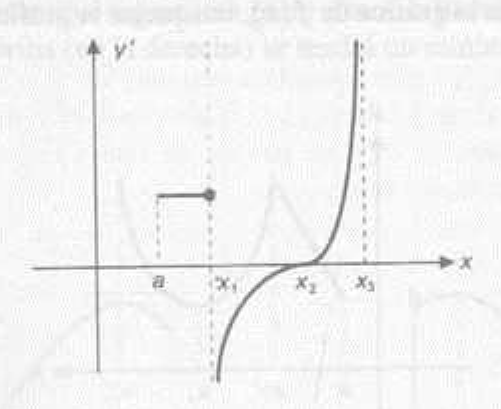


Figura 9.3.6. Bosquejo de la gráfica de la derivada de la función $f(x)$ del ejemplo 9.3.1.

EJEMPLO 9.3.2. Dada la gráfica de $f(x)$, bosquejar la gráfica de $f'(x)$.

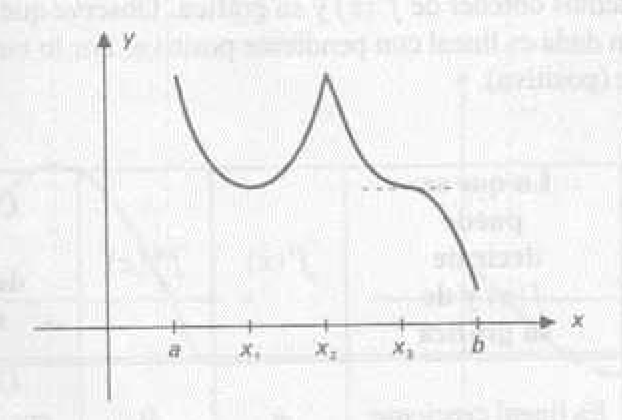


Figura 9.3.7. Gráfica de la función $f(x)$ del ejemplo 9.3.2.

SOLUCIÓN. En este ejemplo ocurre una situación nueva: en el punto x_2, en donde hay un pico en la gráfica de la función, que indica la no existencia de la derivada, se observa que la recta tangente a $f(x)$ tiende a ser vertical cuando x se aproxima a x_2 tanto por la derecha como por la izquierda. Es decir, $f'(x)$ tiende a infinito cuando x tiende a x_2. Sin embargo, observe que si $x \to x_2^+$, las rectas tangentes correspondientes son siempre de pendiente positiva (cada vez más verticales) por lo que $\lim\limits_{x \to x_2^+} f(x) = +\infty$, mientras que si $x \to x_2^-$, las rectas tangentes correspondientes son siempre de pendiente negativa (cada vez más verticales) por lo que $\lim\limits_{x \to x_2^-} f(x) = -\infty$.

Otro hecho notorio es lo que ocurre en x_3. En este punto se trata de marcar un punto de inflexión, el cual corresponderá, como ya apuntábamos en el análisis general, a un extremo local de $f'(x)$. Sin embargo, se está marcando (con la línea punteada) que la recta tangente

en este punto es horizontal, y por lo tanto $f'(x_3) = 0$. Así, el extremo local correspondiente de $f'(x)$ se alcanza en el eje x.

Con estas observaciones, podemos construir la tabla siguiente:

Punto o intervalo	**Lo que se puede decir de $f(x)$ y de su gráfica**	$f'(x)$	$f''(x)$	**Conclusión acerca de $f'(x)$ y de su gráfica**
$a < x < x_1$	Es decreciente. Gráfica cóncava hacia arriba.	$-$	$+$	Gráfica por debajo del eje x. Es creciente.
x_1	Mínimo local.	0	$+$	Raíz de $f'(x)$. Es creciente.
$x_1 < x < x_2$	Es creciente. Gráfica cóncava hacia arriba.	$+$	$+$	Gráfica por encima del eje x. Es creciente.
x_2	Máximo local.	No existe	No existe	Discontinuidad.
$x_2 < x < x_3$	Es decreciente. Gráfica cóncava hacia arriba.	$-$	$+$	Gráfica por debajo del eje x. Es creciente.
x_3	Punto de inflexión. Recta tangente horizontal.	0	0	Máximo local sobre el eje x.
$x_3 < x < b$	Es decreciente. Gráfica cóncava hacia abajo.	$-$	$-$	Gráfica por debajo del eje x. Es decreciente.

Entonces, un bosquejo de la gráfica de $f'(x)$ sería:

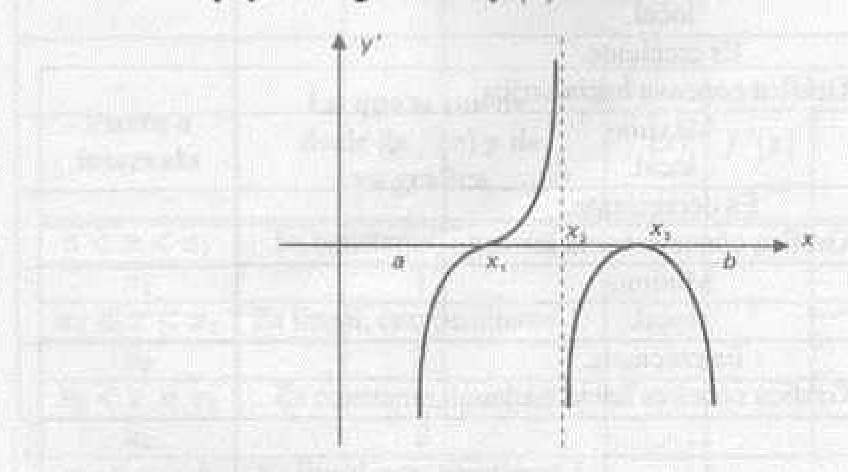


Figura 9.3.8. Bosquejo de la gráfica de la derivada de la función $f(x)$ del ejemplo 9.3.2.

★

EJERCICIOS (9.3)

En cada uno de los ejercicios 1 al 10, complete la tabla indicada y haga un bosquejo de la gráfica de la función $f(x)$ (con los datos proporcionados), así como de la gráfica de su derivada $f'(x)$ (con los datos que se deduzcan). En todos los casos se supone que la función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$.

1.

Punto o intervalo	**Lo que se puede decir de $f(x)$ y de su gráfica**	$f'(x)$	$f''(x)$	**Conclusión acerca de $f'(x)$ y de su gráfica**
$a < x < x_1$	Es lineal con pendiente 2			
x_1	Máximo local			
$x_1 < x < x_2$	Es lineal con pendiente -2			
x_2	Mínimo local			
$x_2 < x < x_3$	Es lineal con pendiente 3			
x_3	Máximo local			
$x_3 < x < b$	Es lineal con pendiente -3			

2.

Punto o intervalo	**Lo que se puede decir de $f(x)$ y de su gráfica**	$f'(x)$	$f''(x)$	**Conclusión acerca de $f'(x)$ y de su gráfica**
$a < x < x_1$	Es decreciente. Gráfica cóncava hacia arriba.			
x_1	Mínimo local.			
$x_1 < x < x_2$	Es creciente. Gráfica cóncava hacia arriba.			
x_2	Máximo local.	∞		
$x_2 < x < x_3$	Es decreciente. Gráfica cóncava hacia arriba.			
x_3	Mínimo local.			
$x_3 < x < b$	Es creciente. Gráfica cóncava hacia arriba.			

3.

Punto o intervalo	Lo que se puede decir de $f(x)$ y de su gráfica	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusión acerca de $f'(x)$ y de su gráfica
$a < x < x_1$	Es decreciente. Gráfica cóncava hacia arriba.			
x_1	Mínimo local.			
$x_1 < x < x_2$	Es creciente. Gráfica cóncava hacia arriba.			
x_2	Punto de inflexión.			
$x_2 < x < x_3$	Es creciente. Gráfica cóncava hacia abajo.			
x_3	Máximo local.			
$x_3 < x < b$	Es decreciente. Gráfica cóncava hacia abajo.			

4.

Punto o intervalo	Lo que se puede decir de $f(x)$ y de su gráfica	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusión acerca de $f'(x)$ y de su gráfica
$a < x < x_1$	Es constante, igual a 1.			
x_1	1			
$x_1 < x < x_2$	Es lineal, con pendiente 1.			
x_2	2			
$x_2 < x < x_3$	Es constante, igual a 2.			
x_3	2			
$x_3 < x < b$	Es lineal, con pendiente 1			

5.

Punto o intervalo	**Lo que se puede decir de $f(x)$ y de su gráfica**	$f'(x)$	$f''(x)$	**Conclusión acerca de $f'(x)$ y de su gráfica**
$a < x < x_1$	Es creciente. Gráfica cóncava hacia abajo.			
x_1	Máximo local.			
$x_1 < x < x_2$	Es decreciente. Gráfica cóncava hacia abajo.			
x_2	Mínimo local.	∞		
$x_2 < x < x_3$	Es creciente. Gráfica cóncava hacia abajo.			
x_3	Máximo local.			
$x_3 < x < b$	Es decreciente. Gráfica cóncava hacia abajo.			

6.

Punto o intervalo	**Lo que se puede decir de $f(x)$ y de su gráfica**	$f'(x)$	$f''(x)$	**Conclusión acerca de $f'(x)$ y de su gráfica**
$a < x < x_1$	Es creciente. Gráfica cóncava hacia abajo.			
x_1	Punto de inflexión.	0		
$x_1 < x < x_2$	Es creciente. Gráfica cóncava hacia arriba.			
x_2	Punto de inflexión.			
$x_2 < x < x_3$	Es creciente. Gráfica cóncava hacia abajo.			
x_3	Máximo local.			
$x_3 < x < b$	Es decreciente. Gráfica cóncava hacia abajo.			

7.

Punto o intervalo	**Lo que se puede decir de $f(x)$ y de su gráfica**	$f'(x)$	$f''(x)$	**Conclusión acerca de $f'(x)$ y de su gráfica**
$a < x < x_1$	Es lineal con pendiente -1.			
x_1	Mínimo local.			
$x_1 < x < x_2$	Es lineal con pendiente 1.			
x_2	3			
$x_2 < x < x_3$	Es lineal con pendiente $\frac{1}{2}$.			
x_3	4			
$x_3 < x < b$	Es lineal con pendiente $\frac{1}{4}$.			

8.

Punto o intervalo	**Lo que se puede decir de $f(x)$ y de su gráfica**	$f'(x)$	$f''(x)$	**Conclusión acerca de $f'(x)$ y de su gráfica**
$a < x < x_1$	Es creciente. Gráfica cóncava hacia arriba.			
x_1	Punto de inflexión.			
$x_1 < x < x_2$	Es creciente. Gráfica cóncava hacia abajo.			
x_2	Punto de inflexión. Tangente horizontal.			
$x_2 < x < x_3$	Es creciente. Gráfica cóncava hacia arriba.			
x_3	Punto de inflexión.			
$x_3 < x < b$	Es creciente. Gráfica cóncava hacia abajo.			

9.

Punto o intervalo	**Lo que se puede decir de $f(x)$ y de su gráfica**	$f'(x)$	$f''(x)$	**Conclusión acerca de $f'(x)$ y de su gráfica**
$a < x < x_1$	Es creciente. Gráfica cóncava hacia abajo.			
x_1	Punto de inflexión. Tangente horizontal.			
$x_1 < x < x_2$	Es creciente. Gráfica cóncava hacia arriba.			
x_2	Punto de inflexión.			
$x_2 < x < x_3$	Es creciente. Gráfica cóncava hacia abajo.			
x_3	Punto de inflexión. Tangente horizontal.			
$x_3 < x < b$	Es creciente. Gráfica cóncava hacia arriba.			

10.

Punto o intervalo	**Lo que se puede decir de $f(x)$ y de su gráfica**	$f'(x)$	$f''(x)$	**Conclusión acerca de $f'(x)$ y de su gráfica**
$a < x < x_1$	Es creciente. Gráfica cóncava hacia arriba.			
x_1	Máximo local.	∞		
$x_1 < x < x_2$	Es decreciente. Gráfica cóncava hacia arriba.			
x_2	Mínimo local.			
$x_2 < x < x_3$	Es creciente. Gráfica cóncava hacia arriba.			
x_3	Máximo local.	∞		
$x_3 < x < b$	Es decreciente. Gráfica cóncava hacia arriba.			

9.4 ASÍNTOTAS

Para poder hacer un análisis completo de una función, y lograr un bosquejo adecuado de su gráfica, necesitamos considerar la posibilidad de existencia de asíntotas de la función. De manera intuitiva, una asíntota es una recta "que se confunde con la gráfica de la función en puntos muy alejados del origen". Una manera común en que esto puede ocurrir es que la gráfica de la función "se pegue cada vez más a tal recta a medida que se aleja del origen". Esto es lo que ocurre, por ejemplo, con los ejes coordenados y la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$. El eje x es una asíntota (horizontal) de la gráfica de esta función porque a medida que nos alejamos del origen (en ambos sentidos) la gráfica de la función se encuentra cada vez más pegada al eje (por arriba, para equis positivas, y por abajo, para equis negativas). También el eje y es una asíntota (vertical) de la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ porque a medida que nos alejamos del origen la gráfica de la función se encuentra más pegada al eje y (por la derecha, en el primer cuadrante, y por la izquierda, en el tercero).

Una **asíntota vertical** es una recta $x = a$ para la cual se tiene:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty \quad \text{o} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty,$$

(en donde ∞ puede ser $+\infty$ o $-\infty$).

Una **asíntota horizontal** es una recta $y = L$ para la cual se tiene:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = L \quad \text{o} \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = L.$$

Por ejemplo, en la gráfica de función en la figura 9.3.1, se tienen dos asíntotas verticales $x = a$ y $x = b$, pues $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to b} f(x) = -\infty$, respectivamente, y dos asíntotas horizontales $y = L$ y $y = M$, porque $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = M$.

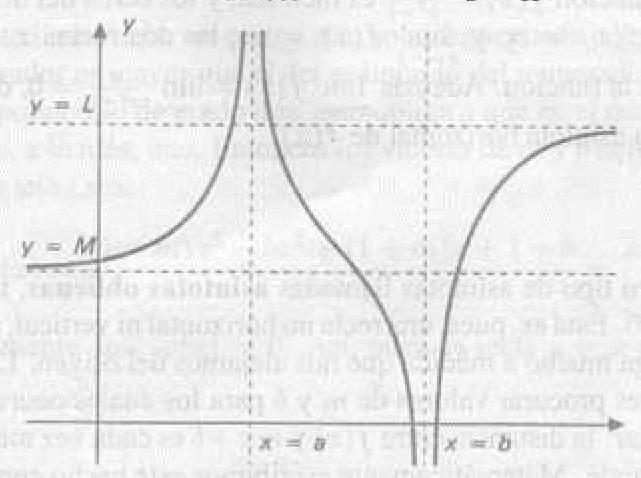


Figura 9.4.1. La gráfica de una función con asíntotas verticales en $x = a$ y $x = b$, y asíntotas horizontales en $y = L$ y $y = M$.

EJEMPLO 9.4.1. Determine las asíntotas de la función $f(x) = \frac{5x^2+6}{x^2-1}$.

SOLUCIÓN. Se trata de una función racional, cuyo denominador se anula en $x = -1$ y en $x = 1$. Como $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to -1} f(x) = \infty$, las rectas $x = -1$ y $x = 1$ son asíntotas verticales. Por otro lado, como $\lim_{x\to\infty} f(x) = 5$, la recta $y = 5$ es una asíntota horizontal.

★

EJEMPLO 9.4.2. Determine las asíntotas de la función $f(x) = \frac{2x^2-12x+16}{x^2-5x+6}$.

SOLUCIÓN. Como en el ejemplo anterior se trata de una función racional, cuyo denominador $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ se anula en $x = 2$ y $x = 3$. Para este último valor de x se tiene: $\lim_{x\to 3} f(x) = \infty$, pues el numerador $2x^2 - 12x + 16$ tiende a -2 (que es diferente de cero) y el numerador tiende a 0, cuando x tiende a 3. Sin embargo, observe que:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{2x^2-12x+16}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2} \frac{2(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to 2} \frac{2(x-4)}{x-3} = \frac{2(2-4)}{2-3} = 4,$$

de modo que la recta $x = 2$ *no* es una asíntota vertical de la función dada (el límite $\lim_{x\to 2} f(x)$ no es infinito). Por último, como $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-12x+16}{x^2-5x+6} = 2$, la recta $y = 2$ es una asíntota horizontal de $f(x)$.

★

EJEMPLO 9.4.3. Determine las asíntotas de la función $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$.

SOLUCIÓN. La función $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ es racional, y los ceros del denominador son $x = \pm 1$. Puesto que $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to -1} f(x) = \infty$, las dos rectas $x = -1$ y $x = 1$ son asíntotas verticales de la función. Además $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0$, de modo que la recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de $f(x)$.

★

Existen todavía otro tipo de asíntotas llamadas **asíntotas oblicuas**, las cuales son rectas $y = mx+b$, con $m \neq 0$. Ésta es, pues, una recta no horizontal ni vertical, a la que la gráfica de la función $f(x)$ se pega mucho a medida que nos alejamos del origen. La idea al determinar este tipo de asíntotas es procurar valores de m y b para los cuales ocurra justamente lo que acabamos de mencionar: la distancia entre $f(x)$ y $mx + b$ es cada vez más pequeña a medida que x se hace muy grande. Matemáticamente escribimos este hecho como:

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0.$$

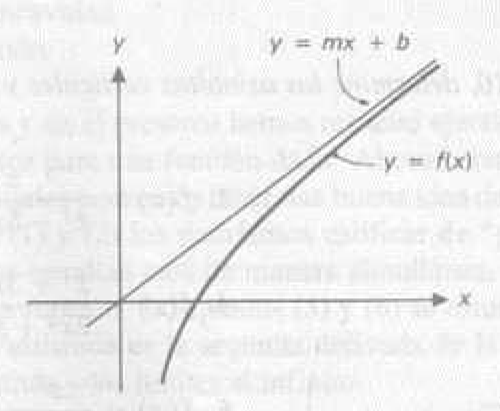


Figura 9.4.2. Una asíntota oblicua para la función $f(x)$.

EJEMPLO 9.4.4. Verifique que la función $f(x) = \frac{x^3+x+1}{x^2-1}$ tenga una asíntota oblicua. Determinarla.

SOLUCIÓN. Procuramos valores de m y b tales que:

$$0 = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - (mx+b)\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3+x+1}{x^2-1} - (mx+b)\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x+1-(mx+b)(x^2-1)}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{(1-m)x^3 - bx^2 + (1+m)x + 1 + b}{x^2-1}.$$

El límite anterior es un límite al infinito de la función racional

$$\varphi(x) = \frac{(1-m)x^3 - bx^2 + (1+m)x + 1 + b}{x^2-1}.$$

Sabemos que este límite debe ser cero y esto solamente puede ocurrir si el grado del polinomio del denominador es mayor que el del polinomio del numerador. Como en el denominador tenemos un polinomio de grado dos, esto obliga a que en el numerador deba haber un polinomio de grado, a lo más, uno. Entonces los valores de m y b deben ser: $m = 1$ y $b = 0$, para que la función $\varphi(x)$ sea:

$$\varphi(x) = \frac{(1-m)x^3 - bx^2 + (1+m)x + 1 + b}{x^2-1} = \frac{2x+1}{x^2-1}$$

y se tenga efectivamente $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$. Así, pues, la recta $y = x$ es una asíntota oblicua para la función $f(x) = \frac{x^3+x+1}{x^2-1}$.

★

EJERCICIOS (9.4)

En los ejercicios 1 al 10, determine las asíntotas verticales y horizontales de la función dada.

1. $f(x) = \arctan x.$

2. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 5x + 6}.$

3. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}.$

4. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{2x^2 + x + 2}.$

5. $f(x) = \dfrac{3}{x(x-1)(x-2)}.$

6. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3 - 1}.$

7. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^3 - 1}.$

8. $f(x) = \sqrt{x^3 - 1} - \sqrt{x^3 - 2}.$

9. $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt{x^3 + x^2 + 2}.$

10. $f(x) = \frac{1}{\cos x - 1}.$

En los ejercicios 11 al 15, determine la asíntota oblicua de la función dada.

11. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}.$

12. $f(x) = \dfrac{2x^3 + 3x + 2}{x^2 + x + 1}.$

13. $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1}.$

14. $f(x) = \dfrac{x^4 + x^2 + 1}{x^3 + 1}.$

15. $f(x) = \dfrac{x^4 + 3x + 4}{x^3 + 2x + 3}.$

9.5 ANÁLISIS GENERAL DE LAS FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS

En esta sección vamos a relacionar muchos de los temas que hemos estudiado desde el primer capítulo, con el fin de "escudriñarle las entrañas" a las funciones. No habrá nada nuevo: simplemente pondremos en un solo tipo de Problemas (con P mayúscula) muchos problemas (con p minúscula) que ya sabemos cómo resolver. Los análisis que haremos de las funciones en esta sección incluirán información sobre:

(1) Su dominio.

(2) La continuidad (por ejemplo, indicar los puntos donde la función es discontinua).

(3) Los intervalos de monotonía.

(4) Los extremos locales.

(5) Los intervalos de concavidad.
(6) Los puntos de inflexión.
(7) Las asíntotas.

En los capítulos pasados y en el presente hemos resuelto ejercicios en que se pide determinar alguno de estos puntos para una función dada. Ahora haremos este tipo de "análisis exhaustivos", fruto de los cuales podremos tener una buena idea del comportamiento gráfico de la función. Los puntos (1) y (2) los podríamos calificar de "preliminares" en el análisis. Los puntos (3) y (4) se estudian casi de manera simultánea. La herramienta utilizada es la primera derivada de la función. Los puntos (5) y (6) se estudian también en forma simultánea. La herramienta utilizada es la segunda derivada de la función. El punto (7) se estudia con los límites infinitos y los límites al infinito.

EJEMPLO 9.5.1. Hacer un análisis general de la función $f(x) = x^2(3 - x)$.
SOLUCIÓN.

I) *Preliminares.* Puesto que la función dada es polinomial está definida y es continua en todo **R**.

II) *Lo que se puede obtener con la primera derivada.* Investiguemos los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, así como los extremos locales (todo este paquete de información lo obtenemos estudiando la primera derivada). Se tiene: $f'(x) = 6x - 3x^2$, de modo que los puntos críticos son las raíces de la ecuación $f'(x) = 3x(2 - x) = 0$, es decir, $x_1 = 0$ y $x_2 = 2$. Para investigar los intervalos de monotonía dividimos la recta en los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ y $(2, \infty)$, marcados por los puntos críticos. En cada uno de ellos tomamos un punto representativo y evaluamos la derivada. El signo del resultado que obtengamos será el signo que tenga la derivada en todo el intervalo correspondiente. Por ejemplo, tomamos $-1 \in (-\infty, 0)$, para el cual $f'(-1) = 6(-1) - 3(-1)^2 = -9 < 0$. Entonces la función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$. Tomamos $1 \in (0, 2)$, para el cual $f'(1) = 6(1) - 3(1)^2 = 3 > 0$. Entonces la función es creciente en el intervalo $(0, 2)$. Tomamos $3 \in (2, \infty)$, para el cual $f'(3) = 6(3) - 3(3)^2 = -9 < 0$. Entonces la función es decreciente en el intervalo $(2, \infty)$. Si usamos el criterio de la primera derivada ya podemos concluir en este momento que en $x = 0$ la función tiene un mínimo local (pues la derivada pasa de $+$ a $-$), y en $x = 2$ tiene un máximo local (pues la derivada pasa de $-$ a $+$). A manera de resumen de este apartado tenemos que:

La función es decreciente en $(-\infty, 0)$ y en $(2, \infty)$.
La función es creciente en $(0, 2)$.
La función tiene un mínimo local en $x = 0$, en donde $f(0) = 0$.
La función tiene un máximo local en $x = 2$, en donde $f(2) = (2)^2(3 - 2) = 4$.

III) *Lo que se puede obtener con la segunda derivada.* Vayamos ahora al estudio de los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión. La segunda derivada de la función es $f''(x) = 6 - 6x$. Los posibles puntos de inflexión son las raíces de $f''(x) = 6 - 6x = 0$, o sea $x = 1$. La recta real queda partida por este punto en los intervalos $(-\infty, 1)$ y $(1, \infty)$. Para ver la concavidad de la gráfica de la función en cada uno de estos intervalos tomamos un punto en cada uno de ellos y evaluamos $f''(x)$. El signo obtenido es el signo de $f''(x)$ en todo el intervalo. Tomamos, por ejemplo, $0 \in (-\infty, 1)$, para el cual $f''(0) = 6 > 0$, y entonces la gráfica de la función es cóncava hacia arriba en el intervalo $(-\infty, 1)$. Tomamos

ahora $2 \in (1, \infty)$, para el cual $f''(2) = 6 - 6(2) = -6 < 0$, y entonces la gráfica de la función es cóncava hacia abajo en el intervalo $(1, \infty)$. De aquí vemos también que en $x = 1$ hay efectivamente un cambio de concavidad en la gráfica de la función, y que es, por tanto, un punto de inflexión. Resumiendo:

La gráfica de la función es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 1)$.

La gráfica de la función es cóncava hacia abajo en $(1, \infty)$.

Hay un punto de inflexión en $x = 1$, en donde $f(1) = (1)^2(3 - 1) = 2$.

IV) *Las asintotas.* Es un hecho general que una función polinomial no tiene asíntotas de ningún tipo.

Los resultados esparcidos en los apartados (I) al (IV) conviene tenerlos juntos en una tabla. Tomaremos siempre la recta de los reales y la marcaremos con los puntos en donde, en nuestro análisis, hayamos detectado "algo" (por ejemplo, una discontinuidad, un extremo local, un punto de inflexión, etcétera.) En este ejemplo, pasó algo en los puntos $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$. Haremos entonces una tabla para indicar estos puntos y los intervalos en que éstos dejan dividida la recta real (o el dominio de la función), así como los valores de la función (en los puntos), los signos de la primera y segunda derivada, y para escribir las observaciones que de esta información se obtenga sobre el crecimiento o decrecimiento de la función, y el sentido de concavidad de su gráfica. Usaremos las abreviaturas:

Abreviatura	**Significado**
$f \nearrow$	La función $f(x)$ es creciente.
$f \searrow$	La función $f(x)$ es decreciente.
$f \smile$	La gráfica de la función $f(x)$ es cóncava hacia arriba.
$f \frown$	La gráfica de la función $f(x)$ es cóncava hacia abajo.

Punto o intervalo	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	**Observaciones**
$x < 0$		$-$	$+$	$f \searrow, f \smile$
$x = 0$	0	0	$+$	Mínimo local.
$0 < x < 1$		$+$	$+$	$f \nearrow, f \smile$
$x = 1$	2	$+$	0	Punto de inflexión.
$1 < x < 2$		$+$	$-$	$f \nearrow, f \frown$
$x = 2$	4	0	$-$	Máximo local.
$x > 2$		$-$	$-$	$f \searrow, f \frown$

Cerramos nuestro análisis mostrando la gráfica de la función, en la cual se indican los puntos importantes de aquélla (en este caso los extremos locales y puntos de inflexión):

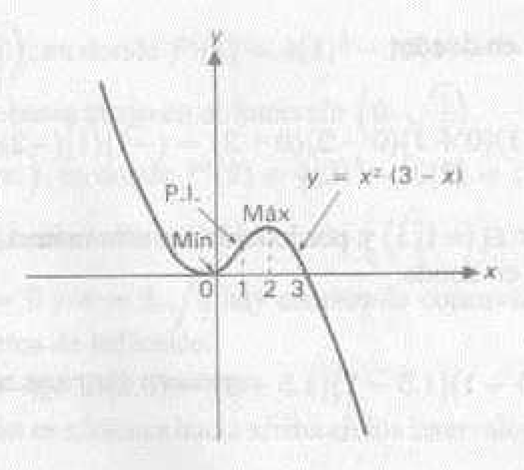


Figura 9.5.1. La gráfica de la función del ejemplo 9.5.1.

★

EJEMPLO 9.5.2. Hacer un análisis general de la función $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x$.

SOLUCIÓN.

I) *Preliminares*. Se trata de una función polinomial, de modo que su dominio es $\mathbf{R}$, en donde es continua.

II) *Lo que se puede obtener con la primera derivada*. La primera derivada de la función dada es $f'(x) = \frac{1}{5}(5x^4) - \frac{5}{3}(3x^2) + 4 = x^4 - 5x^2 + 4$. Los puntos críticos los obtenemos al resolver la ecuación $f'(x) = 0$, la cual se puede escribir como:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2) = 0$$

de donde se obtienen los cuatro puntos críticos $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$ y $x_4 = 2$. La recta queda separada en cinco intervalos de signo constante de la derivada, a saber $(-\infty, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, \infty)$. Para examinar el signo de la derivada en cada uno de ellos tomamos, como siempre, un punto representativo del intervalo y evaluamos la derivada en él. El signo del resultado que obtengamos es el signo de la derivada en el intervalo considerado.

Tomamos $-3 \in (-\infty, -2)$, en donde

$$f'(-3) = (-3 - 1)(-3 + 1)(-3 - 2)(-3 + 2) = (-4)(-2)(-5)(-1) = 40 > 0.$$

Entonces $f'(x) > 0$ para $x \in (-\infty, -2)$ y, por lo tanto, en este intervalo la función es creciente.

Tomamos $-1.5 \in (-2, -1)$, en donde:

$$f'(-1.5) = (-1.5 - 1)(-1.5 + 1)(-1.5 - 2)(-1.5 + 2) = (-2.5)(-0.5)(-3.5)(0.5)$$

$$= -\frac{35}{16} < 0.$$

Entonces $f'(x) < 0$ para $x \in (-2, -1)$ y, por lo tanto, en este intervalo la función es decreciente.

Tomamos $0 \in (-1, 1)$, en donde:

$$f'(0) = (0-1)(0+1)(0-2)(0+2) = (-1)(1)(-2)(2) = 4 > 0.$$

Entonces $f'(x) > 0$ para $x \in (-1, 1)$ y, por lo tanto, en este intervalo la función es creciente.

Tomamos $1.5 \in (1, 2)$, en donde:

$$f'(1.5) = (1.5-1)(1.5+1)(1.5-2)(1.5+2) = (0.5)(2.5)(-0.5)(3.5) = -\frac{35}{16} < 0.$$

Entonces $f'(x) < 0$ para $x \in (1, 2)$ y, por lo tanto, en este intervalo la función es decreciente.

Tomamos finalmente $3 \in (2, \infty)$, en donde:

$$f'(3) = (3-1)(3+1)(3-2)(3+2) = (2)(4)(1)(5) = 40 > 0.$$

Entonces $f'(x) > 0$ para $x \in (2, \infty)$ y, por lo tanto, en este intervalo la función es creciente.

Podemos obtener información de este análisis sobre los extremos locales de la función: el criterio de la primera derivada nos dice que en $x_1 = -2$ (en donde la derivada pasa de + a −) hay un máximo local, en $x_2 = -1$ (en donde la derivada pasa de − a +) hay un mínimo local, en $x_3 = 1$ (en donde la derivada pasa de + a −) hay un máximo local, y en $x_4 = 2$ (en donde la derivada pasa de − a +) hay un mínimo local.

En resumen, de acuerdo con este apartado hemos concluido que:

La función es creciente en $(-\infty, -2)$, en $(-1, 1)$ y en $(2, \infty)$.

La función es decreciente en $(-2, -1)$ y en $(1, 2)$.

Hay máximos locales en $x_1 = -2$, en donde $f(-2) = \frac{1}{5}(-2)^5 - \frac{5}{3}(-2)^3 + 4(-2) \approx -1.067$, y en $x_3 = 1$, en donde $f(1) = \frac{1}{5}(1)^5 - \frac{5}{3}(1)^3 + 4(1) \approx 2.533$.

Hay mínimos locales en $x_2 = -1$, en donde $f(-1) = \frac{1}{5}(-1)^5 - \frac{5}{3}(-1)^3 + 4(-1) \approx -2.533$, y en $x_4 = 2$, en donde $f(2) = \frac{1}{5}(2)^5 - \frac{5}{3}(2)^3 + 4(2) \approx 1.067$.

III) *Lo que se puede obtener con la segunda derivada.* La segunda derivada de la función es $f''(x) = (f'(x))' = (x^4 - 5x^2 + 4)' = 4x^3 - 10x$. Los posibles puntos de inflexión los obtenemos al resolver $f''(x) = 0$, es decir, $2x(2x^2 - 5) = 0$, cuyas raíces son $x = 0$, y $x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$. Estos tres puntos dividen a la recta en cuatro intervalos, a saber $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, 0\right)$, $\left(0, \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ y $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \infty\right)$. Investiguemos el signo que tiene la segunda derivada en cada uno de estos intervalos.

Tomamos $-2 \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$, en donde $f''(-2) = 4(-2)^3 - 10(-2) = -12 < 0$. Entonces la gráfica de la función es cóncava hacia abajo en el intervalo $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$.

Tomamos $-1 \in \left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, 0\right)$, en donde $f''(-1) = 4(-1)^3 - 10(-1) = 6 > 0$. Entonces la gráfica de la función es cóncava hacia arriba en el intervalo $\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, 0\right)$.

Tomamos $1 \in \left(0, \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$, en donde $f''(1) = 4(1)^3 - 10(1) = -6 < 0$. Entonces la gráfica de la función es cóncava hacia abajo en el intervalo $\left(0, \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$.

Tomamos $2 \in \left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \infty\right)$, en donde $f''(2) = 4(2)^3 - 10(2) = 12 > 0$. Entonces la gráfica de la función es cóncava hacia arriba en el intervalo $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \infty\right)$.

En los tres puntos $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$ hay cambio de concavidad de la curva. Entonces, estos tres puntos son puntos de inflexión.

Como resumen de este apartado tenemos:

La gráfica de la función es cóncava hacia arriba en los intervalos $\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, 0\right)$ y $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \infty\right)$.

La gráfica de la función es cóncava hacia abajo en los intervalos $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ y $\left(0, \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$.

Hay puntos de inflexión en $x = 0$, en donde $f(0) = 0$, en $x = -\sqrt{\frac{5}{2}}$, en donde $f\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}\right) \approx -1.713$ y en $x = \sqrt{\frac{5}{2}}$, en donde $f\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right) \approx 1.713$.

IV) *Asíntotas*. Como fue mencionado en el ejemplo anterior, la función estudiada $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x$, al ser polinomial, no tiene asíntotas.

Nuestro resumen del análisis que hemos hecho lo presentamos en el siguiente cuadro. Tomaremos como valor aproximado de $\sqrt{\frac{5}{2}}$ a 1.58.

Punto o intervalo	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	**Observaciones**
$x < -2$		+	−	$f \nearrow . f \frown .$
$x = -2$	−1.067	0	−	Máximo local.
$-2 < x < -1.58$		−	−	$f \searrow . f \frown .$
$x = -1.58$	−1.713	−	0	Punto de inflexión.
$-1.58 < x < -1$		−	+	$f \searrow . f \smile .$
$x = -1$	−2.533	0	+	Mínimo local.
$-1 < x < 0$		+	+	$f \nearrow . f \smile .$
$x = 0$	0	+	0	Punto de inflexión.
$0 < x < 1$		+	−	$f \nearrow . f \frown .$
$x = 1$	2.533	0	−	Máximo local.
$1 < x < 1.58$		−	−	$f \searrow . f \frown .$
$x = 1.58$	1.713	−	0	Punto de inflexión.
$1.58 < x < 2$		−	+	$f \searrow . f \smile .$
$x = 2$		0	+	Mínimo local.
$x > 2$	1.067	+	+	$f \nearrow . f \smile .$

La gráfica de la función se presenta en la figura 9.5.2.

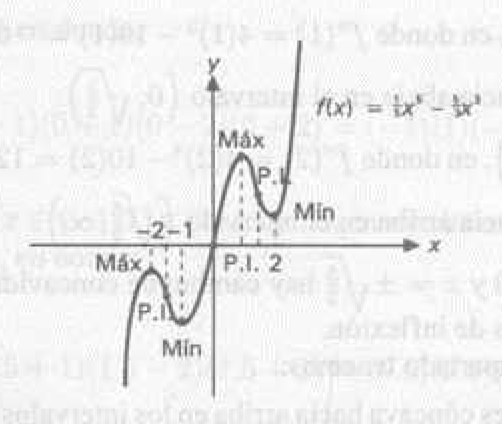


Figura 9.5.2. La gráfica de la función del ejemplo 9.5.2.

EJEMPLO 9.5.3. Hacer un análisis general de la función $f(x) = x - 5\arctan x$.
SOLUCIÓN.

I) *Preliminares*. La función está definida y es continua en todos los reales. Además, es una función impar, pues

$$f(-x) = -x - 5\arctan(-x) = -x - 5(-\arctan x) = -x + 5\arctan x$$

$$= -(x - 5\arctan x) = -f(x),$$

de modo que su gráfica deberá ser simétrica respecto del origen.

II) *Lo que se puede obtener con la primera derivada.* Investiguemos los intervalos de monotonía y los extremos locales de la función. Su derivada es:

$$f'(x) = 1 - \frac{5}{1+x^2} = \frac{x^2-4}{x^2+1},$$

de tal modo que los puntos en donde $f'(x) = 0$ son las raíces de la ecuación $x^2 - 4 = 0$, es decir, $x_1 = -2$ y $x_2 = 2$. La recta queda dividida en tres intervalos de signo constante de $f'(x)$, a saber $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ y $(2, \infty)$.

Tomamos el valor $-3 \in (-\infty, -2)$, para el cual $f'(-3) = \frac{(-3)^2-4}{(-3)^2+1} = \frac{1}{2} > 0$. Así, $f'(x) > 0$ para toda x en el intervalo $(-\infty, -2)$.

Tomamos el valor $0 \in (-2, 2)$, para el cual $f'(0) = -4 < 0$. Así, $f'(x) < 0$ para toda x en el intervalo $(-2, 2)$.

Tomamos el valor $3 \in (2, \infty)$, para el cual $f'(3) = \frac{(3)^2-4}{(3)^2+1} = \frac{1}{2} > 0$. Así, $f'(x) > 0$ para toda x en el intervalo $(2, \infty)$.

Entonces concluimos de este primer apartado que la función es creciente en los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(2, \infty)$, y decreciente en el intervalo $(-2, 2)$. De aquí, se concluye también que en $x = -2$ la función tiene un máximo local, con $f(-2) = -2 - 5\arctan(-2) \approx 3.53574$, y que en $x = 2$ hay un mínimo local, con $f(2) = 2 - 5\arctan(2) \approx -3.53574$.

III) *Lo que se puede obtener con la segunda derivada.* La segunda derivada de $f(x)$ es:

$$f''(x) = \left(\frac{x^2-4}{x^2+1}\right)' = \frac{(x^2+1)(2x)-(x^2-4)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{10x}{(x^2+1)^2}.$$

La única raíz de $f''(x) = 0$ es $x = 0$. Resulta claro que para $x < 0$ se tiene $f''(x) < 0$ y para $x > 0$ se tiene $f''(x) > 0$, de modo que efectivamente $x = 0$ es un punto de inflexión, con $f(0) = 0$. La gráfica de la función es cóncava hacia arriba en $\mathbb{R}^+$ y cóncava hacia abajo en $\mathbb{R}^-$.

IV) *Asíntotas.* La función $f(x) = x - 5\arctan x$ no tiene asíntotas, pues no hay valor alguno a de x para el cual $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ (por esta razón no hay asíntotas verticales), y, además, el límite $\lim_{x\to\infty} f(x)$ es infinito (por lo cual no hay asíntotas horizontales).

Resumimos los resultados de nuestro análisis en el siguiente cuadro.

Punto o intervalo	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Observaciones
$x < -2$		$+$	$-$	$f\nearrow, f\frown$.
$x = -2$	3.53574	0	$-$	Máximo local.
$-2 < x < 0$		$-$	$-$	$f\searrow, f\frown$.
$x = 0$	0	$-$	0	Punto de inflexión.
$0 < x < 2$		$-$	$+$	$f\searrow, f\smile$.
$x = 2$	-3.53574	0	$+$	Mínimo local.
$x > 2$		$+$	$+$	$f\nearrow, f\smile$.

La gráfica de la función $f(x) = x - 5\arctan x$ es la siguiente.

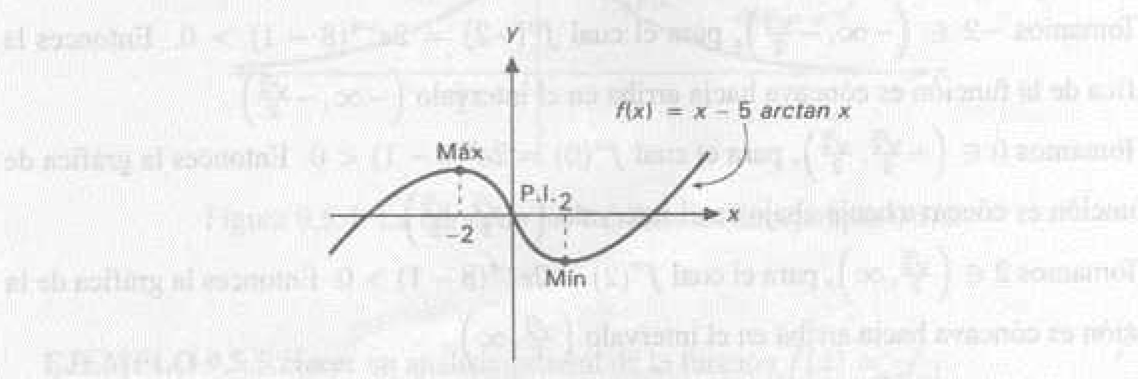


Figura 9.5.3. La gráfica de la función del ejemplo 9.5.3.

★

EJEMPLO 9.5.4. Hacer un análisis general de la función $f(x) = e^{-x^2}$.

SOLUCIÓN.

I) *Preliminares.* La función está definida y es continua en todos los reales. Además, la función es par, pues:

$$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x),$$

de modo que su gráfica será simétrica respecto del eje y.

II) *Lo que se puede obtener con la primera derivada.* Investiguemos los intervalos de monotonía y los extremos locales de la función. La derivada de la función es:

$$f'(x) = e^{-x^2}(-2x) = -2xe^{-x^2}.$$

La ecuación $f'(x) = -2xe^{-x^2} = 0$ tiene solamente la raíz $x = 0$ (pues la función exponencial siempre es positiva). Para $x < 0$ se tiene $f'(x) = -2xe^{-x^2} > 0$, y para $x > 0$ se tiene $f'(x) = -2xe^{-x^2} < 0$, de modo que la función dada es creciente en $\mathbf{R}^-$ y decreciente en $\mathbf{R}^+$, teniendo un máximo local en $x = 0$, para el cual $f(0) = e^0 = 1$.

III) *Lo que se puede obtener con la segunda derivada.* La segunda derivada de la función es:

$$f''(x) = \left(-2xe^{-x^2}\right)' = -2xe^{-x^2}(-2x) - 2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1).$$

Las raíces de la ecuación $f''(x) = 0$ son las soluciones de $2x^2 - 1 = 0$, es decir $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. En estos puntos se encuentran los posibles puntos de inflexión. La recta de los reales queda dividida en tres intervalos de signo constante de la segunda derivada, a saber $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$.

Tomamos $-2 \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, para el cual $f''(-2) = 2e^{-4}(8-1) > 0$. Entonces la gráfica de la función es cóncava hacia arriba en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Tomamos $0 \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, para el cual $f''(0) = 2e^0(0-1) < 0$. Entonces la gráfica de la función es cóncava hacia abajo en el intervalo $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Tomamos $2 \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$, para el cual $f''(2) = 2e^{-4}(8-1) > 0$. Entonces la gráfica de la función es cóncava hacia arriba en el intervalo $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$.

Los puntos $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ son efectivamente puntos de inflexión, para los cuales $f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{-\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.6065$.

IV) *Asíntotas.* No hay asíntotas verticales, pero, si usamos que el límite $\lim\limits_{x\to\infty} e^{x^2}$ es infinito (recuerde la gráfica de la función exponencial: esta función es siempre creciente), entonces el límite $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{e^{x^2}}\right)$ será igual a cero. De modo, pues, que la recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de la gráfica de la función.

Resumimos nuestro análisis en el cuadro siguiente.

Punto o intervalo	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Observaciones
$x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$		+	+	$f \nearrow, f \smile$.
$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.6065	+	0	Punto de inflexión.
$-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 0$		+	−	$f \nearrow, f \frown$.
$x = 0$	1	0	−	Máximo local.
$0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$		−	−	$f \searrow, f \frown$.
$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$	0.6065	−	0	Punto de inflexión.
$x > \frac{\sqrt{2}}{2}$		−	+	$f \searrow, f \smile$.

La gráfica de la función $f(x) = e^{-x^2}$ es conocida como "curva de probabilidades" y es de fundamental importancia en la teoría de probabilidades y estadística matemática.

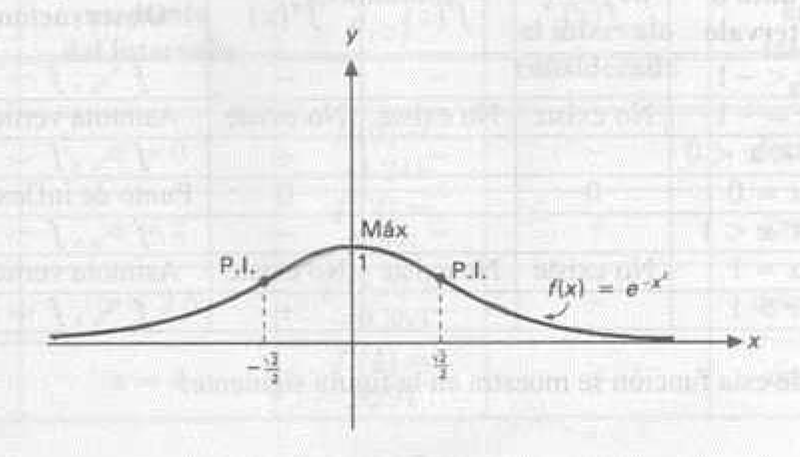


Figura 9.5.4. La curva de probabilidades del ejemplo 9.5.4.

EJEMPLO 9.5.5. Hacer un análisis general de la función $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$.

SOLUCIÓN.

I) *Preliminares.* La función dada es racional, pues su dominio es el de todos los reales excepto los ceros del denominador, es decir, todos los reales excepto las soluciones de $x^2 - 1 = 0$ que son $x = \pm 1$. Así, el dominio de $f(x)$ es $\mathrm{R} - \{-1, 1\}$. Esta función es continua en todo su dominio (como todas las funciones racionales). Además, se trata de una función impar, pues:

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x}{x^2-1} = -f(x),$$

de modo que su gráfica debe ser simétrica respecto del origen de coordenadas.

II) *Lo que se puede obtener con la primera derivada.* La derivada de $f(x)$ es:

$$f'(x) = \frac{(x^2-1)(1) - x(2x)}{(x^2-1)^2} = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}.$$

No existe valor x en el dominio de la función que anule la derivada (la ecuación $x^2+1=0$ no tiene raíces reales). De hecho, como $x^2+1>0$ para todo $x \in \mathbf{R}$, y el denominador $(x^2-1)^2$ es siempre positivo para toda x en el dominio de la función, tenemos que $f'(x) = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} < 0$ para toda x del dominio $\mathbf{R} - \{-1, 1\}$. Entonces la función $f(x)$ es decreciente en todo su dominio (y por tanto, no tiene extremos locales).

III) *Lo que se puede obtener con la segunda derivada.* En el ejemplo 9.2.5 obtuvimos que la gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ es cóncava hacia arriba en los intervalos $(-1, 0)$ y $(1, \infty)$, y es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$, y que en $x = 0$ hay un punto de inflexión.

IV) *Asíntotas.* En el ejemplo 9.4.3 obtuvimos que la función $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ tiene asíntotas verticales en $x = -1$ y $x = 1$, y una asíntota horizontal en $y = 0$ (el eje x).

En resumen, el análisis de esta función nos reporta los siguientes resultados.

Punto o intervalo	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	**Observaciones**
$x < -1$		$-$	$-$	$f \searrow, f \frown$.
$x = -1$	No existe	No existe	No existe	Asíntota vertical.
$-1 < x < 0$		$-$	$+$	$f \searrow, f \smile$.
$x = 0$	0	$-$	0	Punto de inflexión.
$0 < x < 1$		$-$	$-$	$f \searrow, f \frown$.
$x = 1$	No existe	No existe	No existe	Asíntota vertical.
$x > 1$		$-$	$+$	$f \searrow, f \smile$.

La gráfica de esta función se muestra en la figura siguiente:

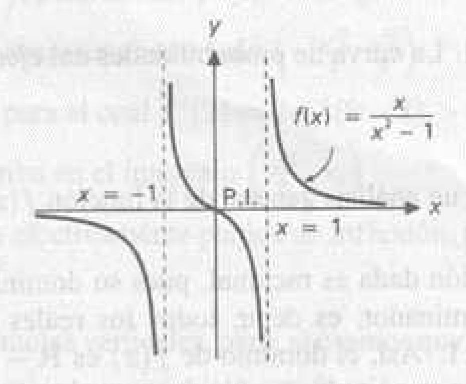


Figura 9.5.5. La gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ del ejemplo 9.5.5.

★

EJEMPLO 9.5.6. Hacer un análisis general de la función $f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}}(x-3)^{\frac{2}{5}}$.
SOLUCIÓN.
I) *Preliminares.* La función está definida y es continua en todo $\mathbb{R}$.
II) *Lo que se puede obtener con la primera derivada.* En el ejemplo 9.2.6 obtuvimos que:

$$f'(x) = \frac{4}{15}(x-1)^{-\frac{1}{3}}(x-3)^{-\frac{3}{5}}(4x-9) = \frac{4(4x-9)}{15(x-1)^{\frac{1}{3}}(x-3)^{\frac{3}{5}}},$$

de donde se ve que $f'(x) = 0$ para $x = \frac{9}{4}$ (la solución de la ecuación $4x - 9 = 0$) y $f'(x)$ no existe para $x = 1$ y $x = 3$. Debemos analizar entonces los intervalos $(-\infty, 1)$, $\left(1, \frac{9}{4}\right)$, $\left(\frac{9}{4}, 3\right)$ y $(3, \infty)$ en donde la derivada mantiene su signo constante.

Intervalo	**Consideramos un punto del intervalo**	**Evaluamos $f'(x)$**	**Signo de $f'(x)$ en el intervalo considerado**	**Por lo tanto la función en tal intervalo es...**
$(-\infty, 1)$	$x = 0$	$f'(0) = -1.241$	$-$	decreciente
$\left(1, \frac{9}{4}\right)$	$x = 2$	$f'(2) = 0.266$	$+$	creciente
$\left(\frac{9}{4}, 3\right)$	$x = 2.5$	$f'(2.5) = -0.353$	$-$	decreciente
$(3, \infty)$	$x = 4$	$f'(4) = 1.294$	$+$	creciente

Así pues, la función dada es creciente en los intervalos $\left(1, \frac{9}{4}\right)$ y $(3, \infty)$ y decreciente en $(-\infty, 1)$ y $\left(\frac{9}{4}, 3\right)$. Tiene, por tanto, mínimos locales en $x = 1$ y $x = 3$ (con $f(1) = f(3) = 0$), y un máximo local en $x = \frac{9}{4}$, con $f\left(\frac{9}{4}\right) = \left(\frac{9}{4} - 1\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{9}{4} - 3\right)^{\frac{2}{5}} \approx 1.0343$.
III) *Lo que se puede obtener con la segunda derivada.* En el ejemplo 9.2.6 vimos que la gráfica de la función $f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}}(x-3)^{\frac{2}{5}}$ tiene puntos de inflexión en $x = -\frac{3}{2}$ y en $x = 6$, con $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2} - 1\right)^{\frac{2}{3}}\left(-\frac{3}{2} - 3\right)^{\frac{2}{5}} \approx 3.36185$ y $f(6) = (6-1)^{\frac{2}{3}}(6-3)^{\frac{2}{5}} \approx 4.5376$, y que la gráfica es cóncava hacia arriba en los intervalos $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ y $(6, \infty)$, y cóncava hacia abajo en los intervalos $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$, $(1, 3)$ y $(3, 6)$.
IV) *Asíntotas.* La función $f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}}(x-3)^{\frac{2}{5}}$ no tiene asíntotas.
A continuación mostramos el resumen del análisis anterior.

Punto o intervalo	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Observaciones
$x < -\frac{3}{2}$		$-$	$+$	$f \searrow, f \smile$.
$x = -\frac{3}{2}$	3.36185	$-$	0	Punto de inflexión.
$-\frac{3}{2} < x < 1$		$-$	$-$	$f \searrow, f \frown$.
$x = 1$	0	No existe	No existe	Mínimo local.
$1 < x < \frac{9}{4}$		$+$	$-$	$f \nearrow, f \frown$.
$x = \frac{9}{4}$	1.0343	0	$-$	Máximo local.
$\frac{9}{4} < x < 3$		$-$	$-$	$f \searrow, f \frown$.
$x = 3$	0	No existe	No existe	Mínimo local.
$3 < x < 6$		$+$	$-$	$f \nearrow, f \frown$.
$x = 6$	4.5376	$+$	0	Punto de inflexión.
$x > 6$		$+$	$+$	$f \nearrow, f \smile$.

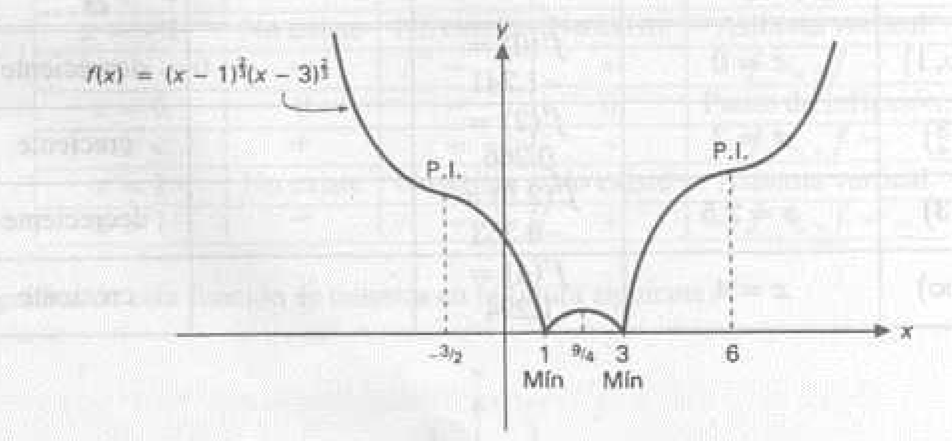


Figura 9.5.6. La gráfica de la función $f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}}(x-3)^{\frac{2}{3}}$ del ejemplo 9.5.6.

★

EJEMPLO 9.5.7. El biólogo matemático G. F. Gause realizó un experimento sobre el crecimiento del *paramecium caudatum* en un medio nutritivo y obtuvo el modelo $f(t) = \frac{375}{1+74e^{-2.309t}}$ en donde t se mide en días, y $f(t)$ da el número de bacterias en el cultivo (se sabe que esta bacteria tiene un periodo de crecimiento rápido, y luego un periodo de crecimiento lento). Haga un análisis exhaustivo de la función $f(t)$.

SOLUCIÓN.

I) *Preliminares.* La función está definida para todo $t \in \mathbb{R}$, pero por lo que esta función modela en la realidad, solamente interesa saber su comportamiento para $t \geq 0$.

II) *Lo que se puede obtener con la primera derivada.* La derivada de la función dada es:

$$f'(t) = -\frac{375}{(1+74e^{-2.309t})^2}\left((74)(-2.309)e^{-2.309t}\right) = \frac{64074.75e^{-2.309t}}{(1+74e^{-2.309t})^2},$$

de donde se ve que $f'(t) > 0$ para toda t. Se trata entonces de una función creciente en todo su dominio.

III) *Lo que se puede obtener con la segunda derivada.* La segunda derivada de la función es:

$$f''(t) = \left(\tfrac{64074.75e^{-2.309t}}{(1+74e^{-2.309t})^2}\right)' = 64074.75\left(\frac{e^{-2.309t}}{(1+74e^{-2.309t})^2}\right)'$$

$$= 64074.75\tfrac{(1+74e^{-2.309t})^2(e^{-2.309t})(-2.309)-(e^{-2.309t})(2)\left(1+74e^{-2.309t}\right)(74)(-2.309)e^{-2.309t}}{(1+74e^{-2.309t})^4}$$

$$= 64074.75\tfrac{-2.309e^{-2.309t}(1-74e^{-2.309t})}{(1+74e^{-2.309t})^3}$$

Obtenemos las soluciones de $f''(t) = 0$ al resolver la ecuación: $1 - 74e^{-2.309t} = 0$. Las cuentas se ven como:

$$1 - 74e^{-2.309t} = 0 \Rightarrow e^{-2.309t} = \frac{1}{74} \Rightarrow -2.309t = -\ln(74) \Rightarrow t = \frac{\ln(74)}{2.309} = 1.864.$$

Así pues, en $t = 1.864$ hay un posible punto de inflexión de la gráfica de $f(t)$. Probemos si efectivamente hay un cambio de concavidad: para $t = 1 < 1.864$ tenemos $f''(1) = 160.25 > 0$ y para $t = 2 > 1.864$, tenemos $f''(2) = -75.92 < 0$. Entonces en $t = 1.864$ hay un punto de inflexión con $f(1.864) = 187.5$, al ser la curva cóncava hacia arriba para $t < 1.864$ y cóncava hacia abajo para $t > 1.864$.

IV) *Asíntotas.* No hay asíntotas verticales, pero si usamos $\lim_{t\to\infty} e^{-2.309t} = 0$, obtenemos:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{375}{1+74e^{-2.309t}} = \frac{375}{1+74(0)} = 375$$

de modo que la recta $y = 375$ es una asíntota horizontal de la gráfica de $f(t)$.

En resumen, tenemos los siguientes resultados:

Punto o intervalo	$f(t)$	$f'(t)$	$f''(t)$	**Observaciones**
$0 \le t < 1.864$		$+$	$+$	$f \nearrow, f \smile$.
$t = 1.864$	187.5	$+$	0	Punto de inflexión.
$t > 1.864$		$+$	$-$	$f \nearrow, f \frown$.

La gráfica de la función $f(t)$ es:

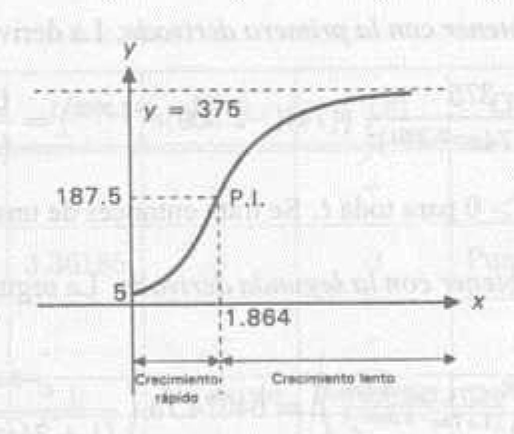


Figura 9.5.7. La gráfica de la función $f(t) = \frac{375}{1+74e^{-2.309t}}$ del ejemplo 9.5.7.

Observe que el punto de inflexión marca la separación de los dos procesos de crecimiento del *paramecium caudatum*: antes de $t = 1.864$ días hay un crecimiento acelerado y después de ese tiempo hay un crecimiento lento que tiene como límite a 375 elementos de la población (el experimento se realizó en un tubo de pruebas y las limitaciones de espacio explican este comportamiento en el crecimiento de la población).

★

EJERCICIOS (9.5)

En los ejercicios 1 al 25, haga un análisis general de la función dada.

1. $f(x) = x^2(x-4)$.

2. $f(x) = x^3 + x + 1$.

3. $f(x) = x^3(3x-8)$.

4. $f(x) = x^3(3x^2-5)$.

5. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

6. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$.

7. $f(x) = \dfrac{3x-1}{3x(x-3)}$.

8. $f(x) = (x-1)\sqrt{x}$.

9. $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$.

10. $f(x) = x^2\sqrt{1+x}$.

11. $f(x) = x(x+1)^{\frac{2}{3}}$.

12. $f(x) = x + x^{\frac{2}{3}}$.

13. $f(x) = (x^3-x)^{\frac{2}{3}}$.

14. $f(x) = xe^{-x}$.

15. $f(x) = (x^2-1)e^{-x}$.

16. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}e^{-x}$.

17. $f(x) = x \ln x$.

18. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

19. $f(x) = x^3 \ln x$.

20. $f(x) = 4 \arctan x - \dfrac{1}{3}x^3 - x$.

21. $f(x) = 10 \arctan x + \dfrac{1}{3}x^3 - 6x$.

22. $f(x) = \text{arcsen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

23. $f(x) = 2 \arctan\left(\dfrac{x}{2}\right) - \arctan x$.

24. $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

25. $f(x) = 3(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)\ln(x-1) - x(x^2 - 3x + 3)$.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 9

EXAMEN TIPO (A)

1. Obtenga los puntos de inflexión de $f(x) = x^3 + 2x + 3$.

2. Verifique que la gráfica de la función $f(x) = \frac{x-3}{x-8}$ no tiene puntos de inflexión. ¿Hay cambios en la concavidad de la gráfica?

3. Obtenga los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de $f(x) = (x^2-1)e^{-x}$.

4. Obtenga los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de $f(x) = \frac{x-1}{x^3-1}$.

5. Obtenga los puntos de inflexión de la gráfica de la función $f(x) = -2x\ln^3 x + 9x\ln^2 x - 18x\ln x + 18x$.

6. Determine los valores de a y b para que la gráfica de la función $f(x) = (x^2 + ax + b)e^x$ tenga un punto de inflexión en el origen de coordenadas. ¿Existen más puntos de inflexión en esta gráfica?

7. Determine las asíntotas verticales y horizontales de $f(x) = \frac{x^3+3x^2+9x+10}{x^3-1}$.

8. ¿Existe alguna asíntota oblicua para $f(x) = \frac{x^3+3x-9}{x^2+x+1}$? En caso afirmativo, determínela.

9. Haga un análisis general de la función $f(x) = (x-1)\sqrt{x}$.

10. Haga un análisis general de la función $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$.

EXAMEN TIPO (B)

1. Obtenga los puntos de inflexión de $f(x) = x^3 + 7x^2 + 5x + 3$.

2. Determine los intervalos de concavidad de la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4}$.

3. Obtenga los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de $f(x) = \frac{x^3-1}{x^3-8}$.

4. Obtenga los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de $f(x) = (x^3 - 12x^2 + 53x - 88)e^x$.

5. Obtenga los puntos de inflexión de la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x - x$.

6. Determine los valores de a y b para que la gráfica de la función $f(x) = (ax + b) \ln(1 + x^2)$ obtenga un punto de inflexión en el punto $(2, 2)$.

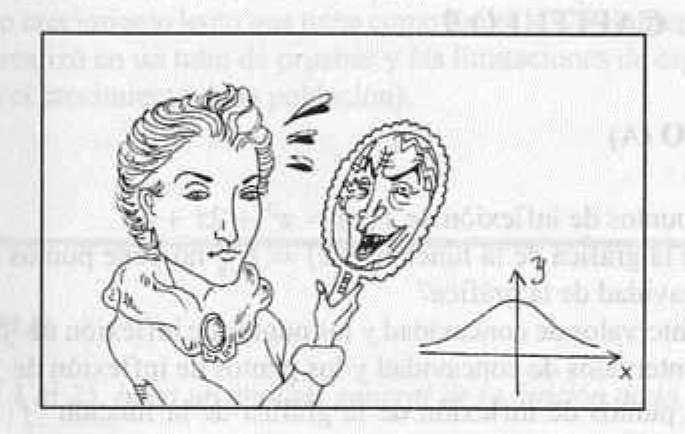
7. Haga un análisis general de la función $f(x) = 2e^{-x} - 2e^{-2x}$.

8. (Para descansar ...) Haga un análisis general de la función $f(x) = x^n$.

9. Haga un análisis general de la función $f(x) = \ln(1 + x^2)$.

10. Haga un análisis general de la función $f(x) = -8 \arctan x + \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + x$.

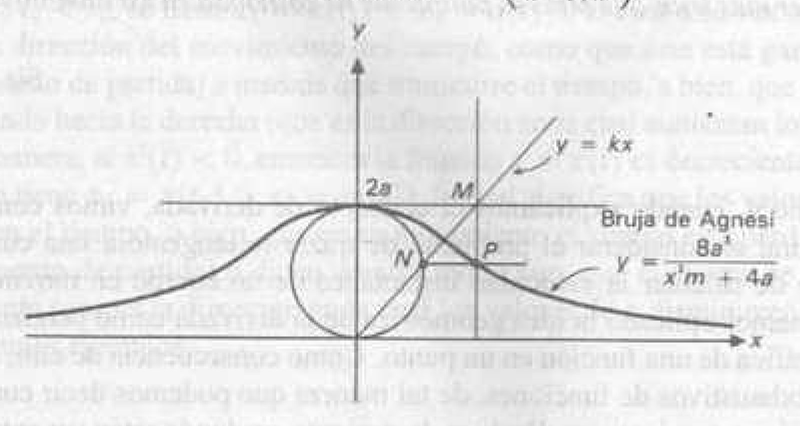
NOTA HISTÓRICA: *TRADUTTORE TRADITORE.*



María Gaetana Agnesi (1718-1799) fue una matemática italiana muy reconocida en su tiempo por su trabajo intelectual. Dominaba varias lenguas y en sus obras *Proposiciones philosophical* e *Instituzioni analitiche per servire alla gioventu italiana* dejó escritas algunas contribuciones matemáticas. Un matemático italiano contemporáneo de Agnesi, Guido Grandi (1671-1742) publicó un libro llamado *Quadratura circuli et hyperbolae* en el cual incluye una curva que Agnesi estudió y trazó, y que viene incluida en sus *Instituzioni analitiche*. Esta curva sería recordada en los años venideros (hasta nuestros días) con un desafortunado nombre, producto de un no menos desafortunado accidente de un "*traduttore traditore*", en el cual Agnesi nada tuvo que ver [la frase italiana "*traduttore traditore*" significa 'traductor traidor' y suele usarse siempre que en una traducción se cambia el sentido de alguna o algunas palabras con lo que se afecta de manera sustancial el contenido de la obra original]. En efecto, al publicar Grandi la curva que Agnesi había estudiado usó la palabra latina *versoria*, la cual es equivalente a la palabra *versiera*, y que tiene sus raíces en la frase "*sinus versus*" (que significa 'seno verso': una función que era usada en la Matemática de ese tiempo: el seno verso de un ángulo θ en un círculo de radio R se define como $R(1 - \cos\theta)$), para resaltar alguna parte del procedimiento que Agnesi usó en el estudio de la curva. En la traducción que se hizo al inglés de la obra de Grandi, se tomó una equivalencia literal de la palabra *versiera*, la cual quiere decir (según esta equivalencia literal) 'bruja' ('witch', en inglés). Así, en la versión inglesa de la obra de Grandi la referencia que se hace a la curva de Agnesi, aparece con el nombre "*witch of Agnesi*". Es por eso que hasta nuestros días esta curva es conocida como "La Bruja de Agnesi"; este nombre es completamente independiente de los atributos físicos de la señora Agnesi (la

cual era, según documentos, una persona muy distinguida), ni tampoco de su relación con algún tipo de cualidades culinarias con pócimas o cosas por el estilo (bueno, al menos de esto no se sabe nada).

La bruja de Agnesi es una curva que se obtiene de la siguiente manera: tome un círculo de radio $a > 0$ con centro en el punto $(0, a)$. La ecuación de este círculo es entonces $x^2 + (y-a)^2 = a^2$. Trace la recta $y = 2a$, la cual es tangente al círculo en el punto $(0, 2a)$. Considere rectas del tipo $y = kx$ (rectas que pasan por el origen). Cada una de estas rectas corta la recta $y = 2a$ en un punto $M = \left(\frac{2a}{k}, 2a\right)$ y el círculo $x^2 + (y-a)^2 = a^2$ en un punto N. Las coordenadas de N se obienen al resolver $y = kx$ y $x^2 + (y-a)^2 = a^2$ simultáneamente y son $N = \left(\frac{2ak}{1+k^2}, \frac{2ak^2}{1+k^2}\right)$. Por el punto M trace un recta paralela al eje y (es decir, la recta $x = \frac{2a}{k}$) y por el punto N una recta paralela al eje x (es decir, la recta $y = \frac{2ak^2}{1+k^2}$). El punto P en donde estas rectas se cortan es un punto de la bruja de Agnesi. Este punto tendrá entonces como coordenadas $P = \left(\frac{2a}{k}, \frac{2ak^2}{1+k^2}\right)$.



La bruja de Agnesi

Si llamamos $x = \frac{2a}{k}$, obtenemos que $k = \frac{2a}{x}$ y entonces la coordenada y del punto P es

$$y = \frac{2ak^2}{1+k^2} = \frac{2a\left(\frac{2a}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{2a}{x}\right)^2} = \frac{8a^3}{x^2+4a^2}.$$

Ésta es la ecuación de la bruja de Agnesi. Invitamos al lector a que haga un análisis general de esta curva: que se convenza de que tiene un máximo local en $x = 0$, dos puntos de inflexión en $x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}a$, y una asíntota horizontal en $y = 0$.

CAPÍTULO 10
LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO

"*Si he podido ver más lejos que otros es porque me he sostenido en los hombros de gigantes.*"

Sir Isaac Newton

En el capítulo 4, cuando explicamos el concepto de derivada, vimos cómo surgía éste de manera natural al considerar el problema de trazar la tangente a una curva, así como en el problema de calcular la velocidad instantánea de un cuerpo en movimiento. Hasta este momento hemos aplicado la idea geométrica de la derivada como pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto. Como consecuencia de ello, hemos podido hacer análisis exhaustivos de funciones, de tal manera que podemos decir con precisión en dónde una función es creciente, en dónde es decreciente, en dónde están sus extremos locales, en dónde su gráfica es cóncava hacia arriba, o hacia abajo, etcétera. Así pues, hemos llevado esta "vertiente geométrica" de la derivada a consecuencias importantes dentro del estudio de las funciones. Hemos dejado la "vertiente física" del estudio de la derivada para este capítulo, en el cual explicaremos esa otra idea inmersa que tiene la derivada de una función y que fue presentada en el capítulo 4: la derivada mide una velocidad instantánea de variación (por ejemplo, del espacio recorrido por un cuerpo en movimiento respecto del tiempo). También extenderemos esta idea a la resolución de problemas en los que se encuentran magnitudes que varian con el tiempo y que están relacionadas entre sí.

10.1 VELOCIDAD Y ACELERACIÓN DE UN CUERPO EN MOVIMIENTO RECTILÍNEO

En esta sección queremos estudiar cuerpos que se mueven sobre el eje x, cuya ley del movimiento conocemos, es decir, la función $x = x(t)$ que relaciona la distancia x recorrida por el cuerpo (medida, por ejemplo, en metros), en términos del tiempo t empleado en recorrer tal distancia (medido, por ejemplo, en segundos). Muchas veces ocurrirá que la función $x = x(t)$ tiene perfecto sentido para toda t real (es decir que su dominio natural es R). Sin embargo, por lo que esta función representa físicamente, sólo consideraremos valores de t no negativos. De hecho, el valor de la función $x = x(t)$ para $t = 0$, $x_0 = x(0)$, es la

posición inicial del cuerpo, es decir, el punto sobre el eje x de donde arranca el movimiento del cuerpo. Estaremos interesados en calcular la velocidad y aceleración del movimiento de este cuerpo, y en darle interpretaciones físicas a los resultados que obtengamos. La herramienta matemática con la que abordaremos estos problemas serán las derivadas de la función $x = x(t)$.

Más concretamente, recordemos que la derivada $x'(t)$ de la ley de movimiento del cuerpo, representa la *velocidad instantánea del cuerpo a los t segundos de haber comenzado su movimiento.* Esta derivada mide la rapidez de variación de la distancia x respecto del tiempo t. Para $t = 0$ tenemos $x'(0)$, que es la velocidad inicial del cuerpo, denotada comúnmente con v_0. Observe que si $x'(t) > 0$, entonces la función $x(t)$ es (por el teorema 8.2.1) una función creciente, lo cual significa que los valores de $x = x(t)$ aumentan con el tiempo (es decir, para $0 < t_1 < t_2$, se tiene $x_1 = x(t_1) < x_2 = x(t_2)$), lo cual a su vez se interpreta, en términos de la dirección del movimiento del cuerpo, como que éste está ganando distancia (respecto del punto de partida) a medida que transcurre el tiempo, a bien, que su movimiento se está efectuando hacia la derecha (que es la dirección en la cual aumentan los valores de x). De la misma manera, si $x'(t) < 0$, entonces la función $x = x(t)$ es decreciente (es decir, para $0 < t_1 < t_2$, se tiene $x_1 = x(t_1) > x_2 = x(t_2)$), lo cual significa que los valores de $x = x(t)$ disminuyen con el tiempo, o bien, que en su movimiento el cuerpo está perdiendo distancia (respecto del punto de partida) o dicho de otro modo aún, que el cuerpo se está moviendo hacia la izquierda (que es la dirección en la cual los valores de x disminuyen).

Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 10.1.1. La ley del movimiento de un cuerpo es $x = x(t) = t^2 - 6t$, en donde x se mide en metros y t en segundos. Determine: (a) la posición inicial, (b) la velocidad inicial, (c) la velocidad a los 2 segundos de haber comenzado el movimiento, (d) la velocidad a los 5 segundos de haber comenzado el movimiento, (e) el tiempo durante el cual se está moviendo hacia la derecha, (f) el tiempo durante el cual se está moviendo hacia la izquierda.

SOLUCIÓN.

(a) La posición inicial del cuerpo es $x_0 = x(0) = (0)^2 - 6(0) = 0$. Es decir, su movimiento comienza en el origen.

Para dar respuesta a los siguientes incisos, usaremos la derivada de la función $x = x(t)$, la cual es $x' = x'(t) = 2t - 6$.

(b) La velocidad inicial es $v_0 = x'(0) = 2(0) - 6 = -6$ m/s. Puesto que $v_0 < 0$, concluimos que el cuerpo comienza a moverse (a partir del origen) hacia la izquierda.

(c) A los 2 segundos la velocidad es de $v = x'(2) = 2(2) - 6 = -2$ m/s (el cuerpo continúa moviéndose hacia la izquierda).

(d) A los 5 segundos la velocidad es $v = x'(5) = 2(5) - 6 = 4$ m/s (el cuerpo ahora se está moviendo hacia la derecha).

(e) Mientras $v = x' > 0$ el cuerpo se moverá hacia la derecha. Es decir, mientras $2t - 6 > 0$. Esto ocurre para $t > 3$. Así, después de los 3 segundos, el movimiento del cuerpo es hacia la derecha.

(f) Con un razonamiento análogo al del inciso anterior, concluimos que para $0 \leq t < 3$, el movimiento del cuerpo es hacia la izquierda.

Observe que en el instante $t = 3$ en el que ocurre el cambio de dirección en el movimiento,

el cuerpo se encontraba en $x = x(3) = (3)^2 - 6(3) = -9$ m (a 9 metros a la izquierda del origen). El movimiento de este cuerpo puede presentarse esquemáticamente como se muestra en la figura 10.1.1.

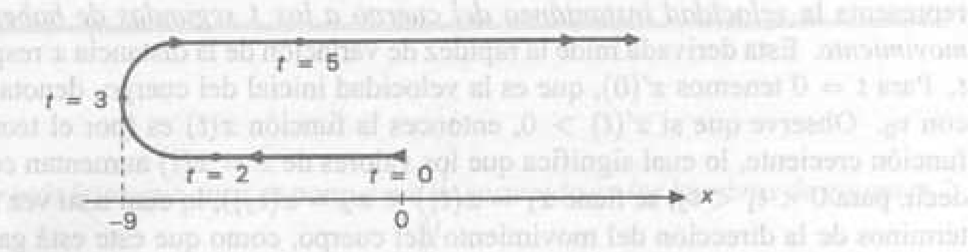


Figura 10.1.1. El movimiento del cuerpo del ejemplo 10.1.1.

★

Así como la velocidad de un cuerpo en movimiento mide la rapidez con que está variando la distancia recorrida por el cuerpo respecto del tiempo empleado en recorrerla, podemos considerar también la rapidez con que está variando la velocidad del cuerpo respecto del tiempo. A esta última se le llama *aceleración* y se calcula entonces como la derivada (respecto de t) de la velocidad $v = x'(t)$. Es decir, en términos de la función $x = x(t)$, que proporciona la ley de movimiento del cuerpo, la aceleración a es $a = (x'(t))' = x''(t)$ (la segunda derivada de la función $x = x(t)$). Las unidades en que se mide a son m/s^2 (metros sobre segundo cuadrado, suponiendo que x se mide en metros y t en segundos). Observe que si $a > 0$, entonces la función $v = x'(t)$ es creciente (es decir, si $0 < t_1 < t_2$, entonces $v_1 = x'(t_1) < x'(t_2) = v_2$), lo cual significa que el cuerpo va aumentando su velocidad. De igual manera, si $a < 0$, entonces la función $v = x'(t)$ es decreciente (es decir, si $0 < t_1 < t_2$, entonces $v_1 = x'(t_1) > x'(t_2) = v_2$), lo cual significa que el cuerpo va disminuyendo su velocidad.

EJEMPLO 10.1.2. Un cuerpo se mueve sobre el eje x con una ley de movimiento $x = x(t) = t^3 - 6t$, en donde x se mide en metros y t en minutos. Determinar los momentos en que el cuerpo se mueve hacia la derecha, hacia la izquierda, con aceleración positiva, y con aceleración negativa.

SOLUCIÓN. La velocidad del cuerpo es $v = x'(t) = 3t^2 - 6$. El cuerpo se moverá hacia la derecha cuando $v = 3t^2 - 6 > 0$, lo cual ocurre para $t < -\sqrt{2}$ (tiempos que carecen de sentido físico) y para $t > \sqrt{2}$. Es decir, después de los $\sqrt{2}$ minutos, el cuerpo se mueve hacia la derecha. Un razonamiento análogo nos conduce a que para $0 \leq t < \sqrt{2}$, el movimiento del cuerpo es hacia la izquierda. En el instante $t = \sqrt{2}$ en que el cuerpo cambia de dirección en su movimiento, se encontraba en la posición $x = x\left(\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^3 - 6\sqrt{2} = -4\sqrt{2}$ (a $4\sqrt{2}$ metros a la izquierda del origen). La aceleración es $a = x''(t) = 6t$, la cual es positiva para $t > 0$ (la solución de $6t > 0$) y negativa para $t < 0$ (tiempos negativos que carecen de

sentido físico). Es decir, la velocidad del cuerpo es siempre creciente. Esquemáticamente se muestran estos resultados en la figura 10.1.2.

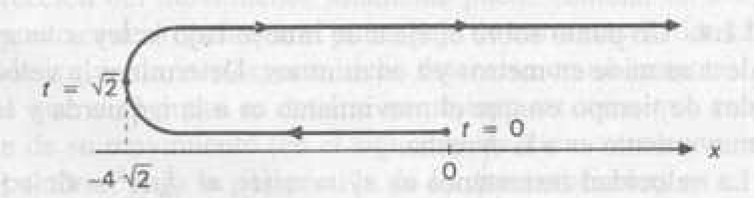


Figura 10.1.2. El movimiento del cuerpo del ejemplo 10.1.2.

★

Observemos detenidamente, con la perspectiva de la física, los resultados del ejemplo anterior. Al inicio de su movimiento, el cuerpo arranca con una velocidad de $v_0 = x'(0) = 3(0)^2 - 6 = -6$ m/min, moviéndose hacia la izquierda. Sabemos que durante los primeros $\sqrt{2} = 1.4142$ minutos, el movimiento del cuerpo sigue siendo a la izquierda, de modo que a los $t = \sqrt{2}$ minutos la velocidad del cuerpo es $x'(\sqrt{2}) = 3(\sqrt{2})^2 - 6 = 0$, y a partir de ese momento el cuerpo comienza a moverse a la derecha. Por otra parte, vimos que la aceleración del movimiento es siempre positiva, lo que nos indica que la velocidad siempre va en aumento conforme transcurre el tiempo. ¿Cómo podemos explicar que si el cuerpo arranca moviéndose a 6 m/min hacia la izquierda, después de $\sqrt{2}$ minutos el cuerpo se detenga, si se supone que su velocidad debe ir aumentando? El hecho de que la aceleración sea positiva nos indica que la función velocidad $v = x'(t)$ es creciente. Es decir, que si $t_1 < t_2$, entonces $v_1 = x'(t_1) < v_2 = x'(t_2)$, y en esto no hay contradicción alguna con nuestro ejemplo, porque para los instantes $t_1 = 0$ y $t_2 = \sqrt{2}$, tenemos $v_1 = -6 < 0 = v_2$. De hecho, el cuerpo durante los $\sqrt{2}$ primeros minutos de su movimiento debe ir frenándose para llegar al punto $x(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^3 - 6\sqrt{2} = -4\sqrt{2}$ metros, detenerse en ese punto y comenzar su movimiento hacia la derecha. Durante este tiempo la velocidad del cuerpo va aumentando (porque 0 es mayor que -6). Lo que va disminuyendo es la *rapidez* con la que el cuerpo se mueve, la cual se define como el valor absoluto de la velocidad del cuerpo. Es decir, en el concepto de rapidez no entra en juego la dirección hacia la cual se está moviendo el cuerpo, sino solamente, digámoslo así, "lo que marca el velocímetro del cuerpo en movimiento". Entonces, en el ejemplo 10.1.2, la rapidez disminuye durante los primeros $\sqrt{2}$ minutos, de 6 m/min hasta cero, y luego comienza a aumentar.

EJEMPLO 10.1.3. La ley de movimiento de un punto sobre el eje x es $x = x(t) = 3t^2 - 8t + 1$, en donde x se mide en centímetros y t en minutos. Determinar la velocidad y aceleración del punto a los $t = 1$ y $t = 5$ min.

SOLUCIÓN. La velocidad en el instante t es $x'_t = x'(t) = 6t - 8$ cm/min, y la aceleración

es $x''_t = 6$ cm/min². Al tiempo $t = 1$ min la velocidad instantánea del punto es de $x'(1) = 6(1) - 8 = -2$ cm/min (el punto se está moviendo hacia la izquierda). Al tiempo $t = 5$ min la velocidad es de $x'(5) = 6(5) - 8 = 22$ cm/min (el punto se está moviendo hacia la derecha). La aceleración del movimiento siempre en positiva e igual a $a = 6$ cm/min².

⋆

EJEMPLO 10.1.4. Un punto sobre el eje x se mueve bajo la ley $x = x(t) = \frac{1}{10}(\frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t)$, en donde x se mide en metros y t en minutos. Determinar la velocidad inicial del punto, los intervalos de tiempo en que el movimiento es a la izquierda y los intervalos de tiempo en que el movimiento es a la derecha.

SOLUCIÓN. La velocidad instantánea es $x'_t = x'(t) = \frac{1}{10}(t^2 - 6t + 8)$ de modo que en $t = 0$ se tiene $v_0 = 0.8$ m/min. Ésta es la velocidad inicial del punto (su movimiento comienza hacia la derecha). El movimiento del punto será hacia la izquierda en los tiempos t en que $x'(t) < 0$ y hacia la derecha en los tiempos t en que $x'(t) > 0$. Como $y = f'(t) = \frac{1}{10}(t^2 - 6t + 8) = \frac{1}{10}(t-2)(t-4)$ representa geométricamente una parábola que abre hacia arriba y corta al eje t en $t_1 = 2$ y $t_2 = 4$, vemos que para $0 \leq t < 2$ y para $t > 4$ se tiene $x'(t) > 0$ y por lo tanto el movimiento será hacia la derecha, mientras que para $2 < t < 4$ se tiene $x'(t) < 0$ y entonces para este tiempo el movimiento es a la izquierda. En el instante $t = 2$ en que ocurre el cambio de dirección en el movimiento del punto (de derecha a izquierda), éste se encontraba en $x = x(2) = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{3}(2)^3 - 3(2)^2 + 8(2)\right) = \frac{2}{3}$ (a dos tercios de metro a la derecha del origen), mientras que a los $t = 4$ minutos, cuando ocurre el segundo cambio de dirección en el movimiento del punto (de izquierda a derecha), éste se encontraba en $x = x(4) = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{3}(4)^3 - 3(4)^2 + 8(4)\right) = \frac{8}{15}$ (a ocho quinceavos de metro a la derecha del origen). Esquemáticamente se tiene:

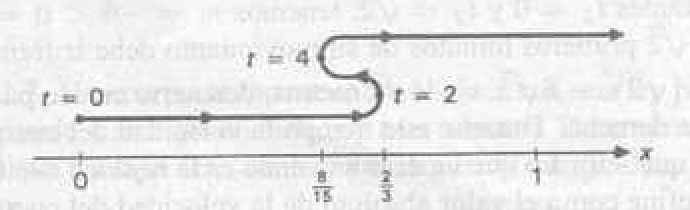


Figura 10.1.3. El movimiento rectilíneo del punto del ejemplo 10.1.4.

⋆

EJEMPLO 10.1.5. Un punto sobre el eje x se mueve bajo la ley $x = x(t) = 5 \arctan t - \frac{7}{2}\ln(1+t^2) + t$, en donde x se mide en metros y t en minutos. Determinar la velocidad inicial del punto, así como los instantes en que la velocidad del punto cambia de dirección.

SOLUCIÓN. La velocidad instantánea es:

$$x'_t = x'(t) = 5\left(\frac{1}{1+t^2}\right) - \frac{7}{2}\left(\frac{1}{1+t^2}\right)(2t) + 1 = \frac{5 - 7t + 1 + t^2}{1+t^2} = \frac{(t-1)(t-6)}{1+t^2}$$

de modo que en $t = 0$ se tiene $v_0 = \frac{(-1)(-6)}{1+0^2} = 6$ m/min (el movimiento comienza hacia la derecha). La dirección del movimiento solamente puede cambiar en los instantes en que la velocidad del punto es cero (para que el punto deje de moverse a la derecha para comenzar a moverse hacia la izquierda, o viceversa, debe detenerse en un instante). Observe que no estamos diciendo que si el punto se detiene en un instante tiene que cambiar en ese instante la dirección de su movimiento (en el siguiente ejercicio veremos una situación como ésta). En otras palabras, bajo la perspectiva de lo que estudiamos en el capítulo 8 sobre extremos absolutos, el punto que se mueve bajo la ley $x = x(t)$ cambiará de dirección en su movimiento en los extremos locales de la función $x(t)$, los cuales deben ser puntos críticos de aquélla (en donde la derivada —la velocidad instantánea— es cero). De la fórmula obtenida para la derivada $x'(t)$ vemos que para $t_1 = 1$ y $t_2 = 6$ minutos, la velocidad del punto es cero, así es que si hay cambio en la dirección del movimiento del puntos, es en estos dos instantes. De hecho, para $0 \leq t < 1$ y para $t > 6$ se tiene $x'(t) > 0$, mientras que para $1 < t < 6$ se tiene $x'(t) < 0$ [estas conclusiones se obtienen al resolver las desigualdades $(t-1)(t-6) > 0$ y $(t-1)(t-6) < 0$ que definen los signos del numerador de $x'(t)$, pues su denominador $1 + t^2$ es siempre positivo]. Entonces hay efectivamente un cambio de signo en la velocidad instantánea $x'(t)$ para $t_1 = 1$ y $t_2 = 6$. Es decir, en estos instantes el punto cambia de dirección en su movimiento: el punto se mueve hacia la derecha para $0 \leq t < 1$ y $t > 6$, y hacia la izquierda para $1 < t < 6$. En el instante $t = 1$ el punto se encontraba en $x = x(1) \approx 2.5$ m, y en $t = 6$ se encontraba en $x = x(6) \approx 0.39$ m. Esquemáticamente se tiene:

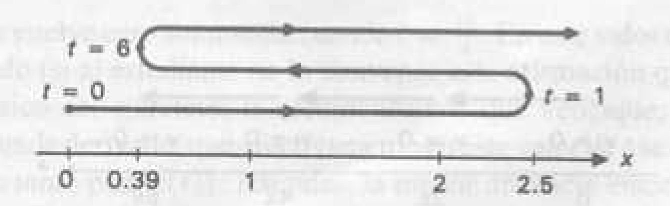


Figura 10.1.4. El movimiento rectilíneo del punto del ejemplo 10.1.5.

*

EJEMPLO 10.1.6. Un punto sobre el eje x se mueve bajo la ley $x = x(t) = \operatorname{sen} t + t$, en donde x se mide en centímetros y t en minutos. Describir el movimiento de este punto, indicando en qué instantes se detiene y/o cambia de dirección.

SOLUCIÓN. La velocidad del punto en el instante t es $x'_t = x'(t) = \cos t + 1$. Esta

velocidad se vuelve cero cuando $\cos t + 1 = 0$, es decir, cuando $\cos t = -1$. Esto ocurre a los π, 3π, ... minutos. Es decir, hay una infinidad de momentos, a saber, $t = (2k+1)\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, en los que el punto se detiene. ¿Hay cambio de dirección en su movimiento en estos instantes? Analicemos el movimiento del punto hasta su primera parada (en el intervalo de tiempo $0 \le t < \pi$). La velocidad con la que arranca es $x'(0) = \cos(0) + 1 = 2$ cm/min, la cual indica que el movimiento inicial es hacia la derecha, con una rapidez de 2 centímetros cada minuto. La aceleración del movimiento en este intervalo de tiempo es $a = x''(t) = -\operatorname{sen} t < 0$ (para $0 < t < \pi$), lo cual indica que efectivamente el punto se va deteniendo conforme llega al punto $x = x(\pi) = \operatorname{sen}\pi + \pi = \pi$, en donde se detiene completamente. Queremos ver si para $t > \pi$ hay cambio en la dirección del movimiento del punto. Observe que, como $-1 \le \cos t \le 1$ para todo t, se tiene $x'(t) = \cos t + 1 \ge 0$ para todo t, de modo que, cuando la velocidad del punto no es cero, entonces es positiva y, por lo tanto, su movimiento es siempre hacia la derecha. Así pues, después de los π minutos, el cuerpo continúa moviéndose a la derecha. Observe lo que sucede hasta la siguiente parada del punto, que ocurre a los $t = 3\pi$ minutos, es decir 2π minutos después de la primera parada. Para $\pi < t < 3\pi$ se tiene $x'(t) = \cos t + 1 > 0$ (el movimiento es, como dijimos, hacia la derecha), mientras que la aceleración $a = x''(t) = -\operatorname{sen} t$ es positiva para $\pi < t < 2\pi$ (el punto aumenta su velocidad durante los primeros π minutos después de su primera parada) y negativa para $2\pi < t < 3\pi$ (el punto disminuye su velocidad en los segundos π minutos después de su primera parada), lo que indica que después de su primera parada hay π minutos de aceleración positiva (el punto "aprieta el acelerador") y luego otros π minutos de aceleración negativa (el punto "apaga el motor"), hasta que a los 3π minutos ocurre la segunda parada. Esta situación se repite siempre, cada 2π minutos después de cada parada. ¿Alguna vez ha intentado arrancar un automóvil mal carburado? El movimiento producido de "camina y se detiene" es similar al movimiento del punto sobre el eje x en este ejercicio.

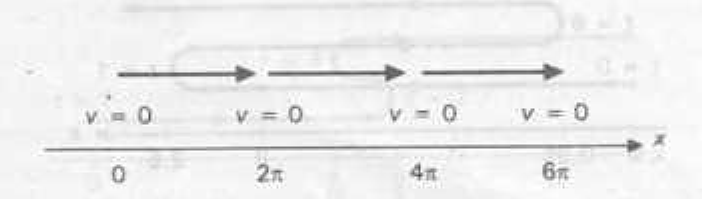


Figura 10.1.5. El movimiento rectilíneo del punto "mal carburado" (como que arranca y no arranca, como que quiere y no quiere), que se desplaza sobre el eje x en el ejemplo 10.1.6.

EJEMPLO 10.1.7. Dos puntos se mueven en el eje x con leyes de movimiento respectivas $x = x_1(t) = \frac{1}{2}t(2-t)$, $x = x_2(t) = t^2 - 10t + 24$, en donde x se mide en metros y t en minutos. Encontrar el instante en el cual los dos puntos se encuentran más cerca uno del otro. Describir la posición y la velocidad de cada uno de los puntos en ese instante.

SOLUCIÓN. Observe que el primer punto comienza su movimiento en $x = x_1(0) = 0$ (en el origen) y el segundo comienza su movimiento en $x = x_2(0) = 24$ (a 24 metros del origen). Observe también que estos dos puntos nunca se cruzan (si se cruzaran la respuesta del ejercicio sería trivial: en el instante del encuentro la distancia entre los puntos es mínima (igual a cero), pues al intentar resolver simultáneamente las dos leyes de movimiento obtenemos $\frac{1}{2}t(2-t) = t^2 - 10t + 24$, de donde vemos que el instante t en el que ocurriría el encuentro debería ser solución de la ecuación $3t^2 - 22t + 48 = 0$, la cual no tiene raíces reales. Queremos entonces saber en qué instante se encuentra más cerca un punto del otro. La distancia entre los dos puntos es el valor absoluto de la diferencia de las $x's$ en las que cada punto se encuentra. Así, en el instante t la distancia $d(t)$ entre los puntos es

$$d(t) = |x_1(t) - x_2(t)| = \left|\frac{1}{2}t(2-t) - (t^2 - 10t + 24)\right| = \frac{1}{2}\left|3t^2 - 22t + 48\right|.$$

Un artificio muy popular, cuando uno se enfrenta a problemas de minimización de distancias como el presente, es cambiar la función distancia por el cuadrado de ella: la función $d(t)$ tiene un mínimo local en t_0 si y solamente si la función $d^2(t)$ tiene un mínimo local en ese valor de t. La ventaja de introducir este artificio es simplemente ganar un poco de sencillez en los cálculos que haremos. Así pues, consideramos la función

$$D(t) = d^2(t) = \frac{1}{4}(3t^2 - 22t + 48)^2,$$

cuya derivada es:

$$D'(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 22t + 48)(6t - 22).$$

Esta derivada se vuelve cero solamente cuando $t = \frac{11}{3}$. En este valor de t se debe encontrar el mínimo procurado (si al estudiante no lo convence esta afirmación que hacemos con base en el contenido físico del ejercicio, le recomendamos que verifique, con el criterio de la primera o de la segunda derivada, que efectivamente en este valor de t se encuentra un mínimo para $D(t)$, y por lo tanto para $d(t)$). Así pues, la menor distancia entre los dos puntos se da después de $t = \frac{11}{3}$ minutos de haber comenzado su movimiento y es igual a:

$$d\left(\frac{11}{3}\right) = \frac{1}{2}\left|3\left(\frac{11}{3}\right)^2 - 22\left(\frac{11}{3}\right) + 48\right| = \frac{23}{6} \text{ m}.$$

En ese instante el primer punto se encontraba en $x = x_1\left(\frac{11}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{11}{3}\right)\left(2 - \frac{11}{3}\right) = -\frac{55}{18}$ (a $\frac{55}{18}$ metros a la izquierda del origen), y el segundo se encontraba en $x = x_2\left(\frac{11}{3}\right) = \left(\frac{11}{3}\right)^2 - 10\left(\frac{11}{3}\right) + 24 = \frac{7}{9}$ (a $\frac{7}{9}$ metros a la derecha del origen). Como $x_1'(t) = 1 - t$ y $x_2'(t) = 2t - 10$, la velocidad del primer punto en $t = \frac{11}{3}$ es de $x_1'\left(\frac{11}{3}\right) = 1 - \frac{11}{3} = -\frac{8}{3}$ m/min y la del segundo de $x_2'\left(\frac{11}{3}\right) = 2\left(\frac{11}{3}\right) - 10 = -\frac{8}{3}$ m/min. Es decir, en el instante en que los dos puntos se

encuentran más cerca, ambos se están moviendo hacia la izquierda con la misma rapidez de $\frac{8}{3}$ metros por minuto, uno en $x = -\frac{55}{18}$ m y el otro en $x = \frac{7}{9}$ m.

★

EJEMPLO 10.1.8. Dos cuerpos que han partido del origen comienzan a moverse en $t = 0$, sobre el eje x, con leyes de movimientos $x_1 = x_1(t) = t^3 - 6t$ y $x_2 = x_2(t) = t^2 + 14t$, respectivamente, en donde las $x's$ se miden en metros y las $t's$ en minutos. Decir si estos dos cuerpos se encuentran en algún instante $t > 0$. En caso afirmativo, calcular la velocidad de ambos en el instante del encuentro.

SOLUCIÓN. Haremos algunas observaciones preliminares antes de entrar a los detalles de la solución del ejemplo. Primeramente observe que en efecto ambos cuerpos comienzan sus movimientos respectivos en el origen (esto lo dice como "dato" el ejemplo), pues $x_{1_0} = x_1(0) = 0$ y $x_{2_0} = x_2(0) = 0$. Las derivadas de las leyes de movimiento de estos dos cuerpos son $v_1 = x_1'(t) = 3t^2 - 6$ y $v_2 = x_2'(t) = 2t + 14$. Para $t = 0$ tenemos $v_{1_0} = x_1'(0) = -6$ y $v_{2_0} = x_2'(0) = 14$. Entonces el primer cuerpo comienza moviéndose hacia la izquierda, con una velocidad inicial de 6 m/min y el segundo comienza su movimiento hacia la derecha, con una velocidad inicial de 14 m/min. En el ejemplo se nos pregunta por el instante (si es que existe) en que estos cuerpos se encuentran. Si esto pasara, ocurriría en algún valor $t > 0$ para el cual $x_1 = x_2$, lo cual nos conduce a procurar una solución positiva de la ecuación $t^3 - 6t = t^2 + 14t$. Esta ecuación puede reescribirse como $t^3 - t^2 - 20t = 0$, o bien como $t(t+4)(t-5) = 0$, de donde se obtienen las raíces $t = 0$ (lo cual nos indica que los cuerpos se encuentran inicialmente en el origen —cosa que ya sabíamos—), $t = -4$ (que carece de sentido físico), y $t = 5$. Esta última es la solución que buscábamos. Es decir, a los 5 minutos de haber comenzado su movimiento, los dos cuerpos se encuentran a los $x_1(5) = (5)^3 - 6(5) = 95$ $[= (5)^2 + 14(5) = x_2(5)]$ metros del origen, con velocidades respectivas de $v_1 = x_1'(5) = 3(5)^2 - 6 = 69$ m/min y $v_2 = x_2'(5) = 2(5) + 14 = 24$ m/min. En el momento del encuentro entonces, ambos cuerpos se están moviendo hacia la derecha.

★

EJEMPLO 10.1.9. Tres puntos se mueven en el eje x; sus respectivas leyes de movimiento son $x = x_1(t) = t^2 - 5t + 4$, $x = x_2(t) = t^2 - 6t + 8$ y $x = x_3(t) = t^2 - 7t + 12$, en donde x se mide en metros y t en minutos. Verificar que en un momento los tres puntos se encuentran. Describir la posición y la velocidad de cada uno de los puntos en ese instante.

SOLUCIÓN. Observe que los puntos comienzan su movimiento en $x = x_1(0) = 4$, $x = x_2(0) = 8$ y $x = x_3(0) = 12$, respectivamente. Debemos ver que existe una $t > 0$ para la cual $x_1(t) = x_2(t) = x_3(t)$. Es decir, debemos ver que el sistema de ecuaciones

$$t^2 - 5t + 4 = t^2 - 6t + 8 = t^2 - 7t + 12,$$

tiene una solución positiva. Considerando solamente la primera igualdad $t^2 - 5t + 4 = t^2 - 6t + 8$, obtenemos $t = 4$, el cual es el mismo valor para el cual $t^2 - 6t + 8 = t^2 - 7t + 12$ (la segunda igualdad). Es entonces a los $t = 4$ minutos de haber comenzado el movimiento, que los tres puntos se encuentran en $x = x_1(4) = (4)^2 - 5(4) + 4 = 0 = x_2(4) = x_3(4)$ (en el origen). La velocidad de cada uno de los puntos en el instante del encuentro es $x_1'(4) = 2(4) - 5 = 3$ m/min, $x_2'(4) = 2(4) - 6 = 2$ m/min, y $x_3'(4) = 2(4) - 7 = 1$ m/min (cada

uno de los tres moviéndose hacia la derecha, con rapidez respectiva de 3, 2 y 1 metros por minuto).

★

EJERCICIOS (10.1)

1. ¿Verdadero o falso? Si un cuerpo se mueve con la ley de movimiento $x = 3t + 4$, entonces la velocidad de este cuerpo es constante durante todo su movimiento.

2. ¿Verdadero o falso? Si un cuerpo se mueve bajo la ley $x = t^2 + 3t$, entonces la aceleración de su movimiento es constante.

En los ejercicios 3 al 15, describa el movimiento del cuerpo cuya ley se da al calcular: (a) la velocidad y posición inicial, (b) el intervalo de tiempo en que el cuerpo se mueve hacia la derecha y (c) el intervalo de tiempo en que el cuerpo se mueve hacia la izquierda.

3. $x = f(t) = 2$. **4.** $x = f(t) = t + 2$. **5.** $x = f(t) = t^2 + 1$.

6. $x = f(t) = (t - 1)(t - 4)$. **7.** $x = f(t) = (t - 1)(t - 4)(t - 6)$.

8. $x = f(t) = t^3 + 3t$. **9.** $x = f(t) = \ln(t + 1)$. **10.** $x = f(t) = e^t - 1$.

11. $x = f(t) = \arctan t$. **12.** $x = f(t) = \operatorname{sen}(3t)$. **13.** $x = f(t) = \sqrt{1 + t^2}$.

14. $x = f(t) = te^{-t}$. **15.** $x = f(t) = t^2e^{-2t}$

En los ejercicios 16 al 20 se dan las leyes de movimiento de dos cuerpos $x = x_1(t)$ y $x = x_2(t)$. Demuestre que los cuerpos se encuentran solamente una vez. Calcule la velocidad y la posición de ambos cuerpos en el instante del encuentro.

16. $x = f_1(t) = t - 3, x = f_2(t) = \frac{1}{3}t - 2$.

17. $x = f_1(t) = t^2, x = f_2(t) = t + 3$.

18. $x = f_1(t) = t^2 + t + 1, x = f_2(t) = -t^2 + 3$.

19. $x = f_1(t) = \sqrt{t - 1}, x = f_2(t) = 3 - t$.

20. $x = f_1(t) = \sqrt[4]{(t^2 - 4)^2}, x = f_2(t) = t^2$.

10.2 RAZONES DE CAMBIO RELACIONADAS

El esquema general de los problemas que abordaremos en esta sección es el siguiente: se tienen dos variables que están cambiando con el tiempo, digamos $x = x(t)$ y $y = y(t)$. Éstas pueden ser distancias, áreas, volúmenes, etcétera. Ambas variables a su vez están relacionadas entre sí por medio de una ecuación, que designaremos en general como $F(x, y) = 0$. Ya se conoce la velocidad a la que está cambiando con el tiempo alguna de estas variables y se quiere conocer la velocidad a la que está cambiando la otra variable (es decir, al conocer $x'(t)$ o $y'(t)$, se quiere conocer $x'(t)$ o $y'(t)$, respectivamente). La manera de abordar este problema es considerar la relación $F(x, y) = 0$ que conecta a ambas variables y derivarla respecto del tiempo (recuerde que tanto x como y son funciones del tiempo), aplicando correctamente la regla de la cadena. Por supuesto que una de las dificultades que debemos vencer en este tipo de problemas es obtener correctamente la ecuación $F(x, y) = 0$ que conecta las variables x y y, las cuales deben ser primeramente bien identificadas (o bien definidas, en el caso de que estén en juego más de dos variables relacionadas entre sí que estén cambiando con el tiempo). Después de esto, lo que sigue es saber derivar bien la expresión $F(x, y) = 0$ respecto del tiempo, aplicando debidamente la regla de la cadena, y obtener lo que el problema pide, sustituyendo la información del mismo en la expresión $F(x, y) = 0$ derivada.

Veamos trabajar estas ideas en ejemplos concretos.

EJEMPLO 10.2.1. Se lanza una piedra a un estanque de aguas tranquilas y se genera una serie de ondas circulares concéntricas. El radio de la primera onda aumenta a razón de 0.5 centímetros cada segundo. ¿A qué velocidad está cambiando el área del círculo que encierra esta onda cuando el radio del círculo es $r = 1$ metro?

SOLUCIÓN. Las variables que están involucradas en el problema son: (1) el radio r del círculo de la onda que se está expandiendo y (2) el área A de tal círculo. Ambas variables son funciones del tiempo: a medida que transcurre el tiempo tanto el radio como el área cambian (de hecho, aumentan). Este hecho lo enfatizamos escribiendo $r = r(t)$ y $A = A(t)$. A su vez, estas dos variables están relacionadas entre sí. Sabemos, desde nuestros tiempos de la primaria, que tal relación es $A = \pi r^2$. Ésta es la expresión importante en nuestro problema. En el problema se nos proporciona la velocidad, de aquélla a la que varia el radio del círculo. Esta velocidad es la derivada $\frac{dr}{dt} = 0.5$ cm/s. Si derivamos ambos miembros en $A = \pi r^2$ respecto del tiempo obtenemos:

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}.$$

De esta última expresión conocemos $r'_t = 0.5$ cm/s, y queremos calcular A'_t (la velocidad a la que está variando el área con el tiempo) cuando el radio es de $r = 100$ cm. Observe que este último dato es importante, pues en la expresión obtenida para $\frac{dA}{dt}$ se delata que esta variación del área aumenta a medida que crece r (lo cual, desde el punto de vista físico, resulta plausible: mientras más grande sea el radio, el número de centímetros cuadrados que aumenta el área en algún intervalo de tiempo, será mayor). Así pues, queremos conocer $\frac{dA}{dt}$ cuando $r = 100$ cm, siendo $\frac{dr}{dt} = 0.5$ cm/s. Entonces:

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt} = 2\pi(100 \text{ cm})(0.5 \text{ cm/s}) = 100\pi \text{ cm}^2/\text{s}.$$

Es decir, el área del círculo está cambiando a una velocidad de 100π centímetros cuadrados cada segundo.

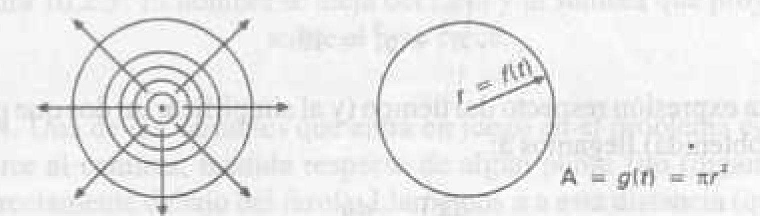


Figura 10.2.1. Las ondas concéntricas que se expanden al tirar una piedra a las aguas tranquilas de un estanque (ejemplo 10.2.1).

★

EJEMPLO 10.2.2. Una escalera de 7 metros de longitud está recargada sobre una pared. En su extremo superior se encuentra un hombre haciendo unos arreglos. Esta persona no sabía que el piso sobre el cual estaba apoyada la escalera era resbaladizo y en un momento dado el extremo inferior de la escalera comienza a resbalar, alejándose de la pared a una velocidad constante de 2 metros cada minuto. ¿A qué velocidad irá cayendo el hombre cuando éste se encuentre a un metro del piso?

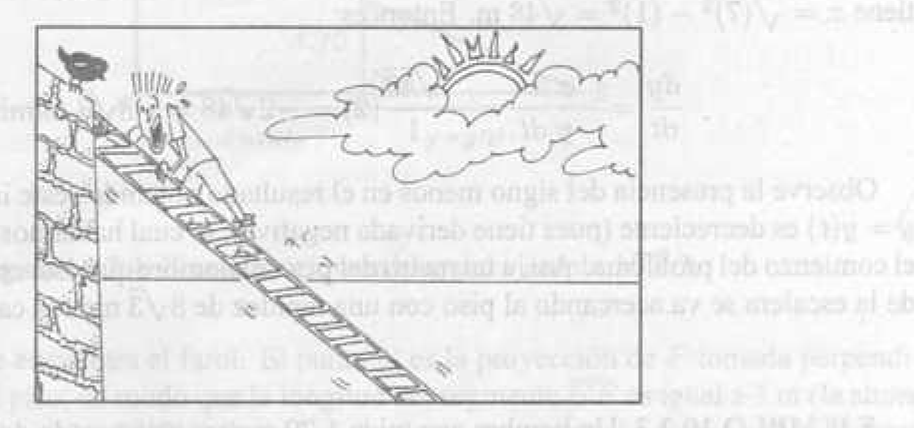


Figura 10.2.2. Al pobre hombre se le está resbalando la escalera, cuyo extremo inferior se aleja de la pared a una velocidad constante de 2 m/min.

SOLUCIÓN. Las variables que están cambiando con el tiempo son las siguientes: (1) la distancia, medida respecto de la pared, del extremo inferior de la escalera (llamémosla $x = x(t)$), y, (2) la distancia, medida respecto del piso, a la que se encuentra el extremo superior de la escalera (en donde se encuentra el hombre; llamemos esta distancia $y = y(t)$). Observe que mientras la función $x = x(t)$ es creciente (a medida que transcurre el tiempo, el valor de x aumenta), la función $y = y(t)$ es decreciente (a medida que transcurre el tiempo, el valor de y disminuye). Estas dos variables (funciones del tiempo) a su vez están relacionadas entre sí: en cualquier instante del movimiento de la escalera que se resbala, las variables x y y son los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es la longitud de la escalera (dato conocido: 7 metros). Entonces, el teorema de Pitágoras nos dice que:

$$x^2 + y^2 = 49.$$

Al derivar esta expresión respecto del tiempo (y al simplificar un dos que puede cancelarse de la expresión obtenida) llegamos a:

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0.$$

De esta expresión se nos pregunta por $\frac{dy}{dt}$ que es la velocidad a la que está variando (con el tiempo) la distancia del extremo superior de la escalera, medida respecto del piso. Es decir, la velocidad a la que el hombre está cayendo. Esta velocidad será tanto mayor, como más cerca se encuentre el hombre del piso, lo cual se revela al despejar $\frac{dy}{dt}$ de la expresión anterior:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}.$$

Observe que a medida que y es más pequeña (y por lo tanto x más grande), la velocidad que representa $\frac{dy}{dt}$ es mayor. De esta expresión conocemos $\frac{dx}{dt} = 2$ m/min (velocidad a la que x está aumentando) y $y = 1$ m. El valor correspondiente de x lo obtenemos del teorema de Pitágoras (de la relación establecida entre x y y): en el instante en que $y = 1$ se tiene $x = \sqrt{(7)^2 - (1)^2} = \sqrt{48}$ m. Entonces:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt} = -\frac{\sqrt{48}}{1}(2) = -2\sqrt{48} = -8\sqrt{3} \text{ m/min}.$$

Observe la presencia del signo menos en el resultado obtenido: éste indica que la función $y = y(t)$ es decreciente (pues tiene derivada negativa), lo cual habíamos observado ya desde el comienzo del problema. Así, a un metro del piso, el hombre que está en el extremo superior de la escalera se va acercando al piso con una rapidez de $8\sqrt{3}$ metros cada minuto.

*

EJEMPLO 10.2.3. Un hombre que mide 1.70 metros está parado debajo de un farol que está colgado a 3 metros del piso. Esta persona comienza a caminar alejándose del farol a una velocidad de 0.4 m/s. Calcular la velocidad a la que crece la sombra del hombre proyectada sobre el piso.

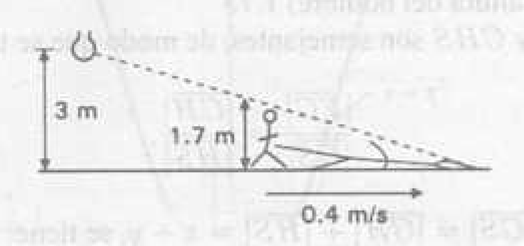


Figura 10.2.3. El hombre se aleja del farol y la sombra que proyecta sobre el piso crece.

SOLUCIÓN. Una de las variables que entra en juego en el problema es la distancia que el hombre recorre al caminar, medida respecto de algún punto fijo (digamos, el punto del piso que está directamente debajo del farol). Llamemos x a esta distancia (que mediremos en metros), la cual es una función del tiempo t (que mediremos en segundos), digamos $x = x(t)$. De hecho, sabemos que $\frac{dx}{dt} = 0.4$ m/s. Otra variable que interviene en el problema, y que es función del tiempo, es la longitud de la sombra proyectada sobre el piso por el hombre. Llamemos $y = y(t)$ a esta longitud. Lo que el problema nos pregunta es $\frac{dy}{dt}$. Debemos ahora encontrar la relación que guardan estas dos variables. En la figura 10.2.4, se muestra esquemáticamente lo que sucede a un tiempo t cualquiera.

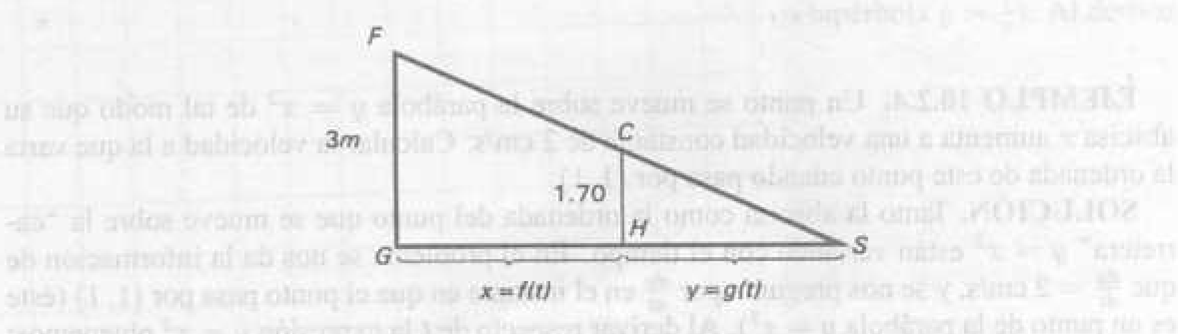


Figura 10.2.4. Situación esquemática del ejemplo 10.2.3.

En el punto F se encuentra el farol. El punto G es la proyección de F tomada perpendicularmente sobre el piso, de modo que la longitud del segmento $\overline{GF}$ es igual a 3 m (la altura a la que está colgado el farol). El punto H es donde se encuentra el hombre en un instante t cualquiera, de modo que la longitud del segmento $\overline{GH}$ es $x = f(t)$. El punto S es donde termina la sombra del hombre, de modo que la longitud del segmento $\overline{HS}$ es $y = g(t)$. El

punto C es donde termina la cabeza del hombre, el cual es colineal con F y con S. La longitud del segmento $\overline{HC}$ es (la altura del hombre) 1.7.

Los triángulos FGS y CHS son semejantes, de modo que se tiene la relación:

$$\frac{|\overline{FG}|}{|\overline{GS}|} = \frac{|\overline{CH}|}{|\overline{HS}|},$$

o bien, observando que $|\overline{GS}| = |\overline{GH}| + |\overline{HS}| = x + y$, se tiene:

$$\frac{3}{x+y} = \frac{1.7}{y}$$

la cual es la relación deseada entre las variables x y y. Podemos escribirla como:

$$y = \frac{1.7}{1.3}x = 1.3077x.$$

Si tomamos la derivada respecto de t en ambos miembros de la expresión $y = 1.3077x$, se obtiene que:

$$\frac{dy}{dt} = 1.3077\frac{dx}{dt},$$

de donde, al sustituir $\frac{dx}{dt} = 0.4$ m/min, obtenemos que la velocidad a la que crece la sombra que el hombre proyecta sobre el piso es $\frac{dy}{dt} = 1.3077(0.4) = 0.523$ m/s. Observe que la velocidad a la que crece la sombra no depende de qué tan alejado del farol se encuentre el hombre. Esta velocidad de crecimiento es constante e igual a 0.523 m/s.

⋆

EJEMPLO 10.2.4. Un punto se mueve sobre la parábola $y = x^2$ de tal modo que su abscisa x aumenta a una velocidad constante de 2 cm/s. Calcular la velocidad a la que varía la ordenada de este punto cuando pasa por $(1, 1)$.

SOLUCIÓN. Tanto la abscisa como la ordenada del punto que se mueve sobre la "carretera" $y = x^2$ están variando con el tiempo. En el problema se nos da la información de que $\frac{dx}{dt} = 2$ cm/s, y se nos pregunta por $\frac{dy}{dt}$ en el instante en que el punto pasa por $(1, 1)$ (éste es un punto de la parábola $y = x^2$). Al derivar respecto de t la expresión $y = x^2$ obtenemos:

$$\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}.$$

Si sustituimos los valores $x = 1$ y $x'_t = 2$ obtenemos que:

$$\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} = 2(1)(2) = 4 \text{ cm/s}.$$

Es decir, la ordenada del punto se está moviendo (está creciendo) a una velocidad de 4 cm/s en el instante en que el punto está pasando por $(1, 1)$.

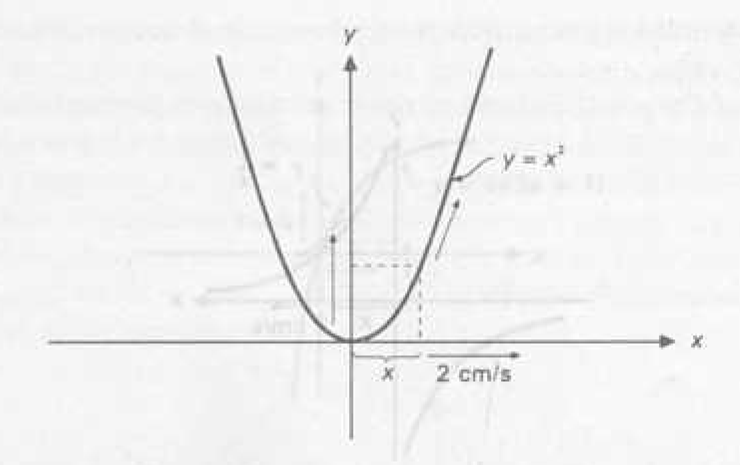


Figura 10.2.5. El punto está moviéndose sobre la parábola $y = x^2$ del ejemplo 10.2.4.

EJEMPLO 10.2.5. Un punto se mueve sobre la hipérbola $y = \frac{1}{x}$ de tal modo que su abscisa x aumenta a una velocidad constante de 2 cm/s. Calcular la velocidad a la que varía la ordenada de este punto cuando pasa por $(1, 1)$.

SOLUCIÓN. La línea de razonamiento para abordar este problema es completamente análoga a la del ejemplo anterior: tanto la abscisa x como la ordenada y del punto que se mueve sobre la "carretera" $y = \frac{1}{x}$ están variando con el tiempo, digamos $x = x(t)$ y $y = y(t)$. En el problema se nos da la información de que $\frac{dx}{dt} = 2$ cm/s, y se nos pregunta por $\frac{dy}{dt}$ en el instante en que el punto pasa por $(1, 1)$ (éste es un punto de la hipérbola $y = \frac{1}{x}$). Al derivar respecto de t la expresión $y = \frac{1}{x}$ obtenemos:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{x^2}\frac{dx}{dt}.$$

Si sustituimos los valores $x = 1$ y $\frac{dx}{dt} = 2$, obtenemos que:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{x^2}\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{(1)^2}(2) = -2 \text{ cm/s}.$$

La presencia del signo menos en este resultado nos indica que (al menos en el instante en el que el punto está pasando por $(1, 1)$), la ordenada $y = y(t)$ es una función decreciente del tiempo (a medida que transcurre el tiempo, la ordenada va tomando valores cada vez más pequeños). Entonces, cuando el punto está pasando por $(1, 1)$, con su abscisa que crece a una velocidad de 2 cm/s, su ordenada está decreciendo *con la misma rapidez*, es decir, con una velocidad de -2 cm/s (en contraste con el punto del ejemplo anterior, que al pasar por $(1, 1)$ sobre la parábola $y = x^2$, tanto abscisa como ordenada están creciendo).

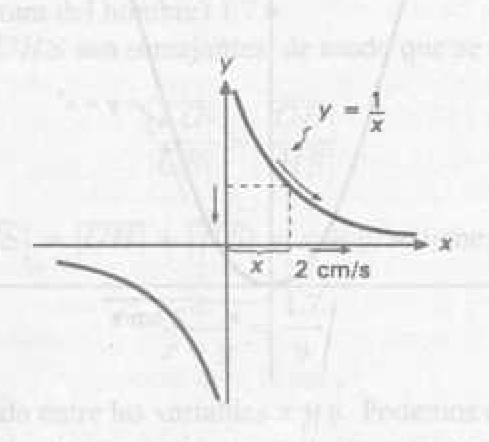


Figura 10.2.6. El punto está moviéndose sobre la hipérbola
$y = \frac{1}{x}$ del ejemplo 10.2.5.

★

EJEMPLO 10.2.6. Un punto comienza a moverse, en $t = 0$, partiendo del origen de coordenadas, por la curva $y = \ln(3x+1)$, de tal modo que su ordenada crece a una velocidad constante de 1 cm/s. Determinar el momento en que su abscisa está creciendo a una velocidad de 5 cm/s.

SOLUCIÓN. De acuerdo con la expresión $y = \ln(3x+1)$ obtenemos, al derivar respecto del tiempo, que:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{3x+1}(3)\frac{dx}{dt} = \frac{3}{3x+1}\frac{dx}{dt}.$$

Se nos dice que $\frac{dy}{dt} = 1$ cm/s y se nos pregunta por el instante en que $\frac{dx}{dt} = 5$. Al sustituir estos datos en la expresión anterior obtenemos que:

$$1 = \frac{3(5)}{3x+1} \Rightarrow x = \frac{14}{3}.$$

Es decir, cuando el punto está pasando por el punto de abscisa $x = \frac{14}{3}$ es que está creciendo a una velocidad de 5 cm/s. La ordenada correspondiente de este punto es $y = \ln\left(3\left(\frac{14}{3}\right)+1\right) = \ln 15$ y, puesto que esta última está creciendo a una velocidad de 1 cm/s, concluimos que es después de $t = \frac{\ln 15 \text{ cm}}{(1 \text{ cm/s})} = \ln 15$ segundos de haber comenzado el movimiento, cuando el punto está pasando por $\left(\frac{14}{3}, \ln 15\right)$, y por lo tanto, cuando su abscisa está aumentando a una velocidad de 5 cm/s.

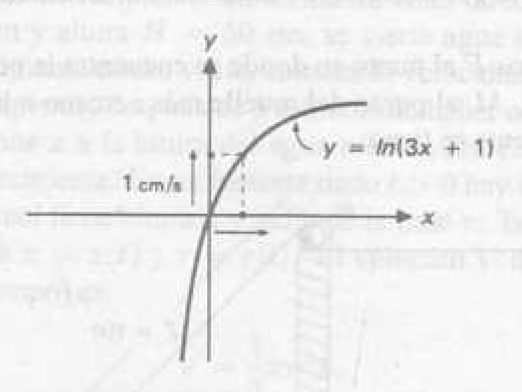


Figura 10.2.7. El punto moviéndose sobre la curva $y = \ln(3x+1)$ del ejemplo 10.2.6.

⋆

EJEMPLO 10.2.7. Se inyecta gas a un globo esférico a razón de 1 m^3/h. Calcular la rapidez a la que está aumentando el radio del globo después de 2 horas de haber comenzado a inflarlo.

SOLUCIÓN. Llamemos $r = r(t)$ al radio del globo (en metros) al tiempo $t > 0$ (en horas), y sea $V = V(t)$ el volumen (en m^3) del globo en el instante t. Las variables V y r están relacionadas por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ (el volumen V de una esfera de radio r). Si derivamos respecto de t en ambos miembros de esta expresión nos queda:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\left(3\pi r^2 \frac{dr}{dt}\right) = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}.$$

Sabemos que $\frac{dV}{dt} = 1$ m^3/h (la variación del volumen del globo respecto del tiempo) y queremos saber el valor de $\frac{dr}{dt}$ después de 2 horas de haber comenzado a inflar el globo. En este instante el volumen del globo es de 2 m^3 (al globo entra un metro cúbico cada hora), de modo que su radio lo obtenemos de la fórmula $2 = \frac{4}{3}\pi r^3$, o sea $r = \sqrt[3]{\frac{3}{2\pi}} = 0.7816$ m. Entonces, de la expresión que obtuvimos entre $\frac{dV}{dt}$ y $\frac{dr}{dt}$ nos queda que:

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt} = \frac{1 \text{ m}^3/\text{h}}{4\pi(0.7816 \text{ m})^2} = 0.13 \text{ m/h}.$$

Es decir, a las dos horas de haber comenzado a llenar el globo su radio está aumentando con una velocidad de (aproximadamente) 13 centímetros por hora.

⋆

EJEMPLO 10.2.8. Una barca es remolcada hacia un muelle por medio de una cuerda que se está enrollando en una polea colocada a la orilla de la plataforma del muelle, con una rapidez constante de 5 metros cada minuto. La distancia vertical entre el punto en donde se encuentra la polea y el punto en donde está sujeta la barca es de 3 metros.

Calcular la velocidad a la que la barca se está acercando al muelle, cuando ésta se encuentra a 3 metros de él.

SOLUCIÓN. Llamemos P al punto en donde se encuentra la polea, B al punto en donde la cuerda sujeta a la barca, M al punto del muelle más cercano a la barca (hacia donde ésta se dirige). Esquemáticamente se tiene:

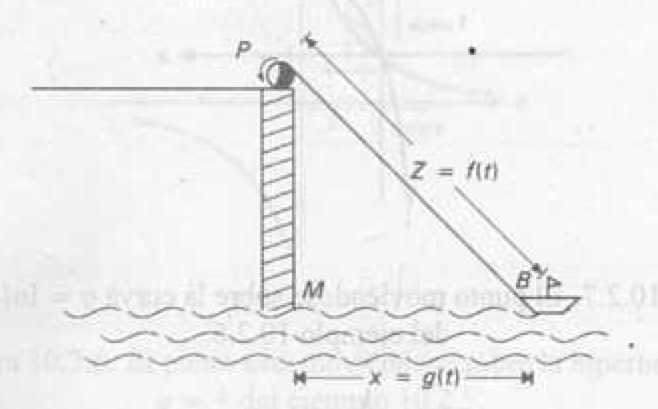


Figura 10.2.8. La barca remolcada hacia el muelle del ejemplo 10.2.8.

Llamemos z a la distancia entre P y B. Esta variable depende del tiempo (va decreciendo con el tiempo) y el ejercicio nos dice que la velocidad a la que está cambiando respecto de t es $\frac{dz}{dt} = -5$ m/min (el signo menos indica que z es una función decreciente de t). Designemos con x la distancia entre B y M. Esta variable también es función del tiempo y lo que en el ejercicio queremos calcular es justamente $\frac{dx}{dt}$. Puesto que la distancia entre M y P es de 3 m, si aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo PMB obtenemos:

$$z^2 = (3)^2 + x^2 = 9 + x^2.$$

Al derivar ambos miembros respecto de t obtenemos:

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt},$$

de donde:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{z}{x}\frac{dz}{dt}.$$

Cuando $x = 3$, se tiene $z = \sqrt{9 + (3)^2} = 3\sqrt{2}$, de modo que, al sustituir los datos numéricos en la expresión anterior llegamos a:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{z}{x}\frac{dz}{dt} = \frac{3\sqrt{2}}{3}(-5) = -5\sqrt{2} \text{ m/min}.$$

Así, cuando la barca dista 3 metros del muelle, ésta se acerca al muelle con una rapidez de $5\sqrt{2}$ metros cada minuto. La presencia del signo menos indica que la función de x con respecto de t es decreciente.

★

EJEMPLO 10.2.9. En un recipiente, en forma de cono circular recto (invertido), con radio de base $R = 30$ cm y altura $H = 50$ cm, se vierte agua a razón de dos litros cada minuto. Si en $t = 0$ el recipiente estaba vacío, calcular la velocidad a la que está aumentando el nivel del agua en el recipiente, después de 5 minutos de haber comenzado a llenarse.

SOLUCIÓN. Llamemos x a la altura del agua medida (en centímetros) respecto de la base en que descansa el recipiente. En un instante dado $t > 0$ hay un "cono de agua" dentro del recipiente cónico, el cual tiene altura x y radio de la base r. Tanto x como r son funciones del tiempo t, digamos $x = x(t)$ y $r = r(t)$. El volumen V de este cono de agua (que también es función del tiempo) es:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 x.$$

El ejercicio nos dice que la variación que tiene este volumen respecto del tiempo es $\frac{dV}{dt} = 2000\ \text{cm}^3/\text{min}$. Por otra parte, las variables r y x están relacionadas entre sí. Para determinar esta relación observamos la siguiente figura:

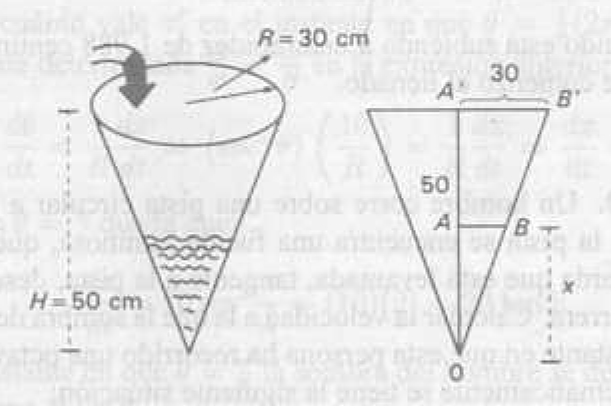


Figura 10.2.9. El recipiente cónico que es llenado con agua del ejemplo 10.2.9.

El triángulo OAB es semejante al triángulo $OA'B'$, de modo que:

$$\frac{|\overline{OA}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{OA'}|}{|\overline{A'B'}|} = \frac{\text{altura del recipiente cónico}}{\text{radio de la base del recipiente cónico}}$$

Es decir que:

$$\frac{x}{r} = \frac{50}{30},$$

de donde se obtiene que $r = \frac{3}{5}x$, y entonces el volumen de agua vertido al recipiente, en términos de la altura x, se ve como:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 x = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{3}{5}x\right)^2 x = \frac{3\pi}{25}x^3.$$

Al derivar respecto del tiempo ambos miembros de esta expresión obtenemos:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{9\pi}{25}x^2\frac{dx}{dt}.$$

Queremos saber $\frac{dx}{dt}$, la rapidez a la que está subiendo el nivel del agua en el recipiente, a los 5 minutos de haber comenzado a llenarse. Puesto que se están vertiendo 2 litros cada minuto, a los 5 minutos hay 10 litros (10000 cm^3) de agua en el recipiente. Entonces se tiene que:

$$V = \frac{3\pi}{25}x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{25V}{3\pi}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{25(10000)}{3\pi}} = 29.823 \text{ cm}.$$

Es decir, a los 5 minutos de comenzar a vaciar agua al recipiente, la altura del líquido era de 29.823 cm. De la relación encontrada entre V_t', x y x_t' obtenemos que:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{25}{9\pi x^2}\frac{dV}{dt} = \frac{25(2000 \text{ cm}^3/\text{ min})}{9\pi(29.823 \text{ cm})^2} = 1.988 \text{ cm/min}.$$

Así, el nivel del líquido está subiendo a una rapidez de 1.988 centímetros cada minuto 5 minutos después de que comenzó el llenado.

★

EJEMPLO 10.2.10. Un hombre corre sobre una pista circular a una velocidad de 10 km/h. En el centro de la pista se encuentra una fuente luminosa, que proyecta la sombra del hombre sobre un barda que está levantada, tangente a la pista, desde el punto en que el hombre comienza su carrera. Calcular la velocidad a la que la sombra del hombre se desplaza sobre la barda, en el instante en que esta persona ha recorrido una octava parte de la pista.

SOLUCIÓN. Esquemáticamente se tiene la siguiente situación:

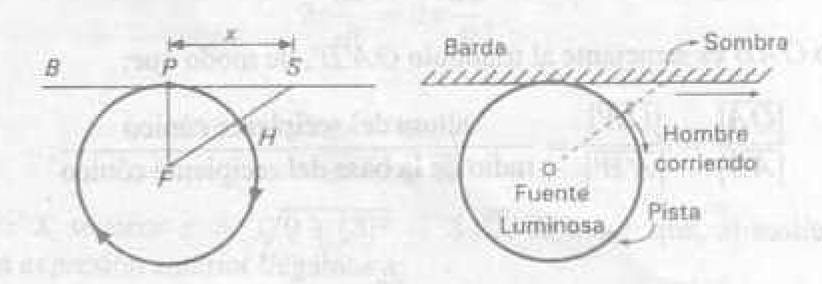


Figura 10.2.10. El hombre y su sombra que corren, en el ejemplo 10.2.10.

En el punto F se encuentra la fuente luminosa. La línea B es la barda, la cual es tangente a la pista C sobre la cual corre el hombre H; P es el punto de tangencia de donde arranca el corredor. El punto S es un punto sobre la barda en donde se encuentra la sombra del hombre H provocada por la fuente F. Sea $x = x(t)$ la distancia del punto P (fijo) al punto S (en

donde se encuentra la sombra sobre la barda en el instante t). Queremos calcular la velocidad $x'_t = x'(t)$ cuando el hombre ha recorrido la octava parte de la pista circular. Llamemos $\theta = \theta(t)$ al ángulo que forma el radio $\overline{FP}$ con el radio $\overline{FH}$ en el instante t. La derivada $\frac{d\theta}{dt}$ es la velocidad angular del corredor (cuántos radianes por hora recorre), la cual sabemos que está relacionada con la velocidad lineal v (tangencial al círculo) según la relación $v = R\frac{d\theta}{dt}$, en donde R es el radio del círculo (este dato no lo proporciona el problema, pero, como veremos adelante, no se usará en ningún momento). El problema nos dice que $v = 10$ km/h, de modo que $\frac{d\theta}{dt} = \frac{10}{R}$ rad/h. Del triángulo FPS, obtenemos que:

$$\tan\theta = \frac{|PS|}{|FP|} = \frac{x}{R}.$$

Al derivar esta expresión respecto del tiempo se obtiene:

$$(\sec^2\theta)\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dx}{dt}.$$

Queremos saber cuánto vale x'_t en el instante en que $\theta = \frac{1}{8}(2\pi) = \frac{\pi}{4}$. Al sustituir la relación anteriormente determinada $\frac{d\theta}{dt} = \frac{10}{R}$ en la expresión anterior nos queda que:

$$(\sec^2\theta)\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dx}{dt} \Rightarrow (\sec^2\theta)\left(\frac{10}{R}\right) = \frac{1}{R}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 10\sec^2\theta,$$

de modo que cuando $\theta = \frac{\pi}{4}$ queda que:

$$\frac{dx}{dt} = 10\sec^2\frac{\pi}{4} = (10)(2) = 20 \text{ km/h}.$$

Así pues, en el instante en que $\theta = \frac{\pi}{4}$ la sombra del hombre se desplaza sobre la barda al doble de velocidad que él lleva.

★

EJERCICIOS (10.2)

En los ejercicios 1 al 10, suponga que las variables x y y son funciones del tiempo $t \geq 0$, digamos $x = x(t)$ y $y = y(t)$, y que éstas guardan la relación proporcionada en el ejercicio. Si conoce la velocidad a la que cambia una de las variables, calcule el correspondiente cambio de la otra en el punto indicado.

1. $y = 4x + 3$. $\frac{dx}{dt} = 4$. $\frac{dy}{dt} = ?$

2. $y = 2 - 7x$. $\frac{dy}{dt} = -1$. $\frac{dx}{dt} = ?$

3. $3x + 8y - 2 = 0$. $\frac{dx}{dt} = 2$. $\frac{dy}{dt} = ?$

4. $y = x^2 + 1$. $\frac{dx}{dt} = 4$. $\frac{dy}{dt} = ?$, cuando $x = 3$.

5. $y = \sqrt{x^2 - 2}$. $\dfrac{dx}{dt} = -2$. $\dfrac{dy}{dt} =?$, cuando $x = 2$.

6. $x^2 + y^2 = 1$. $\dfrac{dx}{dt} = 1$. $\dfrac{dy}{dt} =?$, cuando $x = \dfrac{1}{2}$.

7. $x^3 + y^3 = 1$. $\dfrac{dx}{dt} = -1$. $\dfrac{dy}{dt} =?$, cuando $x = \dfrac{1}{3}$.

8. $y = xe^{-x}$. $\dfrac{dy}{dt} = 2$. $\dfrac{dx}{dt} =?$, cuando $x = 2$.

9. $x = y^3 - 3y^2 + y$. $\dfrac{dx}{dt} = -3$. $\dfrac{dy}{dt} =?$, cuando $y = 1$.

10. $x = y\ln(1 + y^2)$. $\dfrac{dx}{dt} = -2$. $\dfrac{dy}{dt} =?$, cuando $y = 2$.

11. La diagonal de un cuadrado está aumentando a una razón de 4 cm/min. Calcule la razón a la que está aumentando el área del cuadrado en el momento en que la diagonal es de 5 cm.

12. Un triángulo rectángulo tiene un cateto de 5 cm y su hipotenusa está aumentando a razón de 4 cm/min. Calcule la rapidez a la que está aumentando el otro cateto del triángulo, cuando éste es de 7 cm.

13. Un triángulo rectángulo tiene un cateto de 5 cm y su hipotenusa está aumentando a razón de 4 cm/min. Calcule la rapidez a la que está aumentando el área del triángulo, cuando la hipotenusa es de 15 cm.

14. Uno de los lados de un rectángulo es de 3 cm y el otro está aumentando a razón de 5 cm/min. Calcule la rapidez a la que está aumentando el área del rectángulo.

15. El diámetro de un círculo está aumentando a razón de 4 cm/min. Determine la rapidez a la que está aumentando el área del círculo cuando su diámetro sea de 8 cm.

16. La diagonal de un cubo está aumentando a una razón de 4 cm/min. Calcule la razón a la que está aumentando el volumen del cubo en el momento en el que la diagonal es de 5 cm.

17. La diagonal de un cubo está aumentando a una razón de 4 cm/min. Calcule la razón a la que está aumentando el área lateral del cubo en el momento en el que la diagonal es de 5 cm.

18. El volumen de un cubo está aumentando a razón de $10\ \text{cm}^3/\text{min}$. Calcule la rapidez a la que está creciendo el lado del cubo cuando éste sea de 2 cm.

19. Un cilindro circular recto de radio de la base $R = 5$ cm tiene una altura que está aumentando a razón de 2 cm/min. Calcule la rapidez a la que está aumentando el volumen del cilindro.

20. El radio de la base de un cilindro circular recto de altura $H = 10$ cm está aumentando a razón de 3 cm/min. Calcule la rapidez a la que está aumentando el volumen del cilindro cuando el radio de su base sea de 5 cm.

21. Calcule la rapidez a la que está aumentando el área lateral del cilindro del ejercicio anterior (incluyendo las tapas).

22. Un cono circular recto tiene una altura de $H = 15$ cm, mientras que el radio de su base está aumentando a razón de 1 cm/min. Calcule la rapidez a la que está aumentando el volumen del cono cuando el radio de su base sea de 3 cm.

23. El volumen de un cono circular recto está aumentando a razón de 100 cm^3/ min. La altura del cono es constante e igual a $H = 7$ cm. Calcule la razón a la que está aumentando el área de la base del cono cuando ésta es de 10 cm^2.

24. Dos puntos A y B parten del origen de coordenadas moviéndose sobre la dirección positiva de los ejes x y y respectivamente. La ley del movimiento para el punto A es $x = x(t) = t^2$ y la del punto B es $y = y(t) = 3t^3$, en donde x y y se miden en centímetros, y t en minutos. Determine la rapidez a la que estos dos puntos se están alejando uno del otro después de 2 minutos de haberse comenzado a mover.

25. Dos puntos A y B parten del origen de coordenadas. El punto A se mueve sobre la dirección positiva del eje x con la ley de movimiento $x = x(t) = 2t^2$, en donde x se da en centímetros y t en minutos. El punto B se mueve sobre la recta $y = x$ a una rapidez constante de 2 cm/min. Determine la rapidez a la que estos dos puntos se están alejando uno del otro después de 2 minutos de haberse comenzado a mover.

26. Se tiene un depósito en forma de cilindro circular recto de altura 9 m y radio de la base 2 m. En $t = 0$ comienza a llenarse el depósito con agua a razón de 10 m^3/h. Determine la velocidad a la que está subiendo el nivel del líquido en el depósito.

27. Se tiene un depósito cónico de altura 10 m y radio de la base 3 m. En $t = 0$ se abre un flujo de agua al interior del depósito, a una razón de 8 m^3/h. Determine la razón a la que está aumentando el nivel del agua a la media hora de haberse comenzado a llenar el depósito.

28. Se tiene inicialmente un depósito cónico de altura 15 m y radio de la base 5 m, el cual está lleno de agua. En $t = 0$ comienza a bombearse el agua hacia fuera del depósito a una razón de 8 m^3/h. Determine la razón a la que está disminuyendo el nivel del líquido en el depósito después de 10 horas de haber comenzado a vaciarse.

29. Un depósito cónico de 12 m de altura y radio de base 4 m, tiene inicialmente 10 m^3 de agua. En $t = 0$ comienza a fluir agua al interior del depósito a una razón de 8 m^3/h, y al mismo tiempo, por el fondo, comienza a salir agua a razón de 5 m^3/h. Determine la razón a la que está variando el nivel del líquido después de 3 horas.

30. Una pista circular para correr tiene un farol en su centro. En el punto de arranque hay una barda recta tangente al circulo. Un corredor sale de este punto a una velocidad de 12 km/h, y su sombra es proyectada por la luz del farol sobre la barda mencionada. Determine la velocidad a la que "está corriendo la sombra" del corredor, en el instante en el que éste ha recorrido la sexta parte de la circunferencia.

31. Una persona que mide 1.8 m camina, alejándose de un farol que se encuentra a una altura de 3.5 m del piso, con una velocidad de 6 km/h. Determine la rapidez a la que está creciendo la sombra que el hombre proyecta sobre el piso.

32. Un avión pasa a dos kilómetros por encima de una persona, la cual sigue su recorrido con la vista. El avión vuela con una velocidad de 400 km/h. Determine la razón a la que está cambiando el ángulo visual de la persona después de un minuto de que pasó el avión exactamente por encima de ella.

33. Al instante t_0 se cruzan perpendicularmente las rutas de dos aviones, uno de los cuales vuela en una línea a 500 m por encima de la línea de vuelo del otro. Las velocidades de los aviones son de 750 km/h y 850 km/h. Determine la velocidad a la que los aviones se alejan después de dos minutos de t_0.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 10

EXAMEN TIPO (A)

1. Un cuerpo se mueve sobre el eje x con la ley de movimiento $x = x(t) = 3t$, en donde x se mide en centímetros y t en segundos. Describa la velocidad y la aceleración del cuerpo en cualquier instante $t \geq 0$. Interprete físicamente sus resultados.

2. Un cuerpo se mueve sobre el eje x con la ley de movimiento $x = x(t) = 2t^3 - 8t^2$, en donde x se mide en centímetros y t en segundos. Describa la velocidad y la aceleración del cuerpo a los $t = 2$ y $t = 4$ segundos después de haber comenzado su movimiento. Interprete físicamente sus resultados.

3. Dos cuerpos comienzan su movimiento sobre el eje x en $t = 0$, con leyes de movimiento respectivas dadas por $x = x_1(t) = t^2 - 4$ y $x = x_2(t) = 4 - t^2$, en donde x se mide en metros y t en minutos. Determine la velocidad inicial de ambos cuerpos, así como los puntos en donde cada uno de ellos comienza su movimiento. ¿En algún momento se cruzan sus trayectorias?

4. Un cuerpo se mueve sobre el eje x con la ley de movimiento $x = \frac{2}{\pi} \arctan t$, en donde x está en metros y t en minutos. Describa el movimiento de este cuerpo, determinando su velocidad y su aceleración en cualquier instante $t \geq 0$. ¿Hacia qué valores tiende la posición y la velocidad del cuerpo para tiempos muy grandes?

5. Un punto en el plano se mueve sobre la curva $y = x^3$; ha comenzado en el origen de coordenadas, de tal modo que su abscisa crece a una velocidad constante de 3 m/min. Determine la velocidad a la que está variando la ordenada del punto cuando éste pasa por $(2, 8)$.

6. Un punto en el plano se mueve sobre la rama de la astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2$ (en donde x y y se miden en metros) que se encuentra en el primer cuadrante, de tal manera que su abscisa crece a una velocidad constante de 10 cm/min. Determine la velocidad a la que está variando la ordenada cuando el punto pasa por $(1, 1)$.

7. En $t = 0$ se tiene un cuadrado cuyos lados miden 2 metros. Uno de sus lados comienza a crecer a una velocidad de 0.5 m/min, mientras que el otro comienza a crecer a una velocidad de 0.7 m/min. Determine la velocidad a la que está cambiando el área del cuadrilátero después de 5 min de haber comenzado a expandirse.

8. En $t = 0$ comienza a inyectarse aire dentro de una esfera. El radio de la esfera comienza a crecer a una velocidad constante de 5 cm/min. Determine el volumen de la esfera en el momento en el que éste está aumentando a una velocidad de 100 cm^3/min.

9. Una persona se encuentra colocada a 2 km del punto en donde va a despegar un cohete. En $t = 0$ despega el cohete, y durante los primeros cinco minutos, su movimiento se describe con una ley del tipo $x = x(t) = 0.5t^3 + 0.1t^2 + 1.5t$, en donde x es la altura del cohete, en kilómetros, medida respecto del piso, y t está en minutos. Determine la velocidad a la que está variando el ángulo de visión de la persona (medido respecto de la horizontal) que sigue al cohete en su trayectoria, dos minutos después del despegue.

10. Un avión pasa a dos kilómetros por encima de una persona, la cual sigue su recorrido con la vista. El avión vuela con una velocidad de 700 km/h. Determine la razón a la que

está cambiando el ángulo visual de la persona después de un minuto de que pasó el avión exactamente por encima de ella.

EXAMEN TIPO (B)

1. Un cuerpo se mueve sobre el eje x con la ley de movimiento $x = x(t) = e^t$, en donde x se mide en centímetros y t en segundos. Describa la velocidad y la aceleración del cuerpo en cualquier instante $t \geq 0$. Interprete físicamente sus resultados.

2. Un cuerpo se mueve sobre el eje x con la ley de movimiento $x = x(t) = t(t^2 - 4)$, en donde x se mide en centímetros y t en segundos. Describa la velocidad y la aceleración del cuerpo a los $t = 2$ y $t = 4$ segundos después de haber comenzado su movimiento. Interprete físicamente sus resultados.

3. Dos cuerpos comienzan su movimiento sobre el eje x en $t = 0$, con leyes de movimiento respectivas dadas por $x = x_1(t) = 2t + 3$ y $x = x_2(t) = -t - 2$, en donde x se mide en metros y t en minutos. Determine la velocidad inicial de ambos cuerpos, así como los puntos en donde cada uno de ellos comienza su movimiento. ¿En algún momento se cruzan sus trayectorias?

4. Un cuerpo se mueve sobre el eje x con la ley de movimiento $x = \frac{1}{1+t}$, en donde x está en metros y t en minutos. Describa el movimiento de este cuerpo, determinando su velocidad y su aceleración en cualquier instante $t \geq 0$. ¿Hacia qué valores tiende la posición y la velocidad del cuerpo para tiempos muy grandes?

5. Un punto en el plano se mueve sobre la curva $y = 3x^3 - 2x^2$; ha comenzado en el origen de coordenadas, de tal modo que su abscisa crece a una velocidad constante de 3 m/min. Determine la velocidad a la que está variando la ordenada del punto cuando éste pasa por $(2, 16)$.

6. Un punto en el plano se mueve sobre la rama de la astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2$ (en donde x y y se miden en metros) que se encuentra en el tercer cuadrante, de tal manera que su abscisa crece a una velocidad constante de 10 cm/min. Determine la velocidad a la que está variando la ordenada cuando el punto pasa por $(-1, -1)$.

7. En $t = 0$ se tiene un cubo cuyos lados miden 2 metros. Uno de sus lados comienza a crecer a una velocidad de 0.5 m/min, mientras que el otro comienza a crecer a una velocidad de 0.7 m/min. Determine la velocidad a la que está cambiando el área del paralelepípedo después de 5 min de haber comenzado a expandirse.

8. En $t = 0$ comienza a inyectarse aire dentro de un cubo. La diagonal del cubo comienza a crecer a una velocidad constante de 5 cm/min. Determine el volumen del cubo en el momento en el que éste está aumentando a una velocidad de 100 cm^3/min.

9. Una persona se encuentra colocada a 2 km del punto en donde va a despegar un cohete. En $t = 0$ despega el cohete, y durante los primeros cinco minutos, su movimiento se describe con una ley del tipo $x = x(t) = 0.6t^3 + 0.2t^2 + 1.1t$, en donde x es la altura del cohete, en kilómetros, medida respecto del piso, y t está en minutos. Determine la velocidad a la que está variando el ángulo de visión de la persona (medido respecto de la horizontal) que sigue al cohete en su trayectoria, dos minutos después del despegue.

10. Un avión pasa a dos kilómetros por encima de una persona, la cual sigue su recorrido con la vista. El avión vuela con una velocidad de 900 km/h. Determine la razón a la que está cambiando el ángulo visual de la persona después de un minuto de que pasó el avión exactamente por encima de ella.

NOTA HISTÓRICA: LAGRANGE, UN GENIO AMABLE.



Joseph Louis Lagrange (1736-1813) es reconocido como el matemático "más fino" del siglo XVIII, tanto por su trabajo profesional, como por su comportamiento como ser humano. Este último hecho es destacable, pues la humildad, la amabilidad y la gentileza no eran cualidades muy comunes entre los intelectuales franceses de esa época (ya se mencionó, por ejemplo, la arrogancia de Diderot, con su ateísmo imprudente, a quien Euler dio una gran lección —capítulo 6). El nombre de Lagrange lo hemos visto ya aparecer en este libro, en relación con el teorema del valor medio estudiado en el capítulo 7. No es justo, sin embargo, quedarse con la idea de que su contribución al desarrollo del Cálculo se limita al teorema del valor medio, cuando él es una de las figuras más importantes (junto con el matemático suizo L. Euler) en el desarrollo de la llamada matemática Post-Newtoniana.

Fue el menor de once hermanos, en su infancia estudió a los clásicos y sus estudios en matemáticas comenzaron con los geómetras griegos (Euclides, Arquímides, etcétera), los cuales en ese momento no le llamaron especialmente la atención. Como es común en la vida de un matemático, hay un momento en que alguna chispa enciende la flama de la pasión por esta ciencia. En el caso de Lagrange, fue un artículo del astrónomo Edmund Halley (1656-1742) en el que se hablaba del recientemente descubierto Cálculo de Newton lo que le despertó la pasión matemática que viviría hasta su muerte. En poco tiempo leyó todo lo que pudo encontrar escrito sobre el Cálculo y su actividad se declaró abiertamente dedicada a la Matemática. A los 19 años empezó a enseñar Matemática en Turín, en donde su incesante e intensa actividad intelectual lo llevó a escribir muchos artículos sobre la teoría del sonido, las descripciones del movimiento de cuerdas en vibración (movimientos mucho más complicados que los que estudiamos en este capítulo, pero que en el fondo se basan en la misma idea que aquí presentamos: la derivada es una velocidad), y, en general, en dinámica (estudio del movimiento de los cuerpos). En su correspondencia con L. Euler, se gestaron algunas de las primeras ideas de la rama de la Matemática conocida actualmente como "Cálculo de Variaciones", cuyo nacimiento se atribuye principalmente a Lagrange, Euler y Johann Bernoulli. Esa manera voraz como Lagrange aprendía y producía Matemática, le provocó quebrantos en su salud: los médicos trataban de persuadirlo de que tomara con más calma su trabajo, pero no hubo manera de convencerlo. Se dice que las consecuencias que tuvo que pagar después por contravenir las indicaciones médicas fueron de un precio muy alto: aunque Lagrange pasaba por etapas en las que aparentemente gozaba de muy buena salud, su sistema nervioso quedó dañado de por vida y nunca tuvo una recuperación total, pues frecuentemente sufría ataques de profunda melancolía. Al poco tiempo Lagrange fue invitado a ser miembro de la Academia de Berlín. Su juventud y su brillantez causaron rechazo entre los miembros

de la Academia, situación que su carácter humilde le permitió manejar con inteligencia. Durante los años en Berlín, Lagrange concretó lo que serían sus contribuciones más importantes a la Matemática, entre las que se encuentra su libro *Mécanique Analytique*, calificada por los historiadores como una verdadera obra maestra de la ciencia del siglo XVIII. Otras áreas de la Matemática en las que Lagrange hizo también contribuciones significativas fueron el estudio del movimiento de los fluidos, las series infinitas, el estudio de las perturbaciones en las órbitas de los cometas, la teoría de números, la geometría analítica, las ecuaciones diferenciales, la estabilidad de las órbitas planetarias y la teoría del potencial.

CAPÍTULO 11
LA DIFERENCIAL. FÓRMULA DE TAYLOR

"Pitágoras, primer filósofo tanto por el nombre como por los hechos, puso en los números toda la investigación de la verdad. Como seguidores suyos, los platónicos y nuestros filósofos más destacados afirmaron indubitablemente que el número había sido en el ánimo del creador el primer modelo de las cosas que habían de crearse [...]. Dado que la vía de acceso a las cosas divinas sólo se nos manifiesta mediante símbolos, podemos usar con ventaja los símbolos matemáticos debido a su incorruptible certeza."

Kepler

En este capítulo presentamos un material de transición entre lo que hemos estudiado en los diez primeros capítulos, sobre la parte diferencial del Cálculo, y lo que emprenderemos a partir del próximo capítulo, en donde entraremos ya a los terrenos del Cálculo Integral.

Uno de los objetivos de este capítulo es estudiar el concepto de diferencial de una función, el cual es un pariente muy cercano del concepto de derivada. Las ideas del Cálculo Diferencial que están entretejidas en los temas que estudiaremos del Cálculo Integral, se manejan no con el concepto de derivada, sino con el de diferencial. Así pues, con el estudio de las diferenciales de este capítulo pretendemos rescatar tales ideas con una nueva nomenclatura: debemos acostumbrarnos a hablar no de la derivada de una función, sino de la diferencial de ella.

La idea intuitiva que sugiere la palabra "diferencial" en el Cálculo, es la de una "magnitud infinitamente pequeña". Así fue usada en el siglo XVIII por los protagonistas del desarrollo del cálculo en esa época. Si quisiéramos calificar de alguna manera lo que sucedió con el Cálculo en este siglo, diríamos que es "el siglo de la explosión de resultados" (algunos historiadores de la ciencia se refieren a este siglo como "el siglo del iluminismo"). Un siglo atrás habían surgido las primeras ideas del Cálculo, con Newton y Leibniz, y la comunidad científica del siglo XVIII se encontró de pronto en sus manos una nueva y poderosa herramienta que le estaba permitiendo resolver muchos de los problemas que no había podido resolver anteriormente. Así, el matemático suizo Leonardo Euler, quien es la figura más importante de la Matemática del siglo XVIII, se dedicó a hacer con el Cálculo, lo que la palabra de esta parte de la matemática sugiere: calcular. Cientos de resultados nuevos aparecieron a la luz de la ciencia, obtenidos con la herramienta que el Cálculo proporcionaba. En todos estos re-

sultados se ve el uso intenso de "la diferencial" de una función, entendida ésta como "una variación infinitamente pequeña de la función".

En la última sección estudiaremos algunos aspectos relevantes sobre la fórmula de Taylor, así como la aplicación de ésta en el cálculo de límites que producen formas indeterminadas $\frac{0}{0}$. En el último ejercicio de esta sección, se presenta un problema muy interesante, que, en los últimos años ha hecho historia en prácticamente todos los niveles de los medios matemáticos (desde los más nóveles, como los formados por los lectores de este libro, hasta los más profesionales, formados por matemáticos de gran prestigio internacional), y que puede ser resuelto con las ideas desarrolladas sobre la fórmula de Taylor estudiadas en este capítulo.

11.1 INCREMENTO DE UNA FUNCIÓN

En esta primera sección trataremos con el sencillo problema de calcular cuánto cambia el valor de una función cuando su variable x cambia de un valor a otro (dados).

Para introducirnos en el tema, tomemos un ejemplo concreto: la función $f(x) = x^2$. Esta función podría representar la variación que tienen los costos de un producto y en términos de la demanda x del producto, o bien, cuál es el espacio recorrido y por un cuerpo en movimiento en términos del tiempo x empleado en recorrerlo, etcétera. El hecho es que, para esta función, la x cambia de $x_1 = 1$ a $x_2 = 3$. Es decir, comenzando en el valor $x_1 = 1$ de x, ésta tiene un incremento de $h = 2$, pasando así al valor $x_2 = x_1 + h = 1 + 2 = 3$. Queremos ver qué variación experimentó la función $f(x) = x^2$ (más precisamente, qué cambio tuvieron las imágenes de la función) ante esta variación que tuvo x. Ésta es una pregunta fácil de contestar: basta que veamos cuánto valía esta función en $x_1 = 1$, cuánto valía en $x_2 = 3$ y ver cuánto resultó ser la diferencia. En concreto, tenemos que $f(x_1) = f(1) = (1)^2 = 1$, $f(x_2) = f(3) = (3)^2 = 9$, de modo que podemos decir que la variación que sufrió la función $f(x) = x^2$, ante la variación de x de 1 a 3, es de $f(x_2) - f(x_1) = 9 - 1 = 8$. Usando esta misma función como ejemplo, veamos ahora cuál es el cambio que tiene la función cuando la x cambia de $x_1 = 4$ a $x_2 = 6$. Observe que el incremento que tiene la x en este caso es, al igual que en los cálculos anteriores, igual a dos: la diferencia es que ahora la x arranca del punto $x_1 = 4$, y en el primer caso arrancaba de $x_1 = 1$. Los cálculos en este caso son similares a los anteriores: el incremento que tiene la función $f(x) = x^2$ ante este nuevo cambio de la x es $f(x_2) - f(x_1) = (6)^2 - (4)^2 = 36 - 16 = 20$. Una primera conclusión que podemos obtener de este sencillo ejemplo preliminar, es que el cambio que tiene una función (el cambio en las imágenes de la función $y = f(x)$) cuando su variable x tiene un cierto incremento h no depende, en general, solamente del valor de este último, sino también del valor inicial de la x.

Consideremos un ejemplo más. Tomemos la función $f(x) = 2x^2 + 3$, y calculemos la variación que tiene ésta cuando la x tiene un incremento de $h = 3$ comenzando en $x_1 = 0$. El valor final de la x es entonces $x_2 = x_1 + h = 3$, y la variación que tiene la función en este caso es $f(x_2) - f(x_1) = (2(3)^2 + 3) - (2(0)^2 + 3) = 21 - 3 = 18$. Tomando el mismo

valor del incremento de la x, pero ahora comenzando en el punto $x_1 = 2$, los cálculos de la variación de la función se verían como:

$$f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + h) - f(x_1) = f(2+3) - f(2) = f(5) - f(2) = 53 - 11 = 42.$$

Nuevamente observamos que la variación que tiene la función depende no solamente del incremento de la x, sino también del punto inicial que estemos considerando.

Hagamos ahora el planteamiento general. Tomemos una función $y = f(x)$, un punto inicial de su dominio, que llamaremos también x (esta x es la x_1 en los ejemplos anteriores), y un incremento del valor de x, que denotaremos por h. Queremos obtener la variación que tienen los valores de la función dada cuando su variable x pasa del valor x al valor $x + h$. Procediendo como en los ejemplos iniciales, debemos calcular la diferencia de los valores de la función en el punto final $x + h$ y en el punto inicial x. Así, podemos decir en general que la variación que tienen los valores de la función es $f(x+h) - f(x)$. Denotaremos por $\triangle y$ o $\triangle f(x)$ a este incremento de la función. Este sencillo resultado, el primero de este capítulo, lo queremos dejar resaltado.

Sea $y = f(x)$ una función dada. El incremento $\triangle f(x)$ que tiene la función cuando la x tiene un incremento de h es $\triangle f(x) = f(x+h) - f(x)$.

Desde el punto de vista geométrico (con la gráfica de la función), los conceptos involucrados en el recuadro anterior se ven en la figura 11.1.1.

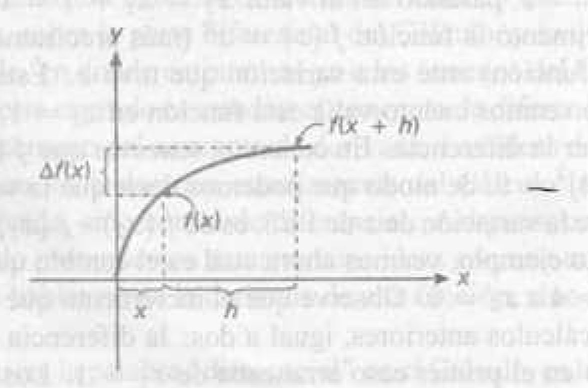


Figura 11.1.1. El incremento $\triangle f(x)$ y el incremento h.

Lo que nos enseñaron los cálculos de los ejemplos iniciales, es que el valor de $\triangle f(x)$ no depende solamente de h, sino también de x. En otras palabras, el valor $\triangle f(x)$ queda bien determinado conociendo la función (la función $y = f(x)$ por supuesto), el valor del incremento h y el valor de x.

En los siguientes ejemplos, dejaremos resaltados algunos hechos adicionales sobre el comportamiento del incremento $\triangle f(x)$ que nos servirán para comprender la relación que existe entre este sencillo concepto, y el concepto de diferencial de una función que introduciremos en la próxima sección.

EJEMPLO 11.1.1. Considere la función $f(x) = 3x + 5$. Calcule $\triangle f(x)$ para $x = 3$ y $h = 4$, y para $x = 5$ y $h = 4$.

SOLUCIÓN. Se tiene que para $x = 3$ y $h = 4$,

$$\triangle f(x) = f(x+h) - f(x) = f(3+4) - f(3) = f(7) - f(3) = 26 - 14 = 12,$$

mientras que para $x = 5$ y $h = 4$, se tiene

$$\triangle f(x) = f(x+h) - f(x) = f(5+4) - f(5) = 32 - 20 = 12.$$

★

El ejemplo anterior nos puede despertar la siguiente sospecha: ¿será que para la función $f(x) = 3x + 5$ el valor de $\triangle f(x)$ no depende del valor de x? Esto es efectivamente cierto y es válido para cualquier función lineal $f(x) = mx + b$. En efecto, para tal función tenemos

$$\begin{aligned}\triangle f(x) &= f(x+h) - f(x) = [m(x+h) + b] - [m(x) + b] \\ &= mx + mh + b - mx - b = mh,\end{aligned}$$

valor que no depende de x, sino sólo de h. Así pues, podemos decir que el incremento que tiene una función lineal $f(x) = mx + b$ cuando la x tiene un incremento de h es de $\triangle f(x) = mh$. En el ejemplo 11.1.1, tenemos que $m = 3$, $h = 4$, y así $\triangle f(x) = (3)(4) = 12$. Geométricamente podemos entender esta situación, si recordamos que la pendiente de la recta $y = mx + b$ es la tangente de su ángulo de inclinación, de modo que (atendiendo a la figura 11.1.2) se tiene $m = \tan\theta = \frac{\triangle f(x)}{h}$ de donde $\triangle f(x) = mh$, como habiamos ya obtenido.

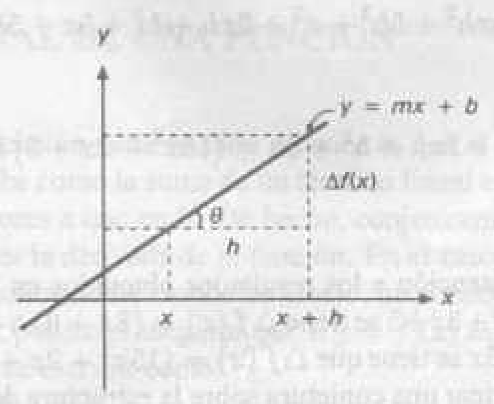


Figura 11.1.2. El incremento $\triangle f(x)$ para una función lineal.

EJEMPLO 11.1.2. Considere la función $f(x) = -2x + 9$. Calcule $\triangle f(x)$ para $h = 3$.

SOLUCIÓN. Según la discusión previa a este ejemplo, se trata de una función lineal con $m = -2$ y $h = 3$. Así pues, $\triangle f(x) = mh = (-2)(3) = -6$. Observe que en este caso obtenemos un incremento negativo para la función. Esta situación la interpretamos en términos del decrecimiento de la función: la recta $y = -2x + 9$ tiene pendiente negativa, y es, por tanto, una función decreciente, de modo que mientras x aumenta, los valores de la función disminuyen. El resultado que obtuvimos es que en esta función lineal, cuando

la x tiene un incremento (positivo, que llamaremos simplemente "incremento") de tres, la función tiene un incremento negativo (que llamaremos "decremento") de seis.

⋆

EJEMPLO 11.1.3. Calcule $\triangle f(x)$ para la función $f(x) = 4x^2 + 3x + 5$, para una x y una h cualquiera.

SOLUCIÓN. Se tiene

$$\triangle f(x) = f(x+h) - f(x) = \left[4(x+h)^2 + 3(x+h) + 5\right] - \left[4x^2 + 3x + 5\right]$$

$$= \left[4x^2 + 8xh + 4h^2 + 3x + 3h + 5\right] - \left[4x^2 + 3x + 5\right]$$

$$= 8xh + 4h^2 + 3h = (8x+3)h + 4h^2.$$

Vemos que este resultado depende efectivamente de x y de h, de tal modo que, por ejemplo, si $x = -1$ y $h = 2$, se tendría $\triangle f(x) = [8(-1) + 3](2) + 4(2)^2 = 6$.

⋆

EJEMPLO 11.1.4. Calcule $\triangle f(x)$ para la función $f(x) = 5x^3 + x^2 + 5x$, para una x y una h cualquiera.

SOLUCIÓN. Se tiene:

$$\triangle f(x) = f(x+h) - f(x) = \left[5(x+h)^3 + (x+h)^2 + 5(x+h)\right] - \left[5x^3 + x^2 + 5x\right]$$

$$= \left[5x^3 + 15x^2h + 15xh^2 + 5h^3 + x^2 + 2xh + h^2 + 5x + 5h\right] - \left[5x^3 + x^2 + 5x\right]$$

$$= 15x^2h + 15xh^2 + 5h^3 + 2xh + h^2 + 5h = \left(15x^2 + 2x + 5\right)h + (15x+1)h^2 + 5h^3.$$

⋆

Quisiéramos llamar la atención a los resultados obtenidos en los dos últimos ejemplos. Para la función $f(x) = 4x^2+3x+5$ se tiene $\triangle f(x) = (8x+3)h+4x^2$, mientras que para la función $f(x) = 5x^3+x^2+5x$ se tiene que $\triangle f(x) = (15x^2+2x+5)h+(15x+1)h^2+5h^3$.

Con la intención de plantear una conjetura sobre la estructura de los resultados obtenidos, tratemos de contestar la pregunta: ¿qué hay en el cuadro señalado en la siguiente fórmula?

$$\triangle f(x) = \boxed{?}\ h + \text{otros términos con potencias de } h \text{ mayores que uno}$$

No resulta muy difícil identificar ese factor que multiplica a h en las fórmulas obtenidas en los dos últimos ejemplos: tal factor es ni más ni menos que la derivada de la función. Y ese término es justamente el objeto de estudio del presente capítulo. Se llama diferencial de la función.

EJERCICIOS (11.1)

En los ejercicios 1 al 10, calcule el incremento que tiene la función $f(x)$ dada, cuando su variable x pasa de x_0 a x_1.

1. $f(x) = 4, x_0 = a, x_1 = a + h.$

2. $f(x) = x^3, x_0 = 0, x_1 = 2.$

3. $f(x) = x^3, x_0 = 2, x_1 = 4.$

4. $f(x) = \ln x, x_0 = 1, x_1 = e.$

5. $f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = 1, x_1 = 5.$

6. $f(x) = e^{-x}, x_0 = 0, x_1 = 1.$

7. $f(x) = x^2 + 3x + 2, x_0 = 1, x_1 = 1 + h.$

8. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, x_0 = 0, x_1 = h.$

9. $f(x) = \operatorname{sen} x, x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{4}.$

10. $f(x) = \cos x, x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{4}.$

11.2 LA DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN

La idea principal en la discusión de la sección anterior es que el incremento $\triangle f(x)$ de una función $y = f(x)$ se escribe como la suma de un término lineal en h más otros términos que involucran potencias mayores a uno en h. De hecho, conjeturamos que el factor que multiplica a h en tal expresión es la derivada de la función. En el caso de funciones polinomiales es fácil ver que esto es efectivamente cierto. En efecto, inspirados por los dos últimos ejemplos de la sección anterior, podemos asegurar que si $y = f(x)$ es una función polinomial, el incremento $\triangle f(x)$ se puede escribir como:

$$\triangle f(x) = Ah + Bh^2 + Ch^3 + \ldots$$

Dividiendo esta expresión por h, y tomando límite cuando $h \to 0$ obtenemos:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\triangle f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(A + Bh + Ch^2 + \ldots\right).$$

El límite que aparece a la izquierda de esta expresión lo identificamos como (la definición de) la derivada de la función $y = f(x)$. Por otra parte, el límite del lado derecho de tal expresión es claramente igual a A, de donde obtenemos que $A = f'(x)$ como habíamos dicho.

Así pues, tenemos que el incremento $\triangle f(x)$ de una función polinomial $y = f(x)$ se escribe como

$$\triangle f(x) = f'(x)\,h + \text{otros términos},$$

en donde "*otros términos*" significa (al menos en las funciones polinomiales) la presencia de sumandos con potencias mayores que uno en h.

Veamos qué sucede en el caso general. Consideremos una función diferenciable $y = f(x)$. Esto significa que el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existe (y es justamente la derivada de la función). Tenemos pues que:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

expresión que podemos escribir como:

$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right) = 0,$$

o bien como:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)\,h}{h} = 0.$$

Denotemos al numerador de la expresión en el límite anterior como $r(h)$. Llamaremos a este numerador "el residuo en la expresión del incremento $\triangle f(x)$". En él señalamos explícitamente su dependencia con h. Tenemos pues que

$$r(h) = f(x+h) - f(x) - f'(x)\,h,$$

o bien:

$$\triangle f(x) = f(x+h) - f(x) = f'(x)\,h + r(h),$$

en donde vemos nuevamente la estructura del incremento $\triangle f(x)$ escrito como la suma del término lineal en h más, en este caso, el residuo $r(h)$ (el cual era, en las funciones polinomiales, una suma de términos con potencias de h mayores que uno). Además, el residuo $r(h)$ es tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

(expresión que es, de hecho, la definición de derivada de la función).

La moraleja de toda esta discusión inicial es que el incremento $\triangle f(x)$ de una función diferenciable $y = f(x)$ se escribe como la suma de un término lineal en h, más un residuo $r(h)$ que tiene la propiedad de que al dividirse entre h, tiende a cero cuando h tiende a cero.

Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 11.2.1. Verifique la propiedad del residuo $r(h)$ que aparece en la expresión del incremento $\triangle f(x)$ para la función $f(x) = x^3$.

SOLUCIÓN. Según la discusión previa al ejemplo, tal residuo debe ser $r(h) = \triangle f(x) - f'(x)h$, en donde

$$\triangle f(x) = f(x+h) - f(x) = (x+h)^3 - x^3 = 3x^2h + 3xh^2 + h^3$$

y

$$f'(x)h = 3x^2h.$$

Entonces:

$$r(h) = \triangle f(x) - f'(x)h = 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 3x^2h = 3xh^2 + h^3$$

(observe que este residuo es lo que habíamos llamado "otros términos" en la expresión de $\triangle f(x)$: en él están incluidos los términos con potencias mayores que uno en h). Finalmente tenemos que

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3xh^2+h^3}{h} = \lim_{h\to 0}(3xh+h^2) = 0,$$

como debía ocurrir.

★

EJEMPLO 11.2.2. Verifique la propiedad del residuo $r(h)$ que aparece en la expresión del incremento $\triangle f(x)$ para la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$.

SOLUCIÓN. Obtengamos el incremento $\triangle f(x)$. Se tiene

$$\triangle f(x) = f(x+h) - f(x) = \operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x = (\operatorname{sen} x\cos h + \cos x\operatorname{sen} h) - \operatorname{sen} x$$

Por otra parte, tenemos:

$$f'(x)h = (\cos x)h.$$

Entonces el residuo es:

$$\begin{aligned} r(h) &= \operatorname{sen} x\cos h + \cos x\operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x - h\cos x \\ &= (\operatorname{sen} x)(\cos h - 1) + (\cos x)(\operatorname{sen} h - h) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(\operatorname{sen} x)(\cos h-1)+(\cos x)(\operatorname{sen} h-h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left[(\operatorname{sen} x)\frac{\cos h-1}{h} + (\cos x)\left[\frac{\operatorname{sen} h}{h}-1\right]\right] \end{aligned}$$

$$= (\operatorname{sen} x) \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + (\cos x) \lim_{h\to 0} \left[\frac{\operatorname{sen} h}{h} - 1\right].$$

Usando que $\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$, podemos ver que los dos límites que aparecen en la expresión anterior son iguales a cero, pues

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)} = \lim_{h\to 0} \frac{-\operatorname{sen}^2 h}{h(\cos h + 1)}$$

$$= -\left(\lim_{h\to 0} \operatorname{sen} h\right)\left(\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)\left(\lim_{h\to 0} \frac{1}{\cos h + 1}\right) = -(0)(1)\left(\frac{1}{2}\right) = 0,$$

y

$$\lim_{h\to 0} \left[\frac{\operatorname{sen} h}{h} - 1\right] = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} - 1 = 1 - 1 = 0,$$

obteniendo finalmente que $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$ como queríamos comprobar.

★

EJEMPLO 11.2.3. Calcule el residuo $r(h)$ para la función $f(x) = \frac{4}{x+2}$ y verifique que, si $x = 2$, tal residuo tiene la propiedad de que $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$.

SOLUCIÓN. Se tiene:

$$r(h) = f(x+h) - f(x) - df(x) = \frac{4}{x+h+2} - \frac{4}{x+2} - \left(-\frac{4}{(x+2)^2}\right)h$$

$$= \frac{4(x+2) - 4(x+h+2)}{(x+2)(x+h+2)} + \frac{4h}{(x+2)^2} = \frac{-4h}{(x+2)(x+h+2)} + \frac{4h}{(x+2)^2}$$

$$= 4\left[\frac{-1}{(x+2)(x+h+2)} + \frac{1}{(x+2)^2}\right]h.$$

Ésta es la expresión del residuo procurada. Poniendo ahora $x = 2$ obtenemos

$$r(h) = 4\left[\frac{-1}{(2+2)(2+h+2)} + \frac{1}{(2+2)^2}\right]h$$

$$= 4\left[-\frac{1}{4(4+h)} + \frac{1}{16}\right]h = \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4+h}\right]h,$$

de modo que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4+h}\right]h}{h} = \lim_{h\to 0} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4+h}\right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0.$$

★

En toda la discusión anterior hemos siempre resaltado el término lineal h que aparece en la expresión del incremento $\triangle f(x)$. De hecho, hemos visto que este incremento es ese misterioso término lineal que tanto hemos enfatizado, más algo que llamamos "residuo", como dejando en él "todo lo que sobra". Acontece que ese término lineal en h es justamente el objeto de estudio de esta sección.

Sea $y = f(x)$ una función diferenciable. El término lineal en h que aparece en la expresión del incremento $\triangle f(x)$ de la función, se llama diferencial *de la función $y = f(x)$, y se denota por dy o $df(x)$. Es decir, se tiene:*

$$df(x) = f'(x)h$$

Así pues, la diferencial de una función (en un punto de su dominio) no es más que el producto de su derivada por el incremento de su variable x. Con objeto de ganar uniformidad en estas ideas, introducimos la siguiente definición.

Al incremento h de la variable x en una función $y = f(x)$ se le denota por dx y se le llama diferencial de x.

Así, la diferencial de una función $y = f(x)$ se escribe como $df(x) = f'(x)\,dx$. Debemos advertir que la definición de la diferencial de x dada anteriormente es un tanto arbitraria, y se introduce sólo para ganar uniformidad en el estudio de las diferenciales de funciones. Debemos verla no precisamente como la diferencial de una cierta función (en el sentido que se definió antes para una función $y = f(x)$), sino como un objeto (una variable) que puede tomar algún valor real (el valor que tomaba el incremento de x en los ejemplos de la sección anterior). Quizás convenga pensar en la diferencial de una función $y = f(x)$ como "algo" que depende de (es el producto de) la derivada de la función y de la diferencial de su variable x. Sin embargo, observe que a pesar de todas las advertencias anteriores, si consideramos la función identidad $f(x) = x$, vemos que su diferencial es $df(x) = d(x) = (1)\,dx = dx$ (puesto que $f'(x) = (x)' = 1$), teniendo con esto una cierta homogeneidad dentro de la aparente arbitrariedad de la definición de la diferencial de la variable x.

Una de las maravillas que trae consigo el concepto de diferencial de una función $y = f(x)$ y el de diferencial de x que acabamos de ver, es que, usando la notación de Leibniz para la derivada de la función, según la cual la derivada $f'(x)$ se escribe como $\frac{dy}{dx}$, el concepto de diferencial de la función $y = f(x)$ se ve como

$$dy = \frac{dy}{dx}dx,$$

(ésta es la fórmula $df(x) = f'(x)\,dx$ que define a la diferencial de la función $y = f(x)$, escrita con una notación diferente). No podemos negar la belleza de la simplicidad de la expresión anterior: parecería una fórmula ingenua en la que en el lado derecho hay una cancelación de $dx's$, obteniendo una igualdad trivial de $dy's$. Por otra parte, esta fórmula descubre que la notación de Leibniz para la derivada $\frac{dy}{dx}$ (la cual habíamos insistido en el curso de Cálculo Diferencial que era simplemente una notación para la derivada) es, de hecho, más

que una notación: es un verdadero cociente de dos diferenciales, a saber, la derivada de la función $y = f(x)$ es el cociente de la diferencial de la función entre la diferencial de su variable x.

¿Sobre qué tipo de funciones se aplica el concepto de diferencial? Observe que todo lo que necesitamos para obtener la diferencial de una función es su derivada, la cual quedará (en la diferencial) multiplicada por dx. Así, son las funciones diferenciables (las que tienen derivadas) las que podremos "diferenciar".

(NOTA: la sutileza de la diferencia entre "derivar" una función y "diferenciar" la función, es simplemente... ¡una multiplicación por dx!)

Es claro entonces que todas la reglas que conocemos de derivación de funciones, tendrán su traducción casi literal, al proceso de diferenciación de las mismas. De cualquier manera, puesto que en este curso trabajaremos con diferenciales y no con derivadas, establecemos explícitamente estas reglas.

1. La diferencial de una constante es igual a cero:

$$d(c) = 0.$$

En efecto, $d(c) = (c)'\,dx = (0)\,dx = 0$.

2. La diferencial de una suma de funciones es la suma de las diferenciales de las funciones:

$$d(f(x) + g(x)) = df(x) + dg(x).$$

En efecto, puesto que la derivada de una suma de funciones es la suma de las derivadas de las funciones, tenemos:

$$d(f(x) + g(x)) = (f(x) + g(x))'\,dx = (f'(x) + g'(x))\,dx$$

$$= f'(x)\,dx + g'(x)\,dx = df(x) + dg(x).$$

3. La diferencial de la función $f(x) = x^n$ es

$$d(x^n) = nx^{n-1}\,dx.$$

Esto es una consecuencia directa de la fórmula de la derivada de la función $f(x) = x^n$.

4. La diferencial de un producto de dos funciones es la primera función por la diferencial de la segunda más la segunda función por la diferencial de la primera:

$$d(f(x)\,g(x)) = f(x)\,dg(x) + g(x)\,df(x).$$

En efecto, usando la regla de la derivada de un producto de funciones nos queda

$$d(f(x)\,g(x)) = (f(x)\,g(x))'\,dx = (f(x)\,g'(x) + g(x)\,f'(x))\,dx$$

$$= f(x)\,(g'(x)\,dx) + g(x)\,(f'(x))\,dx = f(x)\,dg(x) + g(x)\,df(x).$$

5. La diferencial de un cociente de dos funciones es igual a un cociente, cuyo numerador es la función del denominador multiplicada por la diferencial de la función del numerador, menos la función del numerador multiplicada por la diferencial de la función del denominador, y el denominador es la función del denominador elevada al cuadrado:
$$d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)\,df(x)-f(x)\,dg(x)}{g^2(x)}.$$
En efecto, usando la regla de la derivada de un cociente de funciones nos queda
$$d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'dx=\frac{g(x)\,f'(x)-f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}dx$$
$$=\frac{g(x)\,(f'(x)\,dx)-f(x)\,(g'(x)\,dx)}{g^2(x)}=\frac{g(x)\,df(x)-f(x)\,dg(x)}{g^2(x)}.$$

Valen las fórmulas de diferenciación de las funciones trascendentes que manejamos en el curso de Cálculo Diferencial:

1. $d(\operatorname{sen} x)=\cos x dx$	10. $d(\ln x)=\frac{1}{x}dx$
2. $d(\cos x)=-\operatorname{sen} x dx$	11. $d(e^x)=e^x dx$
3. $d(\tan x)=\sec^2 x dx$	12. $d(\operatorname{senh} x)=\cosh x dx$
4. $d(\cot x)=-\csc^2 x dx$	13. $d(\cosh x)=\operatorname{senh} x dx$
5. $d(\sec x)=\sec x\tan x dx$	14. $d(\tanh x)=\operatorname{sech}^2 x dx$
6. $d(\csc x)=-\csc x\cot x dx$	15. $d(\coth x)=-\operatorname{csch}^2 x dx$
7. $d(\operatorname{arcsen} x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$	16. $d(\operatorname{sech} x)=-\operatorname{sech} x\tanh x dx$
8. $d(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$	17. $d(\operatorname{csch} x)=-\operatorname{csch} x\coth x dx$
9. $d(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}dx$	

Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 11.2.4. Obtenga la diferencial de la función $f(x)=3x\tan x$.
SOLUCIÓN. Procediendo directamente de la definición de diferencial tenemos que
$$df(x)=f'(x)\,dx=(3x\tan x)'\,dx=\left(3x\sec^2 x+3\tan x\right)dx,$$

o bien, usando la regla (número 4) de la diferencial de un producto, nos queda:

$$\begin{aligned} df(x) &= d(3x\tan x) = 3xd(\tan x) + \tan x d(3x) = 3x\sec^2 x dx + \tan x(3dx) \\ &= (3x\sec^2 x + 3\tan x)\,dx. \end{aligned}$$

★

EJEMPLO 11.2.5. Obtenga la diferencial de la función $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2}$.

SOLUCIÓN. Procediendo directamente de la definición de diferencial nos queda

$$df(x) = \left(\frac{x+1}{x^2+2}\right) dx = \left(\frac{(x^2+2)(1) - (x+1)(2x)}{(x^2+2)^2}\right) dx = \frac{2-2x-x^2}{(x^2+2)^2}dx.$$

O bien, con la regla número 5 anterior sobre la diferencial de un cociente de funciones, obtenemos:

$$df(x) = d\left(\frac{x+1}{x^2+2}\right) = \frac{(x^2+2)\,d(x+1) - (x+1)\,d(x^2+2)}{(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{(x^2+2)\,dx - (x+1)\,2xdx}{(x^2+2)^2} = \frac{2-2x-x^2}{(x^2+2)^2}dx.$$

★

EJEMPLO 11.2.6. Suponga que $f(x)$ es una función diferenciable y positiva (es decir, $f(x) > 0$ para toda x del dominio de f). Obtenga la diferencial de la función $F(x) = \ln f(x)$ en términos de la diferencial de la función f.

SOLUCIÓN. Se tiene:

$$dF(x) = F'(x)\,dx = \left(\frac{1}{f(x)}f'(x)\right)dx = \frac{1}{f(x)}\left(f'(x)\,dx\right) = \frac{1}{f(x)}df(x) = \frac{df(x)}{f(x)}.$$

★

En el caso de diferenciales de una composición de funciones, se tiene un resultado especialmente interesante, que discutimos a continuación. Consideremos una función $y = f(u)$ en donde la variable u es a su vez función de x, $u = g(x)$ (ambas funciones diferenciables). Tenemos, por una parte, que la diferencial de la función f (vista ésta como función de u) es

$$dy = df(u) = f'(u)\,du,$$

en donde, como advertimos en la sección anterior, el símbolo du, es… ¡simplemente un símbolo! (que aunque se lee "diferencial de u", en realidad representa al incremento $\triangle u$ de la variable de la función f).

Por otra parte, la diferencial de la función $u = g(x)$ es:

$$du = dg(x) = g'(x)\,dx.$$

Podríamos pensar (de la manera más ingenua) en una sustitución de la expresión du anterior en la expresión de dy inicial, obteniendo así la diferencial dy de la función y en términos de x. Obtendríamos entonces:

$$dy = f'(u)\,du = f'(u)\,g'(x)\,dx.$$

Veamos que esta "ingenuidad" es válida (la ingenuidad proviene de mezclar la palabra "diferencial" en sus dos versiones que vimos en la sección anterior: por una parte es un símbolo en la expresión de $df(u)$, y por otra parte es la diferencial de la función $u = g(x)$). Es, de hecho, este tipo de ingenuidades (junto con aquellas mencionadas en la sección anterior sobre la notación de Leibniz para la derivada de una función), que surgen de un manejo puramente formal de conceptos no triviales, parte de la riqueza operativa de las diferenciales que son de considerable ayuda en algunos de los métodos del cálculo integral que estudiaremos en este curso.

Consideremos la función compuesta, $F(x) = f(g(x))$. Su diferencial es, según la definición, la derivada $F'(x)$ multiplicada por dx. Pero la derivada $F'(x)$ es, según la regla para la derivación de funciones compuestas (la regla de la cadena), igual a $f'(g(x))\,g'(x) = f'(u)\,g'(x)$, de modo que la diferencial de la función compuesta quedaría como:

$$dF(x) = F'(x)\,dx = f'(u)\,g'(x)\,dx,$$

como habíamos obtenido antes.

Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 11.2.7. Considere las funciones $y = 2u^3$ y $u = x^2 + 4x + 2$. Obtenga la diferencial dy en términos de x y de dx.

SOLUCIÓN. La diferencial de la función y vista ésta en términos de u, es $dy = 6u^2du$. Por otra parte, la diferencial de la función u en términos de x, es $du = (2x + 4)\,dx$. Entonces, sustituyendo esta última expresión en la primera, se obtiene que

$$dy = 6u^2du = 6u^2(2x + 4)dx = 6(x^2 + 4x + 2)^2\,(2x + 4)\,dx.$$

Se hubiera podido proceder primeramente a establecer la función compuesta

$$y = 2\left(x^2 + 4x + 2\right)^3$$

y obtener directamente de ella su diferencial (calculando la derivada correspondiente con la regla de la cadena).

⋆

EJEMPLO 11.2.8. Considere las funciones $y = u^2 + 4$, $u = \frac{1}{w+1}$ y $w = \operatorname{sen}^2 x$. Obtenga la diferencial dy en términos de x y de dx.

SOLUCIÓN. Obtengamos las diferenciales de cada una de estas funciones. Tenemos

$$dy = 2udu,\ du = -\frac{1}{(w+1)^2}dw,\ \ dw = 2\operatorname{sen} x \cos x dx.$$

Sustituyendo "en reversa" obtenemos que

$$dy = 2udu = 2u\left(-\frac{1}{(w+1)^2}dw\right) = 2u\left(-\frac{1}{(w+1)^2}(2\operatorname{sen} x\cos x dx)\right)$$

$$= -\frac{4u\operatorname{sen} x\cos x}{(w+1)^2}dx,$$

en donde, si queremos dejar el resultado expresado en términos de x, ponemos $u = \frac{1}{w+1}$ y $w = \operatorname{sen}^2 x$.

★

EJERCICIOS (11.2)

En los ejercicios 1 al 10, determine la expresión del residuo $r(h)$ de la función $f(x)$ dada en el punto x_0 indicado. Verifique en cada caso la propiedad $\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h} = 0$.

1. $f(x) = x^2 + 3x + 2$, $x_0 = 1$. **2.** $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 1$.

3. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x_0 = 1$. **4.** $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$. **5.** $f(x) = x^3 + 2$, $x_0 = 2$.

6. $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $x_0 = 0$. **7.** $f(x) = \tan x$, $x_0 = 0$. **8.** $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

9. $f(x) = x\operatorname{sen} x$, $x_0 = 0$. **10.** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x_0 = 0$.

En los ejercicios 11 al 25, calcule la diferencial de la función dada.

11. $f(x) = \frac{x-1}{x}$. **12.** $f(x) = x^3 + 2x + 3$. **13.** $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-3x+2}$.

14. $f(x) = (x+1)(x^4 + x^2 + 3)$. **15.** $f(x) = x\sqrt{x+1}$.

16. $f(x) = -3\operatorname{sen} x + 2\cos x$. **17.** $f(x) = \operatorname{sen} x(1 + x\sec x)$.

18. $f(x) = x^2e^x$. **19.** $f(x) = (3x+2)e^{-4x}$. **20.** $f(x) = x^3\ln x$.

21. $f(x) = \frac{4}{x^2+x+1}$. **22.** $f(x) = x^2\arctan x$. **23.** $f(x) = e^x\operatorname{sen} x$.

24. $f(x) = (3x+8)\ln(2x^2+3)$. **25.** $f(x) = \ln(\ln x)$.

En los ejercicios 26 al 35, suponga que $f(x)$ es una función diferenciable definida en todo $\mathbb{R}$. *Obtenga la diferencial de la función $F(x)$ dada en términos de la diferencial de $f(x)$.*

26. $F(x) = f^2(x)$. **27.** $F(x) = f(f(x))$. **28.** $F(x) = xe^{f(x)}$.

29. $F(x) = f^2(f^3(x))$. **30.** $F(x) = \ln(1 + f^2(x))$. **31.** $F(x) = \operatorname{sen}(3f(x))$.

32. $F(x) = \sqrt{1 + f^4(x)}$. **33.** $F(x) = \arctan f^2(x)$. **34.** $F(x) = \cos\left(\dfrac{1}{1 + f^2(x)}\right)$.

35. $F(x) = \operatorname{senh}^2 f^3(x)$.

11.3 APLICACIONES DE LAS DIFERENCIALES

Retomemos la discusión de la sección 11.2, en donde presentamos la definición de diferencial de una función. La idea principal que ahí se expuso, de la que surgió la definición de diferencial, fue la expresión del incremento $\triangle f(x) = f(x + h) - f(x)$ de una función diferenciable $y = f(x)$.

Teníamos que este incremento se puede escribir como:

$$\triangle f(x) = f'(x)\,h + r(h),$$

o bien, en términos de la diferencial de la función, $df(x) = f'(x)\,h$, esta expresión se ve como:

$$\triangle f(x) = df(x) + r(h),$$

en donde el residuo $r(h)$ tiene la propiedad de que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

En esta sección vamos primeramente a interpretar geométricamente estas relaciones, y luego presentaremos algunas aplicaciones de este concepto.

Consideremos entonces una función diferenciable $y = f(x)$ y un punto $P = (x, f(x))$ cualquiera de su gráfica. Sea T la recta tangente a la gráfica de la función en P. Consideremos los puntos $A = (x, 0)$, $B = (x + h, 0)$ (sobre el eje x). Sea C el punto de la recta T correspondiente a la abscisa $x + h$ y sea D el punto de la gráfica de la función $y = f(x)$ correspondiente a esta abscisa. Consideremos también el punto $E = (x + h, f(x))$.

Es claro que el punto D tiene por coordenadas $D = (x + h, f(x + h))$. Veamos cuáles son las coordenadas del punto C. La ecuación de T es, como sabemos

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x)$$

(en donde estamos poniendo mayúsculas a las variables involucradas en la ecuación). Para $X = x + h$ obtenemos la correspondiente Y de la recta tangente despejándola de esta última ecuación

$$Y - f(x) = f'(x)(x + h - x) \Rightarrow Y = f(x) + f'(x)h,$$

de modo entonces que el punto C tiene por coordenadas $C = (x + h, f(x) + f'(x)h)$. Con esta información, es inmediato ver que la distancia que hay del punto E al punto C es

$$\overline{EC} = f'(x)h,$$

mientras que del punto C al punto D hay una distancia de

$$\overline{CD} = f(x + h) - f(x) - f'(x)h.$$

Estas dos distancias están plenamente identificadas: $\overline{EC} = f'(x)h$ es justamente la diferencial de la función y $\overline{CD} = f(x + h) - f(x) - f'(x)h$ es el residuo $r(h)$ que teníamos definido previamente.

Así pues, el claro hecho de que $\overline{ED} = \overline{EC} + \overline{CD}$ (y puesto que $\overline{ED} = f(x + h) - f(x)$), no es más que la expresión que tenemos del incremento de la función

$$\Delta f(x) = df(x) + r(h)$$

en donde $\overline{ED} = \Delta f(x)$, $\overline{EC} = df(x)$, $\overline{CD} = r(h)$.

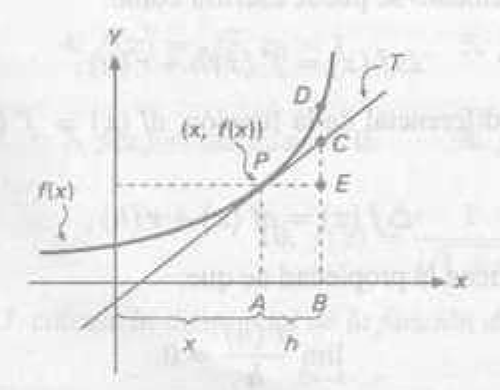


Figura 11.3.1. Interpretación geométrica de la diferencial.

En la figura 11.3.1 es claro que a medida que h es más pequeño, la distancia $\overline{CD} = r(h)$ es también más pequeña. En términos de límites, la afirmación anterior es que el límite de $\overline{CD} = r(h)$ cuando h tiende a cero, es cero. Llamamos la atención al hecho de que el residuo $\overline{CD} = r(h)$ tiene, en realidad, una propiedad más fuerte que esta observación que vemos de la figura 11.3.1. No solamente es cierto que $\overline{CD} = r(h)$ tiende a cero cuando h tiende a cero: sabemos que el cociente de $\overline{CD} = r(h)$ dividido entre h tiende a cero cuando h tiende a cero. Ésta es la propiedad del residuo que habíamos establecido en la sección 11.2

que $\overline{CD} = r(h)$ y tenemos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0,$$

lo cual indica que cuando $h \to 0$, el residuo $\overline{CD} = r(h)$ tiende también a cero pero de una manera *mucho más rápida* que como lo hace h.

En resumen, podemos decir que si h es "pequeño" (lo cual provoca entonces que $\overline{CD} = r(h)$ sea todavía "mucho más pequeño"), entonces $\overline{ED} = f(x+h) - f(x)$ y $\overline{EC} = f'(x)h$ deben ser muy parecidos. Esto lo decimos como: si h es muy pequeño, entonces

$$\triangle f(x) \approx df(x).$$

Es ésta la relación que proporciona la idea de "magnitud muy pequeña" a la diferencial de una función. Vamos a sacarle provecho a esta última conclusión para realizar algunos cálculos aproximados. La idea general que subyace en estas aplicaciones es la siguiente: supongamos que tenemos una función $y = f(x)$ diferenciable en un punto x_0 de su dominio, y que conocemos el valor $f(x_0)$. Queremos calcular el valor $f(x_0 + h_0)$ en donde h_0 es pequeño. De la expresión $\triangle f(x_0) \approx df(x_0)$ podemos despejar $f(x_0 + h_0)$ para obtener

$$f(x_0 + h_0) \approx f(x_0) + df(x_0).$$

Los términos del lado derecho de esta expresión suelen calcularse sin dificultad. De esta manera, obtenemos un valor aproximado de $f(x_0 + h_0)$.

Veamos funcionar las ideas anteriores en algunos ejemplos concretos.

EJEMPLO 11.3.1. Se quiere calcular aproximadamente (usando diferenciales) el valor de $\sqrt{9.1}$.

SOLUCIÓN. Consideremos la función $f(x) = \sqrt{x}$ en el punto $x_0 = 9$. Sea $h_0 = 0.1$. Observe entonces que queremos calcular aproximadamente el valor $f(x_0 + h_0) = f(9.1) = \sqrt{9.1}$. Se tiene que $f(x_0) = f(9) = 3$. La diferencial de la función es $df(x) = f'(x)h = \frac{1}{2\sqrt{9}}(0.1) = \frac{1}{60}$. Entonces, usando $f(x_0 + h_0) \approx f(x_0) + df(x_0)$, obtenemos:

$$\sqrt{9.1} \approx 3 + \frac{1}{60} = \frac{181}{60} = 3.01667$$

(redondeando a la quinta cifra decimal). El valor exacto de la raíz $\sqrt{9.1}$ es 3.01662 (con cinco cifras decimales exactas).

*

EJEMPLO 11.3.2. Se quiere calcular aproximadamente (usando diferenciales) el valor de $\sqrt[3]{63}$.

SOLUCIÓN. Consideremos la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en $x_0 = 64$ con un $h_0 = -1$. Se quiere calcular aproximadamente el valor de $f(x_0 + h_0) = f(63) = \sqrt[3]{63}$. Se tiene que $f(x_0) = f(64) = \sqrt[3]{64} = 4$. La diferencial de la función es

$$df(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}dx = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}},$$

que con $x_0 = 64$ y $dx_0 = h_0 = -1$ queda

$$df(x_0) = \frac{-1}{3\sqrt[3]{64^2}} = -\frac{1}{48}.$$

Entonces

$$\sqrt[3]{63} = f(x_0 + h_0) \approx f(x_0) + df(x_0) = 4 - \frac{1}{48} = \frac{191}{48} = 3.97917$$

(redondeado a la quinta cifra decimal). El valor exacto de $\sqrt[3]{63}$ es (hasta la quinta cifra decimal exacta) 3.97906.

★

EJEMPLO 11.3.3. Calcule aproximadamente (usando diferenciales) $\sqrt[4]{82}$, y compare con el valor exacto.

SOLUCIÓN. Tomamos la función $f(x) = \sqrt[4]{x}$ con $x_0 = 81$ y $h = 1$. Entonces:

$$\sqrt[4]{82} = f(81+1) = f(x_0 + h) \approx f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + \frac{1}{4}(x_0)^{-\frac{3}{4}} h$$

$$= \sqrt[4]{81} + \frac{1}{4}(81)^{-\frac{3}{4}}(1) = 3 + \frac{1}{4}\left[\left(81^{\frac{1}{4}}\right)\right]^{-3}$$

$$= 3 + \frac{1}{4}(3)^{-3} = 3 + \frac{1}{(4)(27)} = \frac{325}{108} \approx 3.0092593.$$

El valor con seis cifras decimales exactas es 3.009216.

★

EJEMPLO 11.3.4. Considere un pieza metálica en forma de cuadrado de lado $a = 4$ m. Cuando esta pieza se expone a los rayos solares, sus lados aumentan 2 cm. Calcule aproximadamente (usando diferenciales) en cuánto aumenta el área del cuadrado.

SOLUCIÓN. El área A del cuadrado es $A = a^2$. Consideramos entonces la función $f(a) = a^2$ que nos da el área del cuadrado en términos del valor de su lado a. Se quiere saber en cuánto se incrementa el valor de esta función cuando su variable a tiene un incremento de $\triangle a = 0.02$ m, comenzando en el valor $a = 4$ m. Se tiene entonces:

$$\triangle f(a) = f(a + \triangle a) - f(a) \approx df(a) = f'(a) \triangle a = 2a \triangle a = 2(4)(0.02) = 0.16.$$

Es decir, cuando el lado del cuadrado aumenta 2 cm, el área de él aumenta aproximadamente 0.16 metros cuadrados.

★

EJEMPLO 11.3.5. Cuando un globo en forma esférica de radio $r = 30$ cm se expone a los rayos solares, el radio del globo aumenta a razón de 0.1 cm cada hora. Use diferenciales para calcular aproximadamente en cuánto ha aumentado el volumen del globo después de 3 horas de estar expuesto a la radiación solar.

SOLUCIÓN. Consideramos la función $f(r) = \frac{4}{3}(\pi)(r)^3$ que nos da el valor del volumen del globo en términos de su radio r. Se quiere saber qué incremento tiene esta función cuando el radio sufre un incremento de $\triangle r = (0.1 \text{ cm/h})(3 \text{ h}) = 0.3$ cm comenzando con el valor $r = 30$ cm. Se tiene:

$$\triangle f(r) = f(r + \triangle r) - f(r) \approx df(r) = f'(r) \triangle a = \frac{4}{3}(\pi)(3r^2) \triangle r$$

$$= \frac{4}{3}(\pi)\left(3(30)^2\right)(0.3) \approx 3392.928.$$

Es decir, el globo aumenta su volumen en aproximadamente 3393 centímetros cúbicos después de 3 horas de estar expuesto a los rayos solares.

⋆

EJEMPLO 11.3.6. Considere el globo del ejemplo anterior (con un radio inicial de 30 cm). Se sabe que después de un determinado tiempo, el volumen del globo aumentó 1800 centímetros cúbicos. Calcule aproximadamente (usando diferenciales) el tiempo que duró el globo expuesto a la radiación solar.

SOLUCIÓN. El volumen inicial del globo es de $V_0 = \frac{4}{3}(\pi)(30)^3$ centímetros cúbicos (no hay necesidad de que calculemos explícitamente este valor, como veremos más adelante). La función que nos da el radio del globo en términos de su volumen, la obtenemos despejando de la fórmula del volumen de una esfera, la incógnita r, quedándonos: $r = g(V) = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$. Queremos determinar cuál es el incremento $\triangle r$ que tiene esta función cuando el volumen V se incrementa en $\triangle V_0 = 1800$, comenzando en un valor de V_0. Usando diferenciales para hacer de manera aproximada este cálculo, nos queda:

$$\triangle r = g(V_0 + \triangle V_0) - g(V_0) \approx g'(V_0) \triangle V = \frac{1}{3}\left(\frac{3V_0}{4\pi}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{3}{4\pi}\right) \triangle V_0$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{3\left(\frac{4}{3}(\pi)(30)^3\right)}{4\pi}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{3}{4\pi}\right) \triangle V_0 = \frac{1}{3}(30)^{-2}\left(\frac{3}{4\pi}\right) \triangle V_0$$

$$= \frac{1800}{3600\pi} = \frac{1}{2\pi} \approx 0.15915.$$

Es decir, el radio del globo se incrementó aproximadamente en 0.15915 cm. Como tal radio se expande a una velocidad de 0.1 centímetros cada hora, concluimos que el globo estuvo expuesto a los rayos solares aproximadamente durante $\frac{0.15915 \text{ cm}}{0.1 \text{ cm/h}} = 1.5915$ h.

⋆

EJERCICIOS (11.3)

En los ejercicios 1 al 10, use diferenciales para calcular aproximadamente el valor de la expresión dada.

1. $\sqrt{9.14}$. **2.** $\ln 1.1$. **3.** $e^{0.012}$.

4. $\sqrt[3]{27.13}$. **5.** $\arctan 1.08$. **6.** $(1.02)^3$.

7. $\sqrt{\dfrac{5+(0.11)}{5-(0.11)}}$. **8.** $\sqrt{2+\sqrt[3]{7.89}}$. **9.** $\arctan e^{0.08}$.

10. $\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{\pi}{4}+(0.04)\right)$.

11. Un círculo, cuyo radio inicial era de 10 cm, aumentó su área en 1.4 cm^2. Use diferenciales para calcular aproximadamente el incremento que tuvo el radio del círculo.

12. Un cuadrado, cuyo lado inicial era de 15 cm, disminuyó su área en 2.65 cm^2. Use diferenciales para calcular aproximadamente cuánto disminuyó el radio del círculo.

13. Un cubo aumentó su lado, pasando de 13 cm a 13.1 cm. Use diferenciales para cálcular aproximadamente el aumento que tuvo el volumen del cubo.

14. Un cono circular recto, cuyo radio de la base es de 5 cm, aumentó su altura pasando de 7 cm a 7.1 cm. Use diferenciales para calcular aproximadamente el aumento en el volumen del cono.

15. El volumen de un cilindro circular recto, de radio de la base igual a 10 cm, aumentó en 15.7 cm^3. Use diferenciales para calcular aproximadamente el aumento que tuvo la altura del cilindro.

16. Considere la función $f(x) = x^2$ y un punto P de abscisa x de su gráfica, como se muestra en la figura 11.3.2.

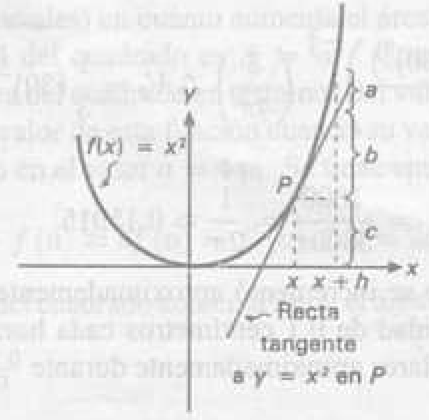


Figura 11.3.2. La función $f(x) = x^2$.

Consideremos ahora un cuadrado de longitud x. El área de este cuadrado es función de x y está dada por: área del cuadrado $= f(x) = x^2$. Supongamos que el lado del cuadrado se incrementa en h. Esta situación se puede ver geométricamente como:

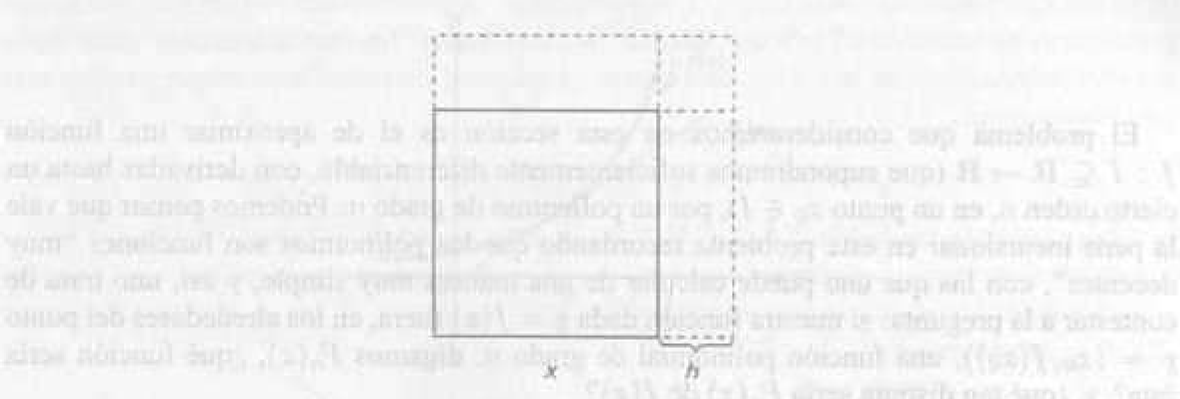


Figura 11.3.3. Un cuadrado cuyo lado x se incrementa en h.

Esta figura la podemos pensar como compuesta de cuatro partes:

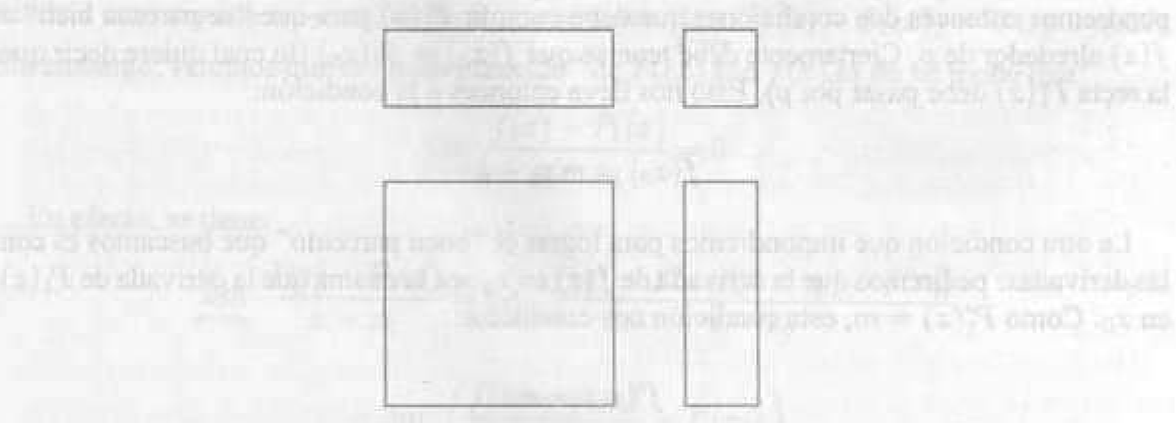


Figura 11.3.4. Partes del cuadrado con el lado incrementado.

Identifique cada una de las longitudes de los segmentos marcados en la figura 11.3.2, como algún área (o suma de áreas) de las figura 11.3.4. Por ejemplo, la longitud c es (la ordenada del punto P) el área del cuadrado.

a) ¿A qué corresponde la longitud a?

b) ¿A qué corresponde la longitud b?

c) ¿A qué corresponde la longitud c?

11.4 LA FÓRMULA DE TAYLOR

El problema que consideraremos en esta sección es el de aproximar una función $f : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (que supondremos suficientemente diferenciable, con derivadas hasta un cierto orden n, en un punto $x_0 \in I$), por un polinomio de grado n. Podemos pensar que vale la pena incursionar en este problema recordando que los polinomios son funciones "muy decentes", con las que uno puede calcular de una manera muy simple, y así, uno trata de contestar a la pregunta: si nuestra función dada $y = f(x)$ fuera, en los alrededores del punto $p = (x_0, f(x_0))$, una función polinomial de grado n, digamos $P_n(x)$, ¿qué función sería ésta?, y, ¿qué tan distinta sería $P_n(x)$ de $f(x)$?

Comencemos por pensar en que nuestra función $y = f(x)$ la queremos ver como un polinomio de primer grado $P_1(x) = mx + b$ en los alrededores de p. En este caso solamente necesitaremos que $f(x)$ es una función diferenciable en x_0. Es decir, tratamos de ver a la gráfica de la función $y = f(x)$ como una recta alrededor del punto p de abscisa x_0. La recta $P_1(x)$ queda completamente determinada conociendo los dos parámetros m y b. Impondremos entonces dos condiciones que debe cumplir $P_1(x)$ para que "se parezca bien" a $f(x)$ alrededor de p. Ciertamente debe tenerse que $f(x_0) = P_1(x_0)$ (lo cual quiere decir que la recta $P_1(x)$ debe pasar por p). Esto nos lleva entonces a la condición:

$$f(x_0) = mx_0 + b.$$

La otra condición que impondremos para lograr el "buen parecido" que buscamos es con las derivadas: pediremos que la derivada de $f(x)$ en x_0 sea la misma que la derivada de $P_1(x)$ en x_0. Como $P_1'(x) = m$, esta condición nos conduce a:

$$f'(x_0) = m.$$

Así, el valor de m debe ser el de la derivada de $f(x)$ en x_0. De la primera condición obtenemos b:

$$f(x_0) = mx_0 + b \Rightarrow f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b \Rightarrow b = f(x_0) - f'(x_0)x_0.$$

Entonces, el polinomio $P_1(x)$ que tiene un buen parecido con $f(x)$ en los alrededores de p, en el sentido de que: a) pasa por p, b) tiene la misma derivada que $f(x)$ en p, es:

$$P_1(x) = mx + b = f'(x_0) + f(x_0) - f'(x_0)x_0$$

o sea:

$$P_1(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Observe que $P_1(x)$ es ni más ni menos que la recta tangente $y = f(x)$ en x_0. Ésta es la recta que mejor se parece a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa x_0.

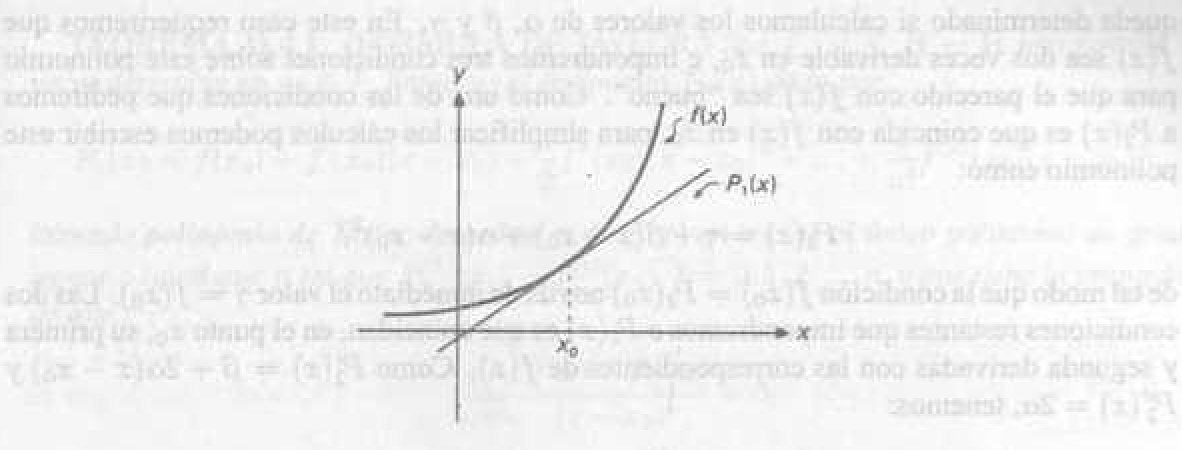


Figura 11.4.1. El polinomio de primer grado $P_1(x)$ que mejor aproxima a la gráfica de $y = f(x)$ en x_0 es su recta tangente.

Para contestar a la pregunta sobre qué tan bueno es el parecido de $f(x)$ con $P_1(x)$, consideramos la diferencia $f(x) - P_1(x)$ en los alrededores de P. Debe ser claro que esta diferencia tiende a cero cuando $x \to x_0$, es decir que se tiene: $\lim_{x \to x_0} (f(x) - P_1(x)) = 0$ (¿por qué?) Sin embargo, veremos que el "buen parecido" de $P_1(x)$ con $f(x)$ es de tal modo que:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_1(x)}{x - x_0} = 0.$$

En efecto, se tiene:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_1(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right).$$

Observe que el límite $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe, pues estamos suponiendo que $f(x)$ es derivable en x_0:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{x - x_0 = h}{=\!=\!\longrightarrow} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Entonces:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_1(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = 0,$$

como afirmábamos que ocurriría. Este hecho nos indica que la diferencia entre $f(x)$ y $P_1(x)$ no solamente es pequeña en los alrededores de x_0, sino que es mucho más pequeña que la diferencia $x - x_0$, en el sentido de que el cociente $\frac{f(x)-P_1(x)}{x-x_0}$ tiende a cero cuando x tiende a x_0.

Con este mismo espíritu, abordamos ahora el problema de aproximar a $f(x)$ con un polinomio de segundo grado $P_2(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ en los alrededores de x_0. Este polinomio

queda determinado si calculamos los valores de α, β y γ. En este caso requeriremos que $f(x)$ sea dos veces derivable en x_0, e impondremos tres condiciones sobre este polinomio para que el parecido con $f(x)$ sea "bueno". Como una de las condiciones que pediremos a $P_2(x)$ es que coincida con $f(x)$ en x_0, para simplificar los cálculos podemos escribir este polinomio como:

$$P_2(x) = \gamma + \beta(x - x_0) + \alpha(x - x_0)^2,$$

de tal modo que la condición $f(x_0) = P_2(x_0)$ nos da de inmediato el valor $\gamma = f(x_0)$. Las dos condiciones restantes que impondremos a $P_2(x)$ es que coincidan, en el punto x_0, su primera y segunda derivadas con las correspondientes de $f(x)$. Como $P_2'(x) = \beta + 2\alpha(x - x_0)$ y $P_2''(x) = 2\alpha$, tenemos:

$$f'(x_0) = P_2'(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = \beta$$

y

$$f''(x_0) = P_2''(x_0) \Rightarrow f''(x_0) = 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}f''(x_0).$$

Así, el polinomio $P_2(x)$ que mejor se parece a $f(x)$ en los alrededores de x_0, en el sentido de que: a) pasa por $p = (x_0, f(x_0))$, b) tiene la misma derivada que $f(x)$ en x_0, c) tiene la misma segunda derivada que $f(x)$ en x_0, es:

$$P_2(x) = \gamma + \beta(x - x_0) + \alpha(x - x_0)^2 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2.$$

Se puede demostrar que la "buena aproximación" que da $P_2(x)$ con $f(x)$ en los alrededores de x_0 es tal que:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_2(x)}{(x - x_0)^2} = 0.$$

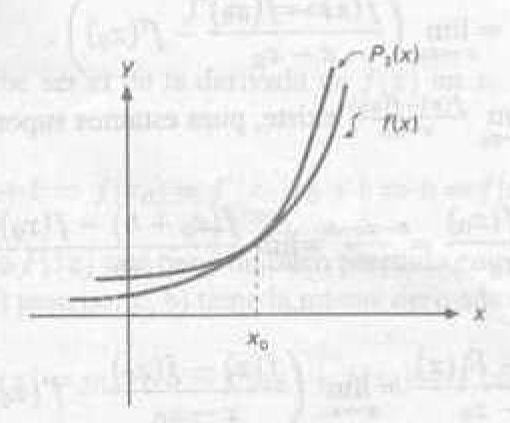


Figura 11.4.2. El polinomio de segundo grado $P_2(x)$ que mejor aproxima a la gráfica de $y = f(x)$ en x_0.

En general, se tiene el siguiente resultado, cuya demostración puede consultarse en libros más avanzados de cálculo.

TEOREMA 11.4.1. (FÓRMULA DE TAYLOR.) *Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función n veces derivable en $x_0 \in I$. Entonces el polinomio $P_n(x)$ dado por:*

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n,$$

llamado ***polinomio de Taylor de orden** n **de** $f(x)$ **en** x_0, es el único polinomio de grado menor o igual que n tal que $P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, y que tiene la propiedad de que:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Llamando $r(x - x_0)$ a la diferencia $f(x) - P_n(x)$, podemos escribir entonces:

$$f(x) = P_n(x) + r((x - x_0)^n)$$

y así, vemos que la función $f(x)$ es, en los alrededores de x_0, igual a su polinomio de Taylor $P_n(x)$, más un residuo $r((x - x_0)^n)$ que tiene la propiedad de que $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{r((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n} = 0$. La fórmula anterior, en donde se expresa a la función $f(x)$ como la suma de su polinomio de Taylor más un residuo con la propiedad mencionada, es llamada **fórmula de Taylor de** $f(x)$ **en** x_0. El polinomio de Taylor $P_n(x)$ es entonces el polinomio que mejor aproxima a $f(x)$ en los alrededores de x_0, en el sentido del límite indicado anteriormente (¡el residuo es verdaderamente pequeño!).

En particular, el polinomio de Taylor $P_n(x)$ de $f(x)$ en $x_0 = 0$ toma la forma:

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n,$$

el cual tiene la propiedad de que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - P_n(x)}{x^n} = 0.$$

Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 11.4.1. Determine el polinomio de Taylor de orden n de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el origen de coordenadas.

SOLUCIÓN. La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ y sus derivadas en $x = 0$ son:

$$\begin{array}{ll}
f(x) = \operatorname{sen} x & f(0) = \operatorname{sen} 0 = 0 \\
f'(x) = \cos x & f'(0) = \cos 0 = 1 \\
f''(x) = -\operatorname{sen} x & f''(0) = -\operatorname{sen} 0 = 0 \\
f'''(x) = -\cos x & f'''(0) = -\cos 0 = -1 \\
f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x & f^{(4)}(0) = \operatorname{sen} 0 = 0 \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

En general, observe que $f^{(2k)}(0) = 0$, y $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$, $k = 0, 1, 2, ..., n$. Entonces, el polinomio de Taylor de orden $n = 2k - 1$ de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $x_0 = 0$ es:

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$$

$$= x - \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{(-1)^{2k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1}.$$

En la siguiente figura se muestran los polinomios $P_3(x) = x - \frac{1}{3!}x^3$ y $P_5(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5$. Se puede observar cómo cada uno de ellos aproxima a $f(x) = \operatorname{sen} x$ alrededor del origen de coordenadas

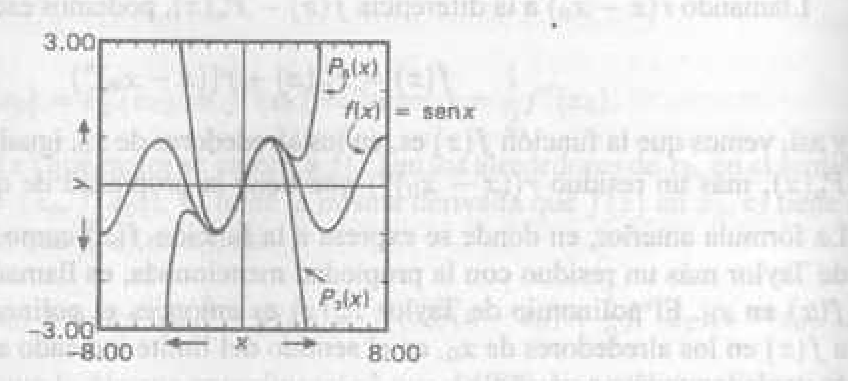


Figura 11.4.3. Los polinomios de Taylor $P_3(x)$ y $P_5(x)$ de $f(x) = \operatorname{sen} x$ alrededor del origen de coordenadas.

Observe que el polinomio de Taylor de $\operatorname{sen} x$ tiene solamente potencias impares, de modo que, por ejemplo, el polinomio $P_3(x)$ y el polinomio $P_4(x)$ es el mismo (hecho que es consecuencia de que todas las derivadas de orden par de $\operatorname{sen} x$ se anulan en $x_0 = 0$). Si quisiéramos escribir la fórmula de Taylor de $\operatorname{sen} x$ de orden 3, pondríamos, en principio:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{3!}x^3 + r(x^3)$$

indicando que el residuo $r(x^3)$ tiene la propiedad de que $\lim_{x\to 0} \frac{r(x^3)}{x^3} = 0$. Sin embargo, con base en la observación anterior, podríamos escribir algo más fuerte:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{3!}x^3 + r(x^4),$$

aprovechando que el polinomio $x - \frac{1}{3!}x^3$ es en realidad el polinomio de Taylor de orden 4. Con la expresión anterior estamos afirmando que la diferencia $\operatorname{sen} x - (x - \frac{1}{3!}x^3)$ es tal que dividida entre x^4, tiende a cero cuando x tiende a cero. En general, la fórmula de Taylor de $\operatorname{sen} x$ alrededor del origen se puede escribir como:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots + \frac{(-1)^{2k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1} + r(x^{2k}).$$

★

EJEMPLO 11.4.2. Determine el polinomio de Taylor de orden 3 de $f(x) = \sqrt{1+x}$ alrededor de $x_0 = 0$.

SOLUCIÓN. La función $f(x)$ y sus derivadas hasta tercer orden en $x = 0$ son:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^{\frac{1}{2}} & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= \tfrac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} & f'(0) &= \tfrac{1}{2} \\ f''(x) &= -\tfrac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}} & f''(0) &= -\tfrac{1}{4} \\ f'''(x) &= \tfrac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}} & f'''(0) &= \tfrac{3}{8} \end{aligned}.$$

Entonces el polinomio de Taylor requerido es:

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}x^2\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{3}{8}x^3\right) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3.$$

Podemos así escribir que para x cercanas a $x_0 = 0$, se tiene la fórmula:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + r(x^3),$$

en donde el residuo $r(x^3)$ tiene la propiedad de que $\lim_{x\to 0} \frac{r(x^3)}{x^3} = 0$.

★

En la fórmula obtenida en el ejemplo anterior, pongamos, por ejemplo, $x = 0.2$. Despreciando el valor del residuo, podemos escribir la fórmula aproximada:

$$\sqrt{1.2} = \sqrt{1+0.2} \approx 1 + \frac{1}{2}(0.2) - \frac{1}{8}(0.2)^2 + \frac{1}{16}(0.2)^3 = 1.0955.$$

El valor de $\sqrt{1.2}$ con 6 cifras significativas es 1.095445.

¿Cuál es el polinomio de Taylor de orden n a una función polinomial de grado n, digamos $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$? Retomando la discusión previa al teorema, nos preguntaríamos por el polinomio de grado n, $P_n(x)$, que mejor aproxima a $f(x)$ en los alrededores de algún punto x_0. No se necesita ser demasiado perspicaz para dar con la respuesta correcta: si $f(x)$ ya es un polinomio de grado n, el polinomio $P_n(x)$ debe ser el mismo polinomio $f(x)$. Aunque el determinar el polinomio de Taylor de una función polinomial parezca entonces un cálculo bastante ocioso, éste puede ser de mucha utilidad cuando se quiere expresar un polinomio (una función polinomial $f(x)$) en potencias de $(x - a)$ para algún $a \in \mathrm{R}$ dado.

EJEMPLO 11.4.3. Exprese el polinomio $x^4 + 2x^3 + x + 2$ en potencias de $x + 2$.

SOLUCIÓN. Consideramos la función polinomial $f(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2$, y hallamos su polinomio de Taylor $P_4(x)$ alrededor de $x_0 = -2$. La función $f(x)$ y sus derivadas hasta cuarto orden en x_0 son:

$$\begin{array}{rl} f(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2 & f(-2) = 0 \\ f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 1 & f'(-2) = -7 \\ f''(x) = 12x^2 + 12x & f''(-2) = 24 \\ f'''(x) = 24x + 12 & f'''(0) = -36 \\ f^{(4)}(x) = 24 & f^{(4)}(-2) = 24 \end{array}$$

Entonces, el polinomio de Taylor $P_4(x)$ alrededor de $x_0 = -2$ es:

$$P_4(x)$$

$$= f(-2) + f'(-2)(x+2) + \frac{1}{2}f''(-2)(x-2)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(-2)(x+2)^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(-2)(x+2)^4$$

$$= 0 - 7(x+2) + \frac{1}{2}(24)(x+2)^2 + \frac{1}{3!}(-36)(x+2)^3 + \frac{1}{4!}(24)(x+2)^4$$

$$= -7(x+2) + 12(x+2)^2 - 6(x+2)^3 + (x+2)^4.$$

Así, tenemos la igualdad:

$$x^4 + 2x^3 + x + 2 = (x+2)^4 - 6(x+2)^3 + 12(x+2)^2 - 7(x+2),$$

que expresa al polinomio del lado izquierdo como un polinomio en potencias de $x + 2$. ★

A continuación escribimos las fórmulas de Taylor de algunas funciones "famosas" (alrededor de $x_0 = 0$). La primera de ellas es la de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ que obtuvimos en el ejemplo 11.4.1. Las demás, el lector las puede obtener como ejercicio.

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots + \frac{(-1)^{2k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1} + r(x^{2k}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + r(x^{2k+1}),$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + r(x^n),$$

$$\operatorname{senh} x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots + \frac{1}{(2k-1)!}x^{2k-1} + r(x^{2k-1}),$$

$$\cosh x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{1}{(2k)!}x^{2k} + r(x^{2k+1}).$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + r(x^n).$$

Las igualdades $=$ en las expresiones anteriores pueden convertirse en aproximaciones $\approx$ si hacemos caso omiso del residuo $r(x)$. Tal aproximación será tanto mejor conforme x se encuentre cerca de $x_0 = 0$.

En los ejercicios 26, 27 y 28 al final de la sección, se justifica el porqué, para obtener el polinomio de Taylor de alguna operación dada entre dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, se puede hacer tal operación entre los polinomios de Taylor de estas funciones (con ciertas restricciones en el caso de la composición).

EJEMPLO 11.4.4. Determine el polinomio de Taylor de orden 5 de $f(x) = \operatorname{sen} 2x - \cos 3x$ alrededor de $x_0 = 0$.

SOLUCIÓN. Hasta potencias no mayores a 5, las fórmulas de Taylor de $\operatorname{sen} 2x$ y $\cos 3x$ las obtenemos de las correspondientes de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ sustituyendo en éstas a x por $2x$ y $3x$ respectivamente. Así, obtenemos:

$$\operatorname{sen} 2x = 2x - \frac{1}{3!}(2x)^3 + \frac{1}{5!}(2x)^5 + r(x^6) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + r(x^6).$$

$$\cos 3x = 1 - \frac{1}{2}(3x)^2 + \frac{1}{4!}(3x)^4 + r(x^5) = 1 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{8}x^4 + r(x^5).$$

Entonces, el polinomio de Taylor de orden 5 de $f(x) = \operatorname{sen} 2x - \cos 3x$ alrededor de $x_0 = 0$ se obtiene restando (los polinomios de Taylor correspondientes de) las dos expresiones anteriores:

$$P_5(x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 - \left(1 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{8}x^4\right)$$

$$= -1 + 2x + \frac{9}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{27}{8}x^4 + \frac{4}{15}x^5.$$

★

EJEMPLO 11.4.5. Determine el polinomio de Taylor de orden 4 de $f(x) = \cos(\operatorname{sen} 2x)$ alrededor de $x_0 = 0$.

SOLUCIÓN. Procediendo directamente, calculamos la función $f(x)$ y sus derivadas hasta orden 4 en $x = 0$. Presentamos los resultados de los cálculos de las derivadas ya simplificados.

$$f(x) = \cos(\operatorname{sen} 2x) \qquad f(0) = 1$$
$$f'(x) = -2\cos 2x \operatorname{sen}(\operatorname{sen} 2x) \qquad f'(0) = 0$$
$$f''(x) = -4\cos^2 2x \cos(\operatorname{sen} 2x) + 4 \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen}(\operatorname{sen} 2x) \qquad f''(0) = -4$$
$$f'''(x) = 24 \operatorname{sen} 2x \cos 2x \cos(\operatorname{sen} 2x) + \\ + \operatorname{sen}(\operatorname{sen} 2x)(8\cos^3 2x + 8\cos 2x) \qquad f'''(0) = 0$$
$$f^{(4)}(x) = \cos(\operatorname{sen} 2x)(16\cos^4 2x + 112\cos^2 2x - 48) - \\ - \operatorname{sen}(\operatorname{sen} 2x)(96 \operatorname{sen} 2x \cos^2 2x + 16 \operatorname{sen} 2x) \qquad f^{(4)}(0) = 80$$

Entonces el polinomio de Taylor de orden 4 de $f(x) = \cos(\operatorname{sen} 2x)$ es:

$$P_4(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(0)x^4$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(-4)x^2 + \frac{1}{24}(80)x^4 = 1 - 2x^2 + \frac{10}{3}x^4.$$

Una alternativa a este procedimiento directo, es sustituir formalmente el polinomio de Taylor de $\operatorname{sen} 2x$ alrededor de $x_0 = 0$ (que denotaremos por $P_{\operatorname{sen} 2x}(x)$), el cual es (de orden 4):

$$P_{\operatorname{sen} 2x}(x) = 2x - \frac{1}{3!}(2x)^3 + r(x^4) = 2x - \frac{4}{3}x^3,$$

en el correspondiente polinomio de Taylor de $\cos x$, $P_{\cos x}(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4$, obteniendo:

$$P_{\cos x}\left(P_{\operatorname{sen} 2x}(x)\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(2x - \frac{4}{3}x^3\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(2x - \frac{4}{3}x^3\right)^4.$$

De la expresión anterior solamente nos importarán los términos hasta de orden 4. Observe que del segundo binomio solamente el término $(2x)^4$ tiene tal característica. Entonces:

$$P_{\cos x}\left(P_{\operatorname{sen} 2x}(x)\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(4x^2 - \frac{16}{3}x^4 + *\right) + \frac{1}{24}(2x)^4 + * + * + * + *,$$

en donde hemos puesto * en los términos que rebasan el grado 4. Nos queda entonces que el polinomio de Taylor de $\cos(\operatorname{sen} 2x)$ de orden 4 es:

$$P_4(x) = 1 - 2x^2 + \frac{10}{3}x^4,$$

como habíamos obtenido anteriormente.

⋆

EJEMPLO 11.4.6. Determine el polinomio de Taylor de orden 3 de $f(x) = e^{\operatorname{senh} x}$ alrededor de $x_0 = 0$.

SOLUCIÓN. Conocemos los polinomios de Taylor de orden 3 de e^x y de $\operatorname{senh} x$ (que denotaremos por $P_{e^x}(x)$ y $P_{\operatorname{senh} x}(x)$):

$$P_{e^x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

y

$$P_{\operatorname{senh} x}(x) = x + \frac{1}{6}x^3.$$

Para obtener el polinomio de Taylor requerido en el ejemplo, podemos sustituir formalmente $P_{\operatorname{senh} x}(x)$ en $P_{e^x}(x)$ y considerar los términos hasta el orden 3:

$$P_{e^x}(P_{\operatorname{senh} x}(x)) = 1 + \left(x + \frac{1}{6}x^3\right) + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{6}x^3\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x + \frac{1}{6}x^3\right)^3$$

$$= \begin{array}{l}\text{términos hasta}\\ \text{tercer orden de}\end{array} \left[1 + \left(x + \frac{1}{6}x^3\right) + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{6}x^3\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x + \frac{1}{6}x^3\right)^3\right]$$

$$= 1 + \left(x + \frac{1}{6}x^3\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 + * + *\right) + \frac{1}{6}\left(x^3 + * + * + *\right)$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

(en donde hemos puesto, como en el ejercicio anterior, un asterisco para indicar la presencia de un término con potencia mayor que 3).

Veremos a continuación cómo se pueden usar los polinomios de Taylor de funciones para calcular algunos límites de un modo eficiente. Desde el capítulo 2 estudiamos algunos métodos para calcular límites que producían formas indeterminadas $\frac{0}{0}$. Luego, en el capítulo 7, estudiamos la regla de L'Hôpital que resultó ser una herramienta muy poderosa para obtener los valores de este tipo de límites. Sin embargo, en algunos casos la regla de L'Hôpital puede conducirnos también a realizar operaciones muy complicadas para calcular alguno de estos límites. Veamos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 11.4.7. Calcular el límite $\lim\limits_{x\to 0} \frac{6 \operatorname{sen} x - 6x + x^3}{6 \operatorname{senh} x - 6x - x^3}$ usando la regla de L'Hôpital.

SOLUCIÓN. La función $f(x) = \frac{6 \operatorname{sen} x - 6x + x^3}{6 \operatorname{senh} x - 6x - x^3}$ no existe en $x = 0$, pues $f(0) = \frac{0}{0}$. Aplicamos entonces la regla de L'Hôpital para obtener:

$$\lim_{x\to 0} \frac{6 \operatorname{sen} x - 6x + x^3}{6 \operatorname{senh} x - 6x - x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{6\cos x - 6 + 3x^2}{6\cosh x - 6 - 3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2 + x^2}{2\cosh x - 2 - x^2}.$$

Puesto que $\frac{2\cos(0)-2+(0)^2}{2\cosh(0)-2-(0)^2} = \frac{2-2}{2-2} = \frac{0}{0}$, debemos aplicar nuevamente la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2 + x^2}{2\cosh x - 2 - x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\operatorname{sen} x + 2x}{2\operatorname{senh} x - 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x + x}{\operatorname{senh} x - x}.$$

Vemos que $\frac{-\operatorname{sen} 0+0}{\operatorname{senh} 0-0} = \frac{0}{0}$. Una tercera aplicación de la regla de L'Hôpital nos lleva a:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x + x}{\operatorname{senh} x - x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x + 1}{\cosh x - 1}.$$

De nuevo, se tiene: $\frac{-\cos 0+1}{\cosh 0-1} = \frac{-1+1}{-1+1} = \frac{0}{0}$. Aplicamos de nuevo la regla de L'Hôpital para obtener:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\cos x + 1}{\cosh x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{senh} x}.$$

Todavía se tiene $\frac{\operatorname{sen} 0}{\operatorname{senh} 0} = \frac{0}{0}$. Aplicando de nuevo la regla de L'Hôpital, obtenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{senh} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\cosh x} = \frac{\cos 0}{\cosh 0} = \frac{1}{1} = 1.$$

*

El cálculo del límite del ejemplo anterior, en el que tuvimos que usar 5 veces la regla de L'Hôpital, puede hacerse más sencillo si usamos polinomios de Taylor. La idea es sustituir las funciones involucradas por sus polinomios de Taylor hasta un orden adecuado.

La idea para calcular límites de la forma

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

en donde $f(x_0) = g(x_0) = 0$, usando la fórmula de Taylor, es escribir estas fórmulas para las funciones del numerador y del denominador. Observe que en principio tales fórmulas no llevan término independiente (¿por qué?). Más aún, los casos de interés se presentan cuando las funciones $f(x)$ y $g(x)$ involucradas se anulan, junto con algunas de sus derivadas, en el punto x_0. Así, la fórmula de Taylor (en la que se muestra solamente el primer término no nulo del polinomio de Taylor correspondiente) de estas funciones se ve como:

$$f(x) = \alpha(x - x_0)^n + r((x - x_0)^n)$$

y

$$g(x) = \beta(x - x_0)^m + r((x - x_0)^m)$$

(en donde $\alpha = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$ y $\beta = \frac{1}{m!} g^{(m)}(x_0)$ son los primeros términos no nulos del polinomio de Taylor de $f(x)$ y $g(x)$, respectivamente, alrededor de x_0).

El resultado que explotaremos en el cálculo de los límites mencionados es:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x - x_0)^n + r((x - x_0)^n)}{\beta(x - x_0)^m + r((x - x_0)^m)} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n > m \\ \frac{\alpha}{\beta} & \text{si} \quad n = m \\ \infty & \text{si} \quad n < m. \end{cases}$$

La demostración de este hecho no es difícil y la dejamos como un ejercicio teórico para el lector interesado.

EJEMPLO 11.4.8. Calcular el límite del ejemplo 7, $\lim_{x\to 0} \frac{6\operatorname{sen} x - 6x + x^3}{6\operatorname{senh} x - 6x - x^3}$ usando la fórmula de Taylor.

SOLUCIÓN. Determinamos la fórmula de Taylor de las funciones del numerador y denominador. Procediendo como en el ejemplo 11.5.4. obtenemos (usando los polinomios de Taylor conocidos de $\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{senh} x$):

$$6\operatorname{sen} x - 6x + x^3 = 6\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) - 6x + x^3 + r(x^5) = \frac{1}{20}x^5 + r(x^5)$$

y

$$6\operatorname{senh} x - 6x - x^3 = 6\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) - 6x - x^3 + +r(x^5) = \frac{1}{20}x^5 + r(x^5).$$

Entonces:

$$\lim_{x\to 0} \frac{6\operatorname{sen} x - 6x + x^3}{6\operatorname{senh} x - 6x - x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{20}x^5 + r(x^5)}{\frac{1}{20}x^5 + r(x^5)} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{20}} = 1.$$

★

EJEMPLO 11.4.9. Calcular el límite, $\lim_{x\to 0} \frac{\cosh 2x + \cos 2x - 2}{x^4}$ usando la fórmula de Taylor.

SOLUCIÓN. Usando los polinomios de Taylor de $\cosh x$ y $\cos x$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\cosh 2x + \cos 2x - 2 \\
&= \left(1 + \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{4!}(2x)^4\right) + \left(1 - \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{4!}(2x)^4\right) - 2 + r(x^4) \\
&= \frac{2}{4!}(2x)^4 + r(x^4) = \frac{4}{3}x^4 + r(x^4).
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh 2x + \cos 2x - 2}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{4}{3}x^4 + r(x^4)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{4}{3} + \frac{r(x^4)}{x^4}\right) = \frac{4}{3}.$$

★

EJERCICIOS (11.4)

En los ejercicios 1 al 10, determine el polinomio de Taylor indicado de la función dada alrededor del origen.

1. $f(x) = xe^x$, $P_3(x) = ?$ **2.** $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$, $P_5(x) = ?$

3. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $P_3(x) = ?$ **4.** $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, $P_3(x) = ?$

5. $f(x) = \operatorname{sen}(4x) - \operatorname{senh}(4x)$, $P_5(x) = ?$ **6.** $f(x) = x \operatorname{sen} x - x^2 \cos x$, $P_4(x) = ?$

7. $f(x) = e^x - 1 - x$, $P_4(x) = ?$ **8.** $f(x) = \operatorname{sen} x \cos(2x)$, $P_3(x) = ?$

9. $f(x) = \operatorname{senh} x \operatorname{senh}(3x)$, $P_5(x) = ?$ **10.** $f(x) = e^x\sqrt{1+x^2}$, $P_5(x) = ?$

En los ejercicios 11 al 15, use la fórmula de Taylor para expresar los polinomios dados en potencias de $x - a$, según se indica.

11. $x^2 + 3x + 8$, en potencias de $x + 3$.

12. $3x^3 + 2x^2 - 6x + 7$, en potencias de $x + 1$.

13. $x^3 + 1$, en potencias de $x - 1$.

14. $x^4 - 2x^3 + 9x^2 - 7x - 1$, en potencias de $x - 3$.

15. $x^5 + x^3 + 1$, en potencias de $x + 2$.

En los ejercicios 16 al 25, use la fórmula de Taylor de las funciones involucradas para calcular los límites indicados (formas indeterminadas $\frac{0}{0}$).

16. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$. **17.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x - \operatorname{senh} 2x}{x^3}$. **18.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

19. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 - \frac{1}{2}x^2}{x^3}$. **20.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2 - x^2}{x^2}$. **21.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3} - e^{x^2}}{x^2}$.

22. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3 \operatorname{sen} x \cos x - 3x + 2x^3}{x^5}$. **23.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{xe^{2x} - 2x^3 - 2x^2 - x}{x^4}$.

24. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x \operatorname{sen} x - x - x^2}{x^3}$. **25.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - x^4 - e^{2x}\cos^2 x}{x^5}$.

26. Sean $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funciones dos veces derivables. Demuestre, haciendo los cálculos directos de las derivadas correspondientes, que el polinomio de Taylor de segundo orden de la composición $f + g$ alrededor de $x_0 = 0$ es:

$$P_2(x) = f(0) + g(0) + (f'(0) + g'(0))\,x + \frac{1}{2}\,(f''(0) + g''(0))\,x^2.$$

Considere ahora los polinomios de Taylor de segundo orden alrededor de $x_0 = 0$ de $f(x)$ y $g(x)$ por separado (que denotamos como $P_{2,f}$ y $P_{2,g}$, respectivamente):

$$P_{2,f}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$$

y

$$P_{2,g}(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{1}{2}g''(0)x^2.$$

Demuestre que el polinomio de Taylor de la composición $P_2(x)$ obtenido al inicio del ejercicio, se puede obtener también sumando formalmente $P_{2,g}$ con $P_{2,f}$. Es decir, demuestre que:

$$P_2(x) = P_{2,f}(x) + P_{2,g}(x).$$

Demuestre que este hecho es también cierto si se consideran polinomios de Taylor de orden n.

27. Sean $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funciones dos veces derivables. Demuestre, haciendo los cálculos directos de las derivadas correspondientes, que el polinomio de Taylor de segundo orden del producto fg alrededor de $x_0 = 0$ es:

$$P_2(x) = f(0)g(0) + (f(0)g'(0) + g(0)f'(0))\,x + \\ + \tfrac{1}{2}\,(f(0)g''(0) + 2f'(0)g'(0) + f''(0)g(0))\,x^2.$$

Considere ahora los polinomios de Taylor de segundo orden alrededor de $x_0 = 0$ de $f(x)$ y $g(x)$ por separado, $P_{2,f}(x)$ y $P_{2,g}(x)$, como en el ejercicio 26. Demuestre que el polinomio de Taylor del producto $P_2(x)$ obtenido al inicio del ejercicio, se puede obtener también multiplicando formalmente $P_{2,f}(x)$ con $P_{2,g}(x)$ y considerando solamente los términos hasta segundo orden. Es decir, demuestre que:

$$P_2(x) = \text{términos hasta segundo orden de } [P_{2,f}(x)P_{2,g}(x)].$$

28. Sean $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funciones dos veces derivables, con $g(0) = 0$. Demuestre, haciendo los cálculos directos de las derivadas correspondientes, que el polinomio de Taylor de segundo orden de la composición $f \circ g$ alrededor de $x_0 = 0$ es:

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)g'(0)x + \frac{1}{2}\left(f'(0)g'(0) + f''(0)\,(g'(0))^2\right)x^2.$$

Considere ahora los polinomios de Taylor de segundo orden alrededor de $x_0 = 0$ de $f(x)$ y $g(x)$ por separado, $P_{2,f}$ y $P_{2,g}$, como en el ejercicio 26. Demuestre que el polinomio de Taylor de la composición $P_2(x)$ obtenido al inicio del ejercicio, se puede obtener también sustituyendo formalmente $P_{2,g}$ en $P_{2,f}$ y considerando solamente los términos hasta segundo orden. Es decir, demuestre que:

$$P_2(x) = \text{términos hasta segundo orden de } [P_{2,f}(P_{2,g}(x))].$$

(Los resultados presentados en este ejercicio y en el anterior son válidos para polinomios de Taylor de orden n. Las demostraciones son esencialmente las mismas, pero exigen un manejo de expresiones un tanto complicadas. Éstas pueden ser un ejercicio de reto para el lector con espíritu muy matemático.)

29. Obtenga la fórmula de Taylor de orden 5 de la función $f(x) = \tan x$ alrededor del origen de coordenadas.

30. Usando el polinomio de Taylor de $\operatorname{sen} x$, demuestre que el polinomio de Taylor de orden 5 de la función $\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$ es $P_5(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5$.

31. Usando el polinomio de Taylor de e^x y $\operatorname{sen} x$, calcule $f^{(3)}(0)$ si $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$.

32. Usando el polinomio de Taylor de e^x y $\operatorname{sen} x$, demuestre que el polinomio de Taylor de $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$ de orden 5 alrededor del origen es $P_5(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{15}x^5$.

33. Usando el polinomio de Taylor de e^x y $\operatorname{sen} x$, demuestre que el polinomio de Taylor de $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$ de orden 5 alrededor del origen es $P_5(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{15}x^5$.

34. Ciertamente la gráfica del coseno hiperbólico es "muy parecida" a una parábola. Use la fórmula de Taylor de segundo orden alrededor del origen de coordenadas con la función $f(x) = c\cosh\frac{x}{c}$, para demostrar que para x pequeñas, se tiene:

$$c\cosh\frac{x}{c} \approx \frac{1}{2c}x^2 + c.$$

Ponga $c = 1$, y evalúe ambos miembros de la expresión anterior para $x = \pm 0.1, \pm 0.2$. Note el gran parecido que tiene la catenaria $y = \cosh x$ con la parábola $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$ cerca del origen. Evalúe luego tal expresión para $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3$, y note la diferencia.

35. (UN EJERCICIO CON CLASIFICACIÓN C: SÓLO PARA ADULTOS.) Seguramente el matemático ruso Vladimir I. Arnold pasará a la historia como uno de los más importantes matemáticos de la segunda mitad del siglo XX, pues sus contribuciones en la teoría de Sistemas Dinámicos y en otras áreas afines de la matemática han sido de fundamental importancia para el desarrollo de esta ciencia. Para matemáticos de esta magnitud, el Cálculo Diferencial e Integral, como el que estamos exponiendo en este libro, resulta algo así como "las tablas de multiplicar" en su quehacer científico. En realidad no se puede afirmar que usen el Cálculo como tal, pues éste ha sido simplemente una de las primeras piedras sobre las que se han levantado las complejas construcciones teóricas en las que trabajan. Sin embargo, *se supone* que cualquier matemático profesional debería poder resolver problemas de esta, tan "elemental" rama del conocimiento matemático, aunque ... la Matemática del siglo XX ha producido tal nivel de especialización (topología algebraica, topología diferencial, análisis funcional, teoría de Galois, K-teoría, por mencionar sólo algunas de las ramas de especialización de la matemática del final del siglo XX), que muchos matemáticos serían incapaces de resolver algunos problemas de Cálculo. Arnold quiso comprobar este fenómeno de la sobre-especialización en la matemática de fin de siglo. ¿Qué hizo para desengañarse? Simple: se inventó un límite. Sí, un límite de los que esta-

mos estudiando en esta sección de este primer curso de Cálculo. Dice Arnold (V. I. Arnold. *Huygens & Barrow, Newton & Hooke*, Birkhäuser Verlag, 1990, pág. 28), que suponía que muy pocos de los matemáticos actuales serían capaces de resolver este límite en poco tiempo. Y efectivamente así fue. Solamente, dice, el matemático alemán G. Faltings, resolvió el problema como un problema "sencillo" de Cálculo (Arnold dice que Faltings es la excepción que confirma la regla), como se esperaría que cualquier matemático profesional lo hiciera. El límite es:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\tan x) - \tan(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{arcsen}(\arctan x) - \arctan(\operatorname{arcsen} x)} \tag{L}$$

El objetivo de este ejercicio es resolver este famoso límite de Arnold. Debemos advertir que los cálculos involucrados seguramente no le resultarán sencillos. De hecho no lo son. Piense, sin embargo, que usted es un estudiante de un primer curso de Cálculo y que está resolviendo un problema propuesto por uno de los matemáticos más importantes del siglo XX. La estrategia que se seguirá para calcular este límite, será desarrollar hasta un orden adecuado la fórmula de Taylor de las funciones involucradas.

a) Éste es un inciso algebraico de preparación para algunas cuentas que tendrán que hacerse en los próximos incisos. Debemos recordar cómo se desarrollan las potencias de polinomios. En particular, debemos recordar que para $n, m \in \mathbb{N}$:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^m = \sum_{\substack{0 \le i_1, i_2, \ldots, i_n \le m \\ i_1 + i_2 + \ldots + i_n = m}} \binom{m}{i_1\, i_2\, \ldots\, i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$$

en donde

$$\binom{m}{i_1\, i_2\, \ldots\, i_n} = \frac{m!}{i_1! i_2! \ldots i_n!}$$

es el llamado "coeficiente multinomial".

1. Desarrolle $(a + b + c)^3$.
2. Desarrolle $(2a - b + c + d)^3$.
3. Desarrolle $(2x + y - z)^4$.
4. Desarrolle $(x + 2y - 3z + 4w)^4$.
5. Determine los términos con potencias de x no mayores que cuatro en el desarrollo de $(x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 3x)^4$.
6. Determine los términos con potencias de x no mayores que siete en el desarrollo de $(x^7 - 2x^5 + 3x^3 - 5x)^3$.
7. Determine los términos con potencias de x no mayores que siete en el desarrollo de $(2x^7 - 3x^5 + 4x^3 + x)^5$.

b) Obtenga los siguientes desarrollos de orden siete de la fórmula de Taylor de las funciones $\operatorname{sen} x$, $\tan x$, $\operatorname{arcsen} x$ y $\arctan x$ alrededor del origen de coordenadas:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + r(x^7),$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + r(x^7),$$

$$\text{arcsen}\, x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + r(x^7),$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + r(x^7).$$

c) Verifique directamente que la información que proporciona la fórmula de Taylor de primer orden para las funciones

$$\varphi(x) = \text{sen}(\tan x) - \tan(\text{sen}\, x)$$

y

$$\psi(x) = \text{arcsen}(\arctan x) - \arctan(\text{arcsen}\, x)$$

es insuficiente (las fórmulas de Taylor se reducen a cero).

d) Usando las fórmulas de Taylor de tercer orden de las funciones $\text{sen}\, x$ y $\tan x$, obtenga las fórmulas de Taylor de tercer orden de las funciones $\text{sen}(\tan x)$ y $\tan(\text{sen}\, x)$, de la siguiente manera:

$$\text{sen}(\tan x) = \begin{array}{l}\text{términos hasta}\\ \text{tercer orden de}\end{array} \left[\left(x + \frac{1}{3}x^3\right) - \frac{1}{6}\left(x + \frac{1}{3}x^3\right)^3\right] + r(x^3)$$

y

$$\tan(\text{sen}\, x) = \begin{array}{l}\text{términos hasta}\\ \text{tercer orden de}\end{array} \left[\left(x - \frac{1}{6}x^3\right) + \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)^3\right] + r(x^3).$$

Verifique que en ambos casos se obtiene:

$$\text{sen}(\tan x) = \tan(\text{sen}\, x) = x + \frac{1}{6}x^3 + r(x^3).$$

e) Usando las fórmulas de Taylor de tercer orden de las funciones $\text{arcsen}\, x$ y $\arctan x$, obtenga las fórmulas de Taylor de tercer orden de las funciones $\text{arcsen}(\arctan x)$ y arctan ($\text{arcsen}\, x$), de la siguiente manera:

$$\text{arcsen}(\arctan x) = \begin{array}{l}\text{términos hasta}\\ \text{tercer orden de}\end{array} \left[\left(x - \frac{1}{3}x^3\right) + \frac{1}{6}\left(x - \frac{1}{3}x^3\right)^3\right] + r(x^3)$$

y

$$\arctan(\text{arcsen}\, x) = \begin{array}{l}\text{términos hasta}\\ \text{tercer orden de}\end{array} \left[\left(x + \frac{1}{6}x^3\right) - \frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{6}x^3\right)^3\right] + r(x^3).$$

Verifique que en ambos casos se obtiene:

$$\text{arcsen}(\arctan x) = \arctan(\text{arcsen}\, x) = x - \frac{1}{6}x^3 + r(x^3).$$

Concluya que con la información que proporcionan las fórmulas de Taylor de tercer orden de las funciones $\operatorname{sen}(\tan x)$, $\tan(\operatorname{sen} x)$, $\operatorname{arcsen}(\arctan x)$ y $\arctan(\operatorname{arcsen} x)$, alrededor del origen, no es posible calcular el límite (L).

f) Usando las fórmulas de Taylor de quinto orden de las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\tan x$, obtenga las fórmulas de Taylor de quinto orden de las funciones $\operatorname{sen}(\tan x)$ y $\tan(\operatorname{sen} x)$, de la siguiente manera:

$$\operatorname{sen}(\tan x) = \begin{array}{c}\text{términos}\\ \text{hasta}\\ \text{quinto}\\ \text{orden}\\ \text{de}\end{array} \left[\begin{array}{c} \left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5\right) \\ -\frac{1}{6}\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5\right)^3+ \\ \frac{1}{120}\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5\right)^5 \end{array}\right] + r(x^5)$$

y

$$\tan(\operatorname{sen} x) = \begin{array}{c}\text{términos}\\ \text{hasta}\\ \text{quinto}\\ \text{orden}\\ \text{de}\end{array} \left[\begin{array}{c} \left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5\right)+ \\ +\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5\right)^3+ \\ +\frac{2}{15}\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5\right)^5 \end{array}\right] + r(x^5).$$

Verifique que en ambos casos se obtiene:

$$\operatorname{sen}(\tan x) = \tan(\operatorname{sen} x) = x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 + r(x^5).$$

g) Usando las fórmulas de Taylor de quinto orden de las funciones $\operatorname{arcsen} x$ y $\arctan x$, obtenga las fórmulas de Taylor de quinto orden de las funciones $\operatorname{arcsen}(\arctan x)$ y $\arctan(\operatorname{arcsen} x)$, de la siguiente manera:

$$\operatorname{arcsen}(\arctan x) = \begin{array}{c}\text{términos}\\ \text{hasta}\\ \text{quinto}\\ \text{orden}\\ \text{de}\end{array} \left[\begin{array}{c} \left(x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5\right)+ \\ +\frac{1}{6}\left(x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5\right)^3+ \\ +\frac{3}{40}\left(x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5\right)^5 \end{array}\right] + r(x^5)$$

y

$$\arctan(\operatorname{arcsen} x) = \begin{array}{c}\text{términos}\\ \text{hasta}\\ \text{quinto}\\ \text{orden}\\ \text{de}\end{array} \left[\begin{array}{c} \left(x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5\right)- \\ -\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5\right)^3+ \\ +\frac{1}{5}\left(x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5\right)^5 \end{array}\right] + r(x^5).$$

Verifique que en ambos casos se obtiene:

$$\operatorname{arcsen}(\arctan x) = \arctan(\operatorname{arcsen} x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{13}{120}x^5 + r(x^5).$$

Concluya que con la información que proporcionan las fórmulas de Taylor de quinto orden de las funciones $\operatorname{sen}(\tan x)$, $\tan(\operatorname{sen} x)$, $\operatorname{arcsen}(\arctan x)$ y $\arctan(\operatorname{arcsen} x)$, alrededor del origen, no es posible calcular el límite (L).

h) Usando las fórmulas de Taylor de séptimo orden de las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\tan x$, obtenga las fórmulas de Taylor de séptimo orden de las funciones $\operatorname{sen}(\tan x)$ y $\tan(\operatorname{sen} x)$, de la siguiente manera:

$$\operatorname{sen}(\tan x) = \begin{array}{c}\text{términos}\\ \text{hasta}\\ \text{séptimo}\\ \text{orden}\\ \text{de}\end{array} \left[\begin{array}{c} \left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7\right)- \\ -\frac{1}{6}\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7\right)^3+ \\ +\frac{1}{120}\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7\right)^5- \\ -\frac{1}{5040}\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7\right)^7 \end{array}\right] + r(x^7)$$

y

$$\tan(\operatorname{sen} x) = \begin{array}{c}\text{términos}\\ \text{hasta}\\ \text{séptimo}\\ \text{orden}\\ \text{de}\end{array} \left[\begin{array}{c} \left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{5040}x^7\right)+ \\ +\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{5040}x^7\right)^3+ \\ +\frac{2}{15}\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{5040}x^7\right)^5+ \\ +\frac{17}{315}\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{5040}x^7\right)^7 \end{array}\right] + r(x^7).$$

Obtenga entonces:

$$\operatorname{sen}(\tan x) = x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{55}{1008}x^7 + r(x^7)$$

y

$$\tan(\operatorname{sen} x) = x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{107}{5040}x^7 + r(x^7).$$

Concluya entonces que la fórmula de Taylor de séptimo orden de la función $\varphi(x) = \operatorname{sen}(\tan x) - \tan(\operatorname{sen} x)$ alrededor del origen es:

$$\operatorname{sen}(\tan x) - \tan(\operatorname{sen} x) = -\frac{1}{30}x^7 + r(x^7).$$

i) Usando las fórmulas de Taylor de séptimo orden de las funciones $\operatorname{arcsen} x$ y $\arctan x$, obtenga las fórmulas de Taylor de séptimo orden de las funciones $\operatorname{arcsen}(\arctan x)$ y $\arctan(\operatorname{arcsen} x)$ (haciendo uso del resultado del ejercicio 11.27), de la siguiente manera:

$$\operatorname{arcsen}(\arctan x) = \begin{array}{c}\text{términos}\\ \text{hasta}\\ \text{séptimo}\\ \text{orden}\\ \text{de}\end{array} \left[\begin{array}{c} \left(x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7\right)+ \\ +\frac{1}{6}\left(x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7\right)^3+ \\ +\frac{3}{40}\left(x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7\right)^5+ \\ +\frac{5}{112}\left(x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7\right)^7 \end{array}\right] + r(x^7)$$

y

$$\arctan(\operatorname{arcsen} x) = \begin{matrix}\text{términos}\\ \text{hasta}\\ \text{séptimo}\\ \text{orden}\\ \text{de}\end{matrix} \begin{bmatrix} \left(x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7\right) - \\ -\frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7\right)^3 + \\ +\frac{1}{5}\left(x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7\right)^5 - \\ -\frac{1}{7}\left(x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7\right)^7 \end{bmatrix} + r(x^7).$$

Obtenga entonces:

$$\operatorname{arcsen}(\arctan x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{13}{120}x^5 - \frac{341}{5040}x^7 + r(x^7)$$

y

$$\arctan(\operatorname{arcsen} x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{13}{120}x^5 - \frac{173}{5040}x^7 + r(x^7).$$

Concluya que la fórmula de Taylor de séptimo orden de la función

$$\psi(x) = \operatorname{arcsen}(\arctan x) - \arctan(\operatorname{arcsen} x)$$

alrededor del origen es:

$$\operatorname{arcsen}(\arctan x) - \arctan(\operatorname{arcsen} x) = -\frac{1}{30}x^7 + r(x^7).$$

j) Use los resultados de los dos incisos anteriores para concluir que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\tan x) - \tan(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{arcsen}(\arctan x) - \arctan(\operatorname{arcsen} x)} = 1.$$

(**NOTA:** Este límite puede resolverse aplicando repetidamente (siete veces) la regla de L'Hôpital; los cálculos involucrados en este procedimiento son verdaderamente espeluznantes: el lector que quiera poner a prueba su capacidad operativa y su paciencia, podría intentar resolver el límite usando la regla de L'Hôpital. Hasta este momento, el autor no conoce a nadie que haya llegado hasta el final con este procedimiento. Si usted lo logra, el autor quedaría muy agradecido si le proporcionara una copia de los cálculos que tuvo que hacer.)

EXAMEN DEL CAPÍTULO 11

EXAMEN TIPO (A)

1. Considere la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$. Calcule el valor exacto del incremento que tiene esta función cuando la variable x pasa de $x_0 = 1$ a $x_1 = 1.5$.

2. Calcule el valor aproximado del incremento de la función del ejercicio anterior, usando diferenciales.

3. Determine la diferencial de la función $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right)$.

4. Determine la diferencial de la función $f(x) = \ln\frac{1-x}{1+x}$.

5. Considere la función $y = f(u) = u^3 + 3u + 2$ en donde $u = g(x) = \cos(x)$. Determine la diferencial de cada una de las funciones $f(u)$ y $g(x)$ (en términos de du y dx, respectivamente). Use estos resultados para obtener la diferencial de la función compuesta $y = f(g(x))$.

6. Considere la función $y = f(x)$ dada implícitamente por la expresión $x^2y + x^3 + y^3 - 3x - y + 1 = 0$. Calcule la diferencial de esta función en el punto $(1, 1)$.

7. Use diferenciales para calcular aproximadamente $(2.1)^5$.

8. Cada lado de un cubo de arista $a = 9$ cm, aumenta 0.1 cm. Use diferenciales para calcular aproximadamente el incremento que tiene el volumen del cubo.

9. Determine la fórmula de Taylor de orden 3 alrededor del origen para la función $f(x) = xe^{2x} + 2x^2 + x + 3$.

10. Use la fórmula de Taylor para presentar al polinomio x^4 en potencias de $x + 2$.

EXAMEN TIPO (B)

1. Considere la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Calcule el valor exacto del incremento que tiene esta función cuando la variable x pasa de $x_0 = 2$ a $x_1 = 2.3$.

2. Calcule el valor aproximado del incremento de la función del ejercicio anterior, usando diferenciales.

3. Determine la diferencial de la función $f(x) = \ln\frac{1-x}{1+x}$.

4. Considere la función $y = f(x) = \varphi\left(x\psi\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ en donde φ y ψ son funciones diferenciables. Determine la diferencial dy en términos de dx.

5. Use diferenciales para calcular aproximadamente $\ln(0.92)$.

6. Use diferenciales para calcular aproximadamente $\arctan 1.08$.

7. Sea $f(x) = \cosh^2 x + \operatorname{senh}(x^2)$. Demuestre que en la fórmula de Taylor (de cualquier orden) de esta función alrededor del origen, solamente aparecen potencias pares de x.

8. Determine la fórmula de Taylor de orden 5 de la función $f(x) = (x^2 + 3x + 2)e^{4x}$ alrededor del origen.

9. Use la fórmula de Taylor para expresar al polinomio $x^5 + 2$ en potencias de $x - 2$.

10. En un círculo de radio $r = 12$ cm, el área se incrementó en 28 centímetros cuadrados. Use diferenciales para calcular aproximadamente en cuánto se incrementó el radio de este círculo.

NOTA HISTÓRICA: EULER, EL CALCULISTA.

Leonardo Euler nació el 15 de abril de 1707 en Basilea, Suiza. Él es, sin duda alguna, el matemático más importante del siglo XVIII, siglo en que el mundo científico miraba sorprendido los alcances que tenía la nueva herramienta matemática que se había generado un siglo antes con Newton y Leibniz. Esta nueva herramienta matemática, en una mente como la de Euler, produjo lo que ahora vemos en los más de 70 volúmenes de la *Opera omnia* de L. Euler en las bibliotecas, en los que hay varios miles de hojas con resultados nuevos y originales (en su época), muchos de los cuales habían esperado muchos años para obtenerse. Euler hizo con el cálculo lo que la palabra de esta parte de la matemática sugiere: calcular. En efecto, Euler calculó toda su vida, y mucho: series infinitas, soluciones de ecuaciones diferenciales, logaritmos de números complejos, caras y aristas de poliedros, etcétera.

Una de sus principales obras, el *Introductio in analysim infinitorum*, en donde se exponen principalmente ideas relacionadas con el Cálculo, contiene un uso magistral de las cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes, ideas que iban a pasar a la historia como "infinitesimales", o más recientemente, como "diferenciales". El uso que Euler hace de estos objetos matemáticos es puramente formal. En este tiempo no había lugar a las disertaciones teóricas sobre los fundamentos de los métodos utilizados (tales cuestionamientos teóricos vendrían un siglo después).



Euler manejó "cantidades que son más pequeñas que cualquier número, pero que no son cero" y "cantidades más grandes que cualquier número que existe", que corresponden a sus "infinitamente pequeños" e "infinitamente grandes", respectivamente. Por ejemplo, para Euler si x es un número infinitamente pequeño, entonces $\operatorname{sen}(x) = x$, y $\cos(x) = 1$. Tales resultados los hemos manejado en el curso de Cálculo Diferencial en términos de límites: el límite cuando x tiende a cero del cociente del seno de x entre x, es igual a uno, y el límite cuando x tiende a cero del coseno de x es igual a uno. Acontece que el rigor que la Matemática se planteó en el siglo XIX, "satanizó" los procedimientos de Euler (¡no sus resultados!) y éstos quedaron por mucho tiempo en el olvido. En el siglo XIX aparecieron filtradas muchas ideas del Cálculo como las conocemos ahora, pero las ideas originales de Euler, y sobre todo, los resultados que obtuvo, siguen siendo motivo de orgullo de la Matemática, y un gran legado al conocimiento científico de todos los tiempos.

La fórmula que más se asocia con Euler (de las miles que fueron escritas por él), es la llamada "fórmula de Euler", que establece que:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi,$$

de la cual se obtiene, poniendo $\varphi = \pi$, la fórmula

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

que hay quien dice que es la fórmula más bonita de la Matemática, pues contiene cuatro de los números más importantes: el número e (base de los logaritmos naturales), el número complejo $i = \sqrt{-1}$, el número π y el número 1 (¿usted qué piensa?).

En los últimos años de su vida Euler perdió la vista, pero esto no le impidió seguir haciendo Matemática: dictaba las ecuaciones que desarrollaba y formulaba en su mente. El año de 1783, en el que Euler murió (el 18 de septiembre), Condorcet lo cita como el año en que "Euler dejó de vivir y de calcular".

CAPÍTULO 12
LA INTEGRAL DEFINIDA

"Arquímedes, uno de los más importantes de todos los matemáticos, fue el hombre práctico de sentido común, el Newton de su época, que poseía la habilidad imaginativa y la perspicacia para tratar la geometría métrica y la mecánica, y que incluso inventó el Cálculo Integral ..."

Herbert W. Turnbull

Así como el concepto más importante del Cálculo Diferencial (la derivada de una función) surgió de manera natural al considerar el problema geométrico de trazar la recta tangente a una curva (la gráfica de la función), en el Cálculo Integral también hay un problema geométrico que nos motivará la definición más importante en esta parte del cálculo, a saber, la definición de integral (definida). El problema mencionado se refiere al cálculo de áreas de figuras planas. En la historia de la matemática, éste es uno de los problemas más antiguos, que fue foco de interés de muchos de los protagonistas de la matemática griega. Desde los tiempos de la educación primaria hemos estado en contacto con este problema: se nos ha enseñado cómo calcular áreas de cuadrados, de rectángulos, de triángulos, y, quizás, de algunos polígonos más complicados. Sabemos que el área A de un rectángulo de base b y altura h es $A = bh$ (de donde, en particular, el área de un cuadrado de lado l es $A = l^2$), y que el área de un triángulo de base b y altura h es $A = \frac{1}{2}bh$. En general, hasta este momento (con nuestra Matemática previa al Cálculo), sabemos calcular áreas de figuras con "lados derechos", pero no sabemos cómo calcular áreas de figuras con "lados curvos". Y éste es el problema que queremos estudiar en este capítulo. Por ejemplo, consideremos la figura formada por el eje x, la recta $x = 1$, y la parábola $y = x^2$. Se trata de un "triángulo" con vértices en $A = (0,0)$, $B = (1,0)$ y $C = (1,1)$, uno de cuyos lados (el lado AC) no es una recta, sino el pedazo de parábola $y = x^2$ comprendido entre los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$. En uno de los ejemplos que resolveremos en este capítulo, veremos que el área de esta figura es de $\frac{1}{3}$ (unidades cuadradas). Este caso particular (el área de la figura parabólica) fue resuelto por Arquímedes (287-212 a.C.), empleando un método que tiene en esencia las mismas ideas que expondremos en este capítulo. En la nota histórica al final del capítulo comentaremos un poco más detenidamente el papel que jugó Arquímedes en el nacimiento de las ideas del Cálculo Integral.

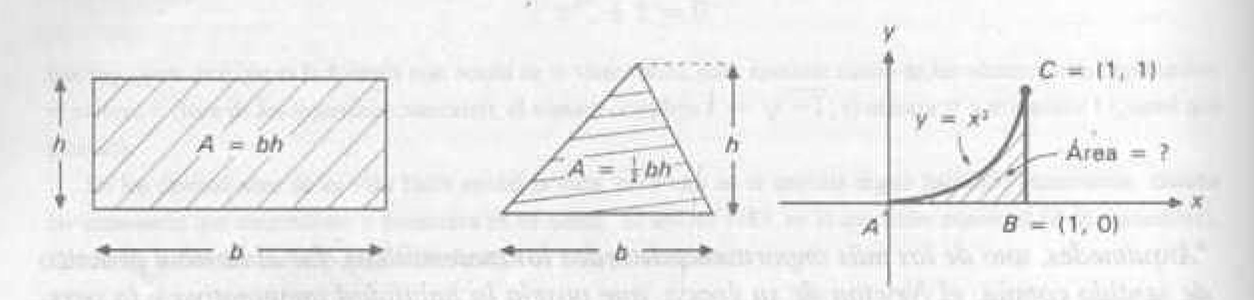


Figura 1. Las áreas de un rectángulo, de un "triángulo normal", y de un "triángulo curvo".

Más generalmente, consideremos una función continua y no negativa $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ (en el capítulo 3 estudiamos lo que significa que esta función sea continua en $[a, b]$; que sea no negativa significa que $f(x) \geq 0$ para toda $x \in [a, b]$, es decir, que la gráfica de esta función —además de que no se rompe, pues es continua— nunca se encuentra por debajo del eje x en el intervalo considerado). Uno de los objetivos de este capítulo es estudiar el problema de calcular el área de la figura limitada por el eje x, las rectas $x = a$ y $x = b$, y la gráfica de la función $y = f(x)$ en $[a, b]$, que llamaremos "área bajo la curva $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$".

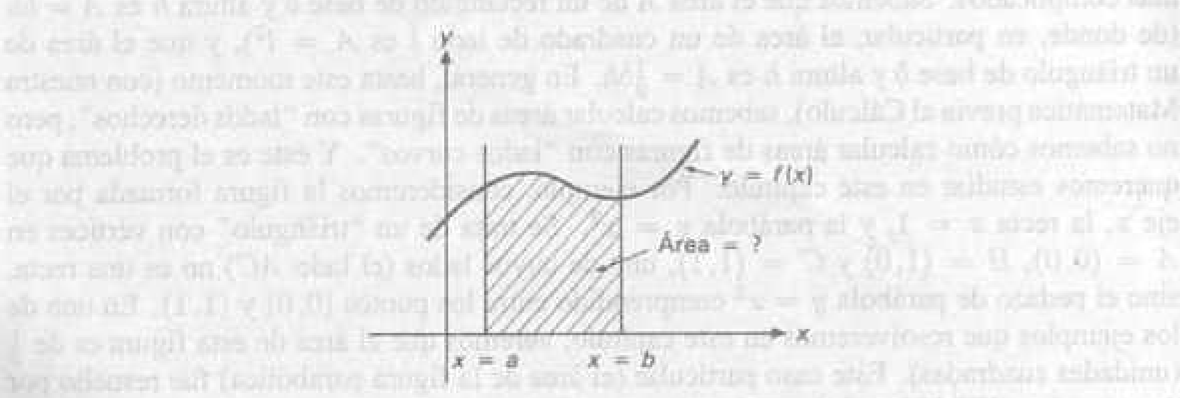


Figura 2. El área bajo la curva $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$.

12.1 LA NOTACIÓN SIGMA

El objetivo de esta primera sección es familiarizarnos con una notación que usaremos en este capítulo para definir el concepto de integral definida. Se trata de un asunto muy sencillo: queremos escribir "sumas" de una manera adecuada. Por ejemplo, consideremos las siguientes expresiones:

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$
$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$$
$$S_3 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}.$$

La suma S_1 la podemos leer diciendo: "S_1 es la suma de uno, más dos, más tres, más cuatro, más cinco", o bien, sin hacer explícitos todos los sumandos, podemos decir también que "S_1 es la suma del número i, desde que este número es igual a uno, hasta que es igual a cinco". Esta última manera de referirnos a la suma S_1 se escribe como:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{5} i.$$

Ésta es la llamada "notación sigma" para una suma (letra griega $\sum$ —sigma— mayúscula); decimos también, que la suma S_1 *está escrita en forma de sumatoria.* La ventaja de esta notación para la suma S_1 es clara: piense que tuviera la suma S de uno más dos más tres, y asi sucesivamente hasta 245. En lugar de enumerar los 245 sumandos, podemos decir que ésta es la suma del número i, desde que éste es igual a 1, hasta que es 245, y escribir:

$$S = \sum_{i=1}^{245} i.$$

Análogamente, nos podemos referir a la suma S_2 como la suma de los cuadrados del número i, desde que éste va de uno hasta cuatro, y escribir:

$$S_2 = \sum_{i=1}^{4} i^2,$$

mientras que S_3 es la suma de los recíprocos del número i, desde que éste va de uno hasta seis, y escribir:

$$S_3 = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i}.$$

En general, la notación sigma tiene la siguiente estructura:

La suma termina cuando el contador i es igual al número entero $\triangle \geq \diamond$

$$\sum_{\boxed{i=\diamond}}^{\boxed{\triangle}} \boxed{\varphi(i)}$$

← aquí va la "fórmula" de los sumandos en los que interviene i

La suma comienza cuando el contador i es igual al número entero $\diamond$

y significa:

$$\varphi(\diamond) + \varphi(\diamond + 1) + \ldots + \varphi(\triangle).$$

en donde a φ la podemos interpretar como una función, que a cada entero positivo i entre $\diamond$ y $\triangle$, asocia un cierto "objeto matemático $\varphi(i)$" (que puede ser un número, una función, etcétera. Estos objetos son los que se están sumando). El número i le hemos llamado "contador", y tiene solamente la función de señalar de dónde a dónde se tienen que sumar los valores de $\varphi(i)$. Así, por ejemplo, usando otras letras para el contador, se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(i) = \sum_{j=1}^{n} \varphi(j) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(k) = \varphi(1) + \varphi(2) + \ldots + \varphi(n).$$

Por ejemplo, con la notación sigma podemos escribir la propiedad de derivabilidad de una suma de funciones como sigue: si las n funciones $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_n(x)$ son derivables, entonces su suma $\sum_{i=1}^{n} f_i(x)$ es derivable, y la derivada de la suma es:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x) \right)' = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x).$$

EJEMPLO 12.1.1. Calcule las sumas: a) $\sum_{i=1}^{4} i^3$, b) $\sum_{i=2}^{5} \frac{2}{3+i}$, c) $\sum_{i=4}^{6} \frac{i}{4+i^2}$.

SOLUCIÓN.

a)

$$\sum_{i=1}^{4} i^3 = (1)^3 + (2)^3 + (3)^3 + (4)^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100.$$

b)

$$\sum_{i=2}^{5} \frac{2}{3+i} = \frac{2}{3+2} + \frac{2}{3+3} + \frac{2}{3+4} + \frac{2}{3+5} = \frac{2}{5} + \frac{2}{6} + \frac{2}{7} + \frac{2}{8} = \frac{533}{420}.$$

c)

$$\sum_{i=4}^{6} \frac{i}{4+i^2} = \frac{4}{4+(4)^2} + \frac{5}{4+(5)^2} + \frac{6}{4+(6)^2} = \frac{4}{20} + \frac{5}{29} + \frac{6}{40} = \frac{303}{580}.$$

★

EJEMPLO 12.1.2. Escriba en forma de sumatorias cada una de las sumas:

a) $S_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$.
b) $S_2 = 2^4 + 4^4 + 6^4 + 8^4 + 10^4$.

SOLUCIÓN.
a) Cada uno de los términos de la suma es de la forma $\frac{1}{i}$ en donde i toma los valores $2, 3, 4, 5$ y 6. Entonces podemos escribir tal suma como:

$$S_1 = \sum_{i=2}^{6} \frac{1}{i},$$

o bien como:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{1+i}.$$

b) Cada uno de los términos de la suma es un número par (entre dos y diez, inclusive) elevado a la cuarta potencia. Los números pares los podemos representar como $2i$, en donde i es un entero. En particular los números pares $2, 4, 6, 8$ y 10, son de la forma $2i$ para $i = 1, 2, 3, 4$ y 5, respectivamente. Entonces, podemos escribir la suma como:

$$S_2 = \sum_{i=1}^{5} (2i)^4.$$

★

Estudiaremos ahora algunas propiedades generales de la notación sigma. Comencemos por considerar el caso en el que los sumandos que intervienen en una suma son siempre el mismo. Es decir, queremos calcular la suma $\sum_{i=1}^{n} \varphi(i)$ en el caso en que $\varphi(i)$ es una constante, digamos que $\varphi(i) = c$ para todo i. Observe que en este caso estaremos sumando n veces el número c, de modo que:

$$\sum_{i=1}^{n} c = \underbrace{c + c + \ldots + c}_{n \text{ veces}} = nc.$$

En particular:

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n.$$

Supongamos ahora que cada uno de los sumandos $\varphi(i)$ en la suma $\sum_{i=1}^{n} \varphi(i)$ aparece multiplicado por una constante, digamos α. Es decir, queremos estudiar la suma $\sum_{i=1}^{n} \alpha\varphi(i)$. Se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha\varphi(i) = \alpha\varphi(1) + \alpha\varphi(2) + \ldots + \alpha\varphi(n) \overset{\text{factorice } \alpha}{=} \alpha\left(\varphi(1) + \varphi(2) + \ldots + \varphi(n)\right)$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} \varphi(i).$$

Así, tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha\varphi(i) = \alpha \sum_{i=1}^{n} \varphi(i).$$

Es decir, los factores constantes pueden "salir de la notación sigma". Por ejemplo, en el inciso b) del ejemplo 12.1.1 podríamos haber escrito:

$$\sum_{i=2}^{5} \frac{2}{3+i} = \sum_{i=2}^{5} 2\left(\frac{1}{3+i}\right) = 2\sum_{i=2}^{5} \frac{1}{3+i} = 2\left(\frac{1}{3+2} + \frac{1}{3+3} + \frac{1}{3+4} + \frac{1}{3+5}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) = (2)\left(\frac{533}{840}\right) = \frac{533}{420}.$$

Otra propiedad importante de la notación sigma se refiere a la manera en que ésta actúa sobre sumas: consideremos la suma $\sum_{i=1}^{n} \Phi(i)$ en donde $\Phi(i) = \varphi(i) + \psi(i)$. Se tiene entonces que:

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi(i) = \sum_{i=1}^{n} \left(\varphi(i) + \psi(i)\right)$$

$$= (\varphi(1) + \psi(1)) + (\varphi(2) + \psi(2)) + \ldots + (\varphi(n) + \psi(n)) \overset{\text{agrupando}}{=\!=\!\longrightarrow}$$

$$= (\varphi(1) + \varphi(2) + \ldots + \varphi(n)) + (\psi(1) + \psi(2) + \ldots + \psi(n))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \varphi(i) + \sum_{i=1}^{n} \psi(i).$$

Es decir, se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{n} (\varphi(i) + \psi(i)) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(i) + \sum_{i=1}^{n} \psi(i).$$

Esta propiedad la podemos recordar pensando en que la notación sigma "pasa por las sumas". Juntando ésta con la propiedad de que de la notación sigma salen las constantes, podemos escribir, para cualquier constante c:

$$\sum_{i=1}^{n} (\varphi(i) + c\psi(i)) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(i) + c \sum_{i=1}^{n} \psi(i).$$

EJEMPLO 12.1.3. Use los resultados del ejemplo 12.1.2 para calcular la suma

$$\sum_{i=1}^{4} (5 + 3i^3).$$

SOLUCIÓN. Usando las propiedades de la notación sigma previamente estudiadas, podemos escribir:

$$\sum_{i=1}^{4} (5 + 3i^3) = \sum_{i=1}^{4} 5 + \sum_{i=1}^{4} 3i^3 = \sum_{i=1}^{4} 5 + 3 \sum_{i=1}^{4} i^3 \overset{\text{ejemplo 2.1.1}}{=\!=\!\longrightarrow}$$

$$= (5)(4) + 3(100) = 320.$$

⋆

EJEMPLO 12.1.4. Suponga que los números a_1, a_2, a_3 y a_4 son tales que $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 8$, y los números b_1, b_2, b_3 y b_4 son tales que $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 5$. Calcule $\sum_{i=1}^{4} (a_i + 7b_i)$.

SOLUCIÓN. Usando las propiedades de la notación sigma estudiadas en la sección 1, tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{4}(a_i+7b_i)=\sum_{i=1}^{4}a_i+\sum_{i=1}^{4}7b_i=\sum_{i=1}^{4}a_i+7\sum_{i=1}^{4}b_i=8+7(5)=43.$$

★

EJEMPLO 12.1.5. Use el hecho de que $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ para calcular la suma $\sum_{i=1}^{10}\frac{1}{i(i+1)}$.

SOLUCIÓN. Se tiene:

$$\sum_{i=1}^{10}\frac{1}{i(i+1)}=\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right).$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right).$$

Se observa que todos los términos, excepto el primero y el último, se cancelan entre sí, de modo que:

$$\sum_{i=1}^{10}\frac{1}{i(i+1)}=1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}.$$

★

EJERCICIOS (12.1)

En los ejercicios 1 al 10, escriba explícitamente la suma indicada.

1. $\sum_{i=1}^{4}-3.$ **2.** $\sum_{i=1}^{3}(2+3i).$ **3.** $\sum_{i=2}^{6}3i^2.$

4. $\sum_{i=1}^{5}(1+2i).$ **5.** $\sum_{i=3}^{4}\frac{i}{1+i}.$ **6.** $\sum_{i=2}^{5}(-1)^{i+1}(i+2).$

7. $\sum_{i=1}^{4}i^i(i^2+2i+2).$ **8.** $\sum_{i=2}^{4}(-1)^i\frac{i+1}{i+2}.$ **9.** $\sum_{i=3}^{6}(-2)^i(e^i+i).$

10. $\sum_{i=1}^{6}(-1)^{i+1}(i^2+1).$

En los ejercicios 11 al 20, escriba en forma de sumatoria la suma explícita que se da.

11. $4+4+4+4+4+4+4$.

12. $1-1+1-1+1-1+1-1$.

13. $4+5+6+7$.

14. $4-5+6-7+8$.

15. $1+5+9+13+17$.

16. $9+16+25+36+49+64$.

17. $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$.

18. $\ln 4+\ln 6+\ln 8+\ln 10+\ln 12$.

19. $e+(e)(e^2)+(e)(e^2)(e^3)+(e)(e^2)(e^3)(e^4)$.

20. $\sqrt{1}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[4]{3}+\sqrt[5]{4}+\sqrt[6]{5}$.

En los ejercicios 21 al 25, suponga que $\sum_{i=1}^{10} f(i)=8$, $\sum_{i=1}^{10} g(i)=3$ *y* $\sum_{i=1}^{10} h(i)=5$. *Calcule el valor de la expresión indicada.*

21. $\sum_{i=1}^{10}\left(f(i)+g(i)+h(i)\right)$.

22. $\sum_{i=1}^{10}\left(-2f(i)+3g(i)-3h(i)\right)$.

23. $3\sum_{i=1}^{10}\left(f(i)+2g(i)\right)-3\sum_{i=1}^{10}\left(2g(i)+h(i)\right)$.

24. $\sum_{i=1}^{10}\left(f(i)-2g(i)\right)+\sum_{i=1}^{10} 4h(i)$.

25. $\sum_{i=1}^{10}\left(f(i)+2g(i)\right)+\sum_{i=1}^{10}\left(2g(i)-h(i)\right)+2\sum_{i=1}^{10}\left(h(i)-f(i)\right)$.

12.2 ALGUNAS SUMAS IMPORTANTES

En esta sección vamos a obtener los valores de algunas sumas que usaremos en secciones posteriores del capítulo. Comenzamos por obtener el valor de la suma S_1 de los primeros n enteros positivos, es decir:

$$S_1 = 1+2+\ldots+n.$$

Reproduzcamos, abajo de esta expresión, la misma S con los sumandos "al revés" (comenzando por n y terminando por 1). Esto lo podemos hacer ya que la suma de enteros es una operación conmutativa y asociativa. Tenemos:

$$\begin{array}{ccccccccccc} S_1 & = & 1 & + & 2 & + & \dots & + & n-1 & + & n \\ & & \updownarrow & & \updownarrow & & & & \updownarrow & & \updownarrow \\ S_1 & = & n & + & n-1 & + & \dots & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

Si sumamos estas dos expresiones, del lado izquierdo obtenemos $2S_1$, y del lado derecho, sumando "por columnas", en el orden en que se ven correspondidos los sumandos de cada una de las dos expresiones anteriores, vemos que cada una de las n parejas $1 \leftrightarrow n$, $2 \leftrightarrow n-1$, $3 \leftrightarrow n-2, \dots, n-2 \leftrightarrow 3$, $n-1 \leftrightarrow 2$ y $n \leftrightarrow 1$, tienen la misma suma, a saber: $n+1$. Es decir,

$$(1)+(n)=(2)+(n-1)=\dots=(n-1)+2=(n)+(1)=n+1.$$

Puesto que hay n parejas, la suma de cada una de las cuales es igual a $n+1$, obtenemos que:

$$2S_1 = n(n+1),$$

de donde la suma S_1 es:

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Hemos obtenido entonces nuestra primera fórmula importante de esta sección:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Veamos un ejemplo.

EJEMPLO 12.2.1. Calcule la suma $\sum_{i=1}^{5}(4+3i)$.

SOLUCIÓN. Podemos calcular directamente la suma como:

$$\sum_{i=1}^{5}(4+3i) = (4+3(1))+(4+3(2))+(4+3(3))+(4+3(4))+(4+3(5))$$

$$= 7+10+13+16+19 = 65,$$

o bien, usando las propiedades de la notación sigma estudiadas en la sección anterior, y la fórmula obtenida para S_1 en la discusión previa a este ejemplo para la suma $1+2+3+4+5$, la cual es, según la fórmula citada (con $n=5$), igual a $\sum_{i=1}^{5} i = \frac{5(5+1)}{2} = 15$, obteniendo:

$$\sum_{i=1}^{5}(4+3i)=\sum_{i=1}^{5}4+\sum_{i=1}^{5}3i=\sum_{i=1}^{5}4+3\sum_{i=1}^{5}i=4(5)+3(15)=20+45=65.$$

★

Obtengamos ahora la suma S_2 de los cuadrados de los primeros n números naturales. Es decir, la suma:

$$S_2=(1)^2+(2)^2+\ldots+(n)^2.$$

Usaremos un truco muy bien pensado para lograr una fórmula para S_2 similar a la que obtuvimos para S_1. ¡Atención, nada por aquí y nada por acá! Observe detenidamente. Sea S la suma:

$$S=\sum_{i=1}^{n}\left((i+1)^3-i^3\right).$$

Si escribimos explícitamente los n sumandos que aparecen en esta expresión, obtenemos:

$$\begin{aligned}S=&((1+1)^3-1^3)+((2+1)^3-2^3)+\ldots+\\&+((n-1+1)^3+(n-1)^3)+((n+1)^3-n^3)\end{aligned}$$

$$=\left(2^3-1^3\right)+\left(3^3-2^3\right)+\ldots+\left(n^3+(n-1)^3\right)+\left((n+1)^3-n^3\right).$$

Observe lo que se obtiene al realizar la suma de los n paréntesis de la última expresión. Ganaremos más claridad si los vemos de la siguiente manera:

$$S=\left\{\begin{array}{cccc} & 2^3 & - & 1^3\\ & & \searrow & \\ + & 3^3 & - & 2^3\\ & & \searrow & \\ + & 4^3 & - & 3^3\\ & & \searrow & \\ & & \vdots & \\ & & \searrow & \\ + & n^3 & - & (n-1)^3\\ & & \searrow & \\ + & (n+1)^3 & - & n^3\end{array}\right.$$

Las flechas indican la cancelación de sumandos (una suma como ésta, en la que ocurren las cancelaciones de todos los términos, excepto dos de ellos —del principio y del final—, se le llama *suma telescópica*). Lo que al final nos queda es el término $(n+1)^3$, el cual es el primer término del último sumando, con el $-1^3=-1$, que es el segundo término del primer sumando. Es decir, nos queda que:

$$S = \sum_{i=1}^{n} ((i+1)^3 - i^3) = (n+1)^3 - 1,$$

o bien, realizando las operaciones indicadas en el lado derecho de esta expresión,

$$S = n^3 + 3n^2 + 3n.$$

Por otra parte, observe que la misma suma S la podemos escribir como:

$$S = \sum_{i=1}^{n} ((i+1)^3 - i^3) = \sum_{i=1}^{n} (i^3 + 3i^2 + 3i + 1 - i^3) = \sum_{i=1}^{n} (3i^2 + 3i + 1).$$

Usando las propiedades de la notación sigma estudiadas en la sección anterior, nos queda que:

$$S = \sum_{i=1}^{n} 3i^2 + \sum_{i=1}^{n} 3i + \sum_{i=1}^{n} 1 = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + n.$$

La primera sumatoria que aparece (multiplicada por 3) en esta expresión es justamente S_2, la suma que estamos tratando de obtener. La segunda, es la suma de los primeros n enteros positivos, que hemos ya visto que es igual a $\frac{1}{2}n(n+1)$. Así pues, la expresión anterior se ve como:

$$S = 3S_2 + 3\left(\frac{1}{2}n(n+1)\right) + n = 3S_2 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n.$$

Pero como ya habíamos obtenido anteriormente que $S = n^3 + 3n^2 + 3n$, concluimos que:

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3S_2 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n,$$

de donde:

$$3S_2 = n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{3}{2}n^2 - \frac{5}{2}n = n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2},$$

de donde se obtiene finalmente que:

$$S_2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Es posible obtener fórmulas similares para la suma de los cubos y de las cuartas potencias de los primeros n números enteros positivos. A continuación escribimos, a manera de resumen, las dos fórmulas obtenidas anteriormente, junto con las fórmulas mencionadas de las sumas de los cubos y de las cuartas potencias.

$S_1 = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.	$S_2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
$S_3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.	$S_4 = \sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$.

EJEMPLO 12.2.2. Calcule la suma $\sum_{i=1}^{7} (3-i)^2$.

SOLUCIÓN. Se tiene, usando las propiedades de las sumatorias vistas en la sección anterior, así como los valores de S_1 y S_2 (con $n = 7$) vistos en esta sección:

$$\sum_{i=1}^{7} (3-i)^2 = \sum_{i=1}^{7} (9 - 6i + i^2) = \sum_{i=1}^{7} 9 - \sum_{i=1}^{7} 6i + \sum_{i=1}^{7} i^2$$

$$= 9(7) - 6\sum_{i=1}^{7} i + \sum_{i=1}^{7} i^2 = 63 - 6\left(\frac{1}{2}(7)(7+1)\right) + \frac{7(7+1)(2(7)+1)}{6}$$

$$= 63 - 168 + 140 = 35.$$

⋆

Otra suma que usaremos en algún momento de este capítulo, es la llamada suma geométrica. Si r es un número real distinto de cero y uno, una suma de potencias consecutivas de r es llamada *suma de tipo geométrico de razón r*. Por ejemplo, la suma de las primeras n potencias consecutivas de r, comenzando con $n = 0$, es una suma de tipo geométrico:

$$S = \sum_{i=0}^{n} r^i = 1 + r + r^2 + \ldots + r^n.$$

(Ésta es llamada simplemente "suma geométrica de razón r".) Para obtener el valor de esta suma, multipliquemos ambos miembros de la expresión anterior por r, y restamos la expresión así obtenida de la correspondiente de S. Es decir:

$$S - rS = 1 + r + r^2 + \ldots + r^n - r\left(1 + r + r^2 + \ldots + r^n\right)$$

$$= 1 + r + r^2 + \ldots + r^n - r - r^2 - r^3 - \ldots - r^{n+1} = 1 - r^{n+1},$$

de donde, despejando S, se obtiene:

$$S = \sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

EJEMPLO 12.2.3. Calcule la suma $\sum_{i=0}^{5} 2^i$.

SOLUCIÓN. Se trata de una suma geométrica de razón $r = 2$, con $n = 5$. Usando la fórmula previamente deducida, se tiene:

$$\sum_{i=0}^{5} 2^i = \frac{1-2^{5+1}}{1-2} = \frac{1-2^6}{-1} = 2^6 - 1 = 63.$$

★

EJEMPLO 12.2.4. Calcule la suma $\sigma = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^6}$.

SOLUCIÓN. Se trata de una suma de tipo geométrico de razón $r = \frac{1}{3}$. Observe que la suma comienza con la potencia uno de la razón r. Lo que la fórmula obtenida anteriormente para la suma geométrica S nos daría, es el valor de la suma:

$$S = \sum_{i=0}^{6} \left(\frac{1}{3}\right)^i = \left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^6 = 1 + \sigma,$$

de donde, conociendo S es posible conocer σ. Según la fórmula vista para S, con $r = \frac{1}{3}$ y $n = 6$, tenemos que:

$$S = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{6+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^7}\right).$$

Entonces:

$$\sigma = S - 1 = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^7}\right) - 1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^6}\right) = \frac{364}{729}.$$

★

EJEMPLO 12.2.5. Calcule la suma $\sum_{i=1}^{6} (i+2)^2$.

SOLUCIÓN. Podemos proceder directamente a desarrollar la expresión que está dentro de la sumatoria, y usar las propiedades de la sección 1, junto con las fórmulas $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ y $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, de la sección 2. Nos queda:

$$\sum_{i=1}^{6} (i+2)^2 = \sum_{i=1}^{6} (i^2 + 4i + 4) = \sum_{i=1}^{6} i^2 + 4\sum_{i=1}^{6} i + \sum_{i=1}^{6} 4$$

$$= \frac{6(6+1)(12+1)}{6} + 4\left(\frac{6(7)}{2}\right) + 4(6) = 199.$$

De otro modo:

$$\sum_{i=1}^{6}(i+2)^2 = 3^2+4^2+\ldots+8^2 = \sum_{i=3}^{8} i^2 = \sum_{i=1}^{8} i^2 - 1^2 - 2^2$$

$$= \frac{8(8+1)(16+1)}{6} - 1 - 4 = 199.$$

⋆

EJEMPLO 12.2.6. En una máquina para exprimir naranjas, se acomodan siempre 20 naranjas en una base rectilínea, y luego, sobre ellas, se hace un triángulo hacia arriba (sin agujeros) como se muestra en la figura. ¿Cuántas naranjas hay en total en la pila?

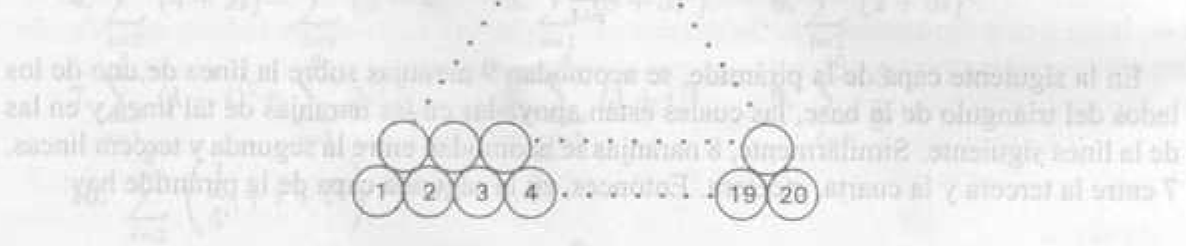


Figura 12.2.1. Las naranjas acomodadas en una pila triangular.

SOLUCIÓN. En la base hay 20 naranjas. Sobre ellas se pueden acomodar 19 naranjas (una en cada hueco que quede entre dos naranjas de la base: hay 19 de estos huecos). Sobre esta últimas se pueden acomodar 18 naranjas, y así sucesivamente. El número de naranjas en total es:

$$20+19+\ldots+2+1 = \sum_{i=1}^{20} i = \frac{20(20+1)}{2} = 210.$$

⋆

EJEMPLO 12.2.7. Las naranjas que se usaron en el ejemplo anterior, se compraron en un puesto del mercado en donde estaban acomodadas en una pila piramidal, con base triangular, en forma de triángulo equilátero, con 10 naranjas en cada lado. ¿Cuántas naranjas hay en total en esa pila?

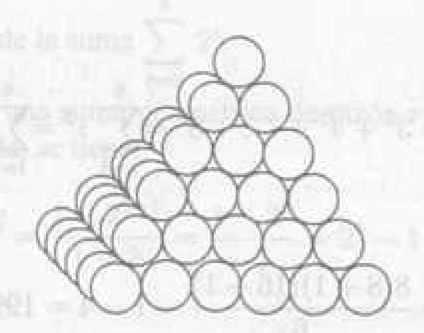


Figura 12.2.2. Las naranjas acomodadas en una pila piramidal con base triangular.

SOLUCIÓN. Como en el ejemplo anterior, el número total de naranjas en la base de la pirámide es:

$$10 + 9 + \ldots + 2 + 1 = \sum_{i=1}^{10} i = \frac{10(10+1)}{2} = 55.$$

En la siguiente capa de la pirámide, se acomodan 9 naranjas sobre la línea de uno de los lados del triángulo de la base, las cuales están apoyadas en las naranjas de tal línea y en las de la línea siguiente. Similarmente, 8 naranjas se acomodan entre la segunda y tercera líneas, 7 entre la tercera y la cuarta, etcétera. Entonces, en la segunda capa de la pirámide hay:

$$9 + 8 + \ldots + 2 + 1 = \sum_{i=1}^{9} i = \frac{9(9+1)}{2} = 45.$$

(Es decir, en la segunda capa hay un triángulo equilátero de naranjas, con 9 naranjas de cada lado.) Un razonamiento análogo nos conduce a que en la tercera capa de la pirámide hay:

$$8 + 7 + \ldots + 2 + 1 = \sum_{i=1}^{8} i = \frac{8(8+1)}{2} = 32.$$

etcétera. En la última capa hay una sola naranja (es decir, para ser congruentes con la estructura de la fórmula del número de naranjas en cada capa, diríamos que en la última capa hay $\frac{(1)(1+1)}{2}$ naranjas). El número total de naranjas en la pirámide es entonces de:

$$\frac{10(10+1)}{2} + \frac{9(9+1)}{2} + \frac{8(8+1)}{2} + \ldots + \frac{2(2+1)}{2} + \frac{(1)(1+1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[(10)(11) + (9)(10) + (8)(9) + \ldots + (1)(2)\right] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{10} i(i+1) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{10}(i^2 + i)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{10} i^2 + \sum_{i=1}^{10} i\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{10(10+1)(20+1)}{6} + \frac{10(10+1)}{2}\right) = \frac{1}{2}(385+55) = 220.$$

★

EJERCICIOS (12.2)

En los ejercicios 1 al 10, calcular el valor de la expresión indicada.

1. $\sum_{i=1}^{5}(8+3i)$. **2.** $\sum_{i=2}^{8}(1+4i)$. **3.** $\sum_{i=1}^{6}(1-i)+\sum_{i=1}^{4}2i$.

4. $\sum_{i=2}^{7}(4+2i)-\sum_{i=1}^{5}(3-i)$. **5.** $\sum_{i=1}^{7}(8+3i^2)$. **6.** $\sum_{i=1}^{8}(2+3i)^2$.

7. $\sum_{i=1}^{5}(1-i)^2+\sum_{i=1}^{6}2i^2$. **8.** $\sum_{i=1}^{5}(1+i)^3$. **9.** $\sum_{i=1}^{10}\frac{3}{2^i}$.

10. $\sum_{i=2}^{5}\left(\frac{1}{4^i}+i+i^2\right)$.

11. La suma de un cierto número entero positivo x con sus siguientes 20 enteros consecutivos, es igual a 357. ¿Qué número es x?

12. Demuestre que $\sum_{i=1}^{n} r^i = \frac{r-r^{n+1}}{1-r}$.

13. Considere las funciones $f_i(x) = x + i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Determine la función suma $\sum_{i=1}^{n} f_i(x)$.

14. Considere las funciones $f_i(x) = x^i$. Determine la función producto $f_1(x)f_2(x)\ldots f_n(x)$.

(NOTA: Así como existe la notación sigma para la suma, se tiene también la notación "pi" para un producto: $\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1a_2\ldots a_n$; en el caso considerado en este ejercicio, el producto de las n funciones $f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ se escribiría como $\prod_{i=1}^{n} f_i(x)$.)

12.3 SUMAS SUPERIORES E INFERIORES

En esta sección estudiaremos cómo determinar aproximaciones al área bajo una curva, usando rectángulos cuya suma de áreas en ocasiones excede, y en ocasiones queda por debajo del valor deseado del área que pretendemos calcular. Veremos cómo estas aproximaciones pueden afinarse tanto como queramos, y finalmente usaremos estas aproximaciones para dar la definición matemática de área de una figura con un lado curvo (formado por la gráfica de una función).

Empezamos definiendo el concepto de partición de un intervalo. Dado un intervalo compacto $I = [a, b]$, llamaremos una **partición** de I, a un conjunto de puntos de I, digamos $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\} \subset I$, tales que $a = x_0$, $b = x_n$, y

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n.$$

Es decir, una partición de $[a, b]$, es un conjunto ordenado (con la relación $<$) de puntos del intervalo, en donde el primer punto es a y el último b. Observe que si la partición P de $[a, b]$ tiene n puntos, el intervalo $[a, b]$ queda dividido en los n subintervalos $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\ldots$, $[x_{n-1}, x_n]$. A $[x_{i-1}, x_i]$ lo llamaremos el i-ésimo subintervalo de la partición P de $[a, b]$, $i = 1, 2, ..., n$, y denotaremos su longitud $x_i - x_{i-1}$ por Δx_i. La suma de las longitudes de los subintervalos (que no tienen que ser necesariamente iguales) es igual a la longitud de todo el intervalo $[a, b]$, pues:

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_0 = b - a.$$

Es decir:

$$b - a = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i.$$

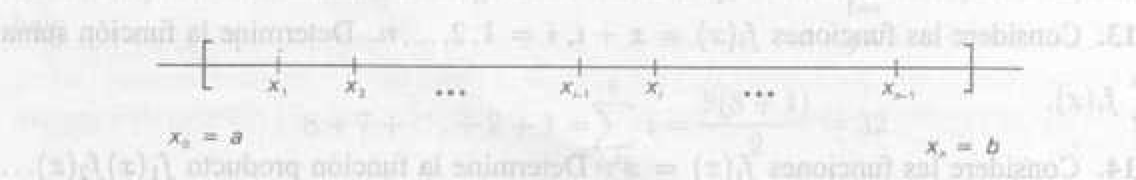


Figura 12.3.1. Una partición $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ del intervalo $[a, b]$.

Por ejemplo, una partición del intervalo $[1, 4]$ es $P = \{1, 1.5, 2.5, 3, 3.8, 4\}$, con la cual el intervalo queda dividido en los cinco subintervalos $[1, 1.5]$, $[1.5, 2.5]$, $[2.5, 3]$, $[3, 3.8]$ y $[3.8, 4]$, cuyas longitudes son $\Delta x_1 = 1.5 - 1 = 0.5$, $\Delta x_2 = 2.5 - 1.5 = 1$, $\Delta x_3 = 3 - 2.5 = 0.5$, $\Delta x_4 = 3.8 - 3 = 0.8$ y $\Delta x_5 = 4 - 3.8 = 0.2$, y cuya suma es:

$$\sum_{i=1}^{5} \Delta x_i = 0.5 + 1 + 0.5 + 0.8 + 0.2 = 3 = 4 - 1 = \text{longitud de } [1, 4].$$



Figura 12.3.2. La partición $P = \{1, 1.5, 2.5, 3, 3.8, 4\}$ del intervalo $[1, 4]$.

Consideremos una función continua y no negativa $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, y sea $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. No resulta difícil aceptar que la propiedad de continuidad de la función f se conserva en todos y cada uno de los n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$ (este hecho puede probarse rigurosamente, pero solamente apelamos al sentido común para establecerlo: si la gráfica de la función no se rompe en $[a, b]$, entonces no se rompe en ningún subintervalo de $[a, b]$). Así, según estudiamos en el capítulo 3 (correspondiente al estudio de la continuidad de funciones), la función f alcanza su máximo y mínimo absolutos en cada uno de tales subintervalos. Sea $M_i = f(\zeta_i)$ y $m_i = f(\xi_i)$ los valores máximo y mínimo absolutos de la función f en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$ (los puntos ζ_i y ξ_i pertenecen a $[x_{i-1}, x_i]$).

Definimos la **suma superior de f asociada a la partición** P (o con respecto a la partición P), **denotada por $U_f(P)$, como:**

$$U_f(P) = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots + M_n\Delta x_n,$$

y la suma inferior de f asociada a la partición P (o con respecto a la partición P), **denotada por $L_f(P)$, como:**

$$L_f(P) = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n.$$

Observe que cada producto $M_i\Delta x_i$ o $m_i\Delta x_i$ puede ser interpretado geométricamente como un área de un rectángulo, cuya base es Δx_i, y cuya altura es M_i o m_i, respectivamente. Así, la suma superior (inferior) de una función continua y no negativa, en un intervalo $[a, b]$, asociada a una partición P de $[a, b]$, es la suma de las áreas de todos los rectángulos cuyas bases son los subintervalos en los que queda dividido $[a, b]$ por la partición P, y cuya altura es el máximo absoluto (mínimo absoluto, respectivamente) de la función en el subintervalo considerado.

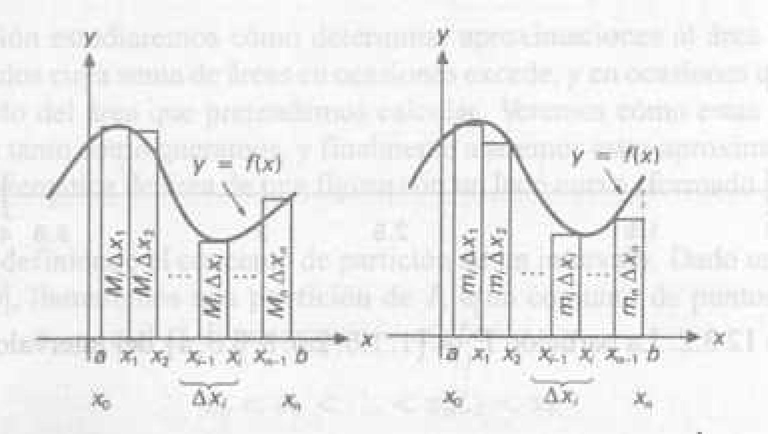


Figura 12.3.3. Las sumas superior e inferior de una función continua y no negativa f en el intervalo $[a, b]$ asociadas con la partición P.

Es importante observar que cualquier concepto sensato de área bajo la curva, debe tener la propiedad "evidente" de que su valor no puede ser mayor que cualquier suma inferior de f, ni menor que cualquier suma superior de f. Es decir, para cualquier partición $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de $[a, b]$, el "área bajo la curva A" de f entre $x = a$ y $x = b$, debe tener la propiedad de que:

$$L_f(P) \leq A \leq U_f(P).$$

Supongamos que la función f, además de ser continua y no negativa en $[a, b]$, es también una función creciente. En este caso particular, para cualquier subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ resultante de la partición P de $[a, b]$, el máximo absoluto de f se encontrará en el extremo derecho del subintervalo, y el mínimo absoluto en el extremo izquierdo de él (pues, como para toda $x \in [x_{i-1}, x_i]$, se tiene $x_{i-1} \leq x \leq x_i$, y entonces, al ser f creciente, se tiene $f(x_{i-1}) \leq f(x) \leq f(x_i)$, concluimos que $m_i = f(x_{i-1}) \leq f(x) \leq f(x_i) = M_i$ para toda $x \in [x_{i-1}, x_i]$, como se dijo anteriormente). Así, pues, en este caso particular, las sumas superior e inferior de f asociadas a la partición $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de $[a, b]$ se ven como:

$$U_f(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x_i$$

y

$$L_f(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \Delta x_i.$$

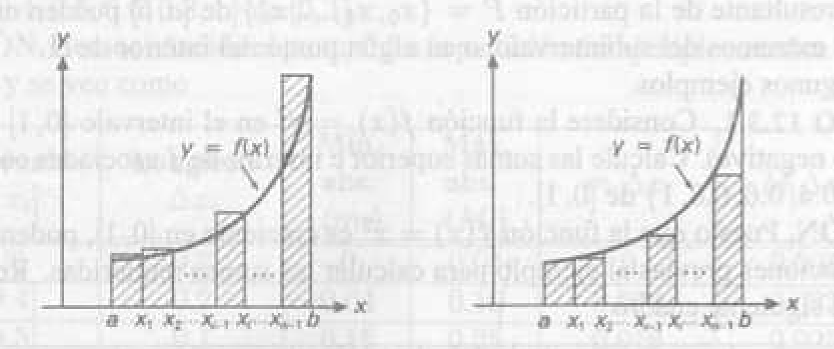


Figura 12.3.4. Las sumas superior e inferior de una función continua, no negativa y creciente f en el intervalo $[a, b]$ asociadas con la partición P.

Un razonamiento análogo nos conduce a la conclusión de que si la función $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ es (continua, no negativa y) decreciente, entonces las sumas superior e inferior de f asociadas con la partición $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de $[a, b]$ toman la forma:

$$U_f(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \Delta x_i$$

y

$$L_f(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x_i.$$

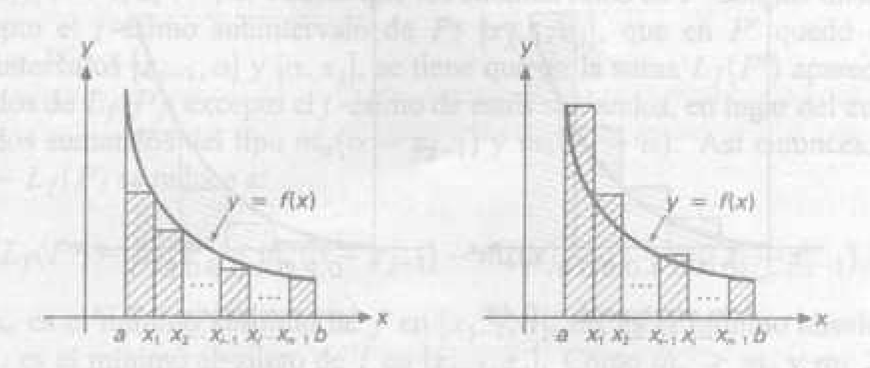


Figura 12.3.5. Las sumas superior e inferior de una función continua, no negativa y decreciente f en el intervalo $[a, b]$ asociadas con la partición P.

Debemos aclarar, sin embargo, que en el caso general (aceptando que la función f tenga alguno o algunos extremos locales en $[a, b]$), los extremos absolutos de la función en cada subintervalo resultante de la partición $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de $[a, b]$ pueden encontrarse en alguno de los extremos del subintervalo, o en algún punto del interior de él.

Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 12.3.1. Considere la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 1]$ (en donde es continua y no negativa). Calcule las sumas superior e inferior de f asociadas con la partición $P = \{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$ de $[0, 1]$.

SOLUCIÓN. Puesto que la función $f(x) = x^2$ es creciente en $[0, 1]$, podemos hacer uso de las observaciones previas al ejemplo para calcular las sumas requeridas. Resumimos los cálculos en el siguiente cuadro:

Subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$	**Longitud** Δx_i	**Mín. abs.** (m_i)	**Máx. abs.** (M_i)	$m_i \Delta x_i$	$M_i \Delta x_i$
$[0, 0.2]$	0.2	0	0.04	0	0.008
$[0.2, 0.4]$	0.2	0.04	0.16	0.008	0.032
$[0.4, 0.6]$	0.2	0.16	0.36	0.032	0.072
$[0.6, 0.8]$	0.2	0.36	0.64	0.072	0.128
$[0.8, 1]$	0.2	0.64	1	0.128	0.2
				$\downarrow +$	$\downarrow +$
				$L_f(P) =$ 0.24	$U_f(P) =$ 0.44

(Observe que en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ el mínimo absoluto es $f(x_{i-1})$ y el máximo absoluto es $f(x_i)$, pues la función considerada es creciente en el intervalo $[0, 1]$.) Como decíamos anteriormente, independientemente de lo que vayamos a definir como área bajo la parábola $y = x^2$ entre $x = 0$ y $x = 1$, ésta no puede ser menor que 0.24 ni mayor que 0.44.

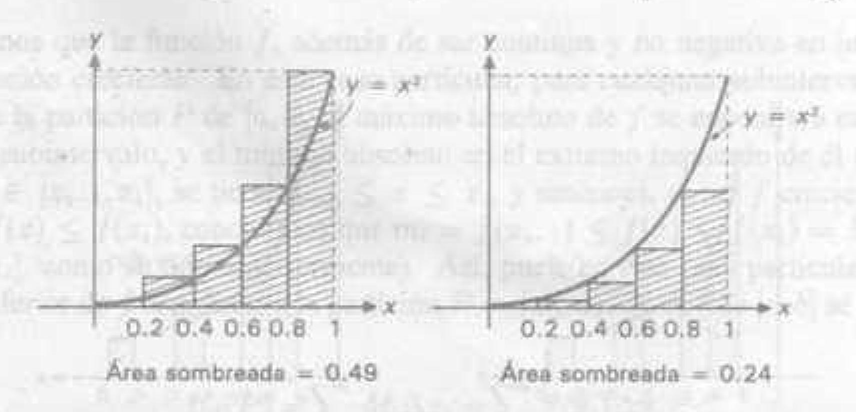


Figura 12.3.6. Las sumas superior e inferior de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 1]$ asociadas con la partición $P = \{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$.

★

EJEMPLO 12.3.2. Considere nuevamente la función del ejemplo anterior $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 1]$. Calcule las sumas superior e inferior de f asociadas con la partición $P = \{0, 0.2, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8, 1\}$ de $[0, 1]$.

SOLUCIÓN. Hemos añadido el punto 0.5 a la partición del ejemplo anterior. Los cálculos son similares y se ven como

Subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$	**Longitud** Δx_i	**Mín. abs.** (m_i)	**Máx. abs.** (M_i)	$m_i \Delta x_i$	$M_i \Delta x_i$
$[0, 0.2]$	0.2	0	0.04	0	0.008
$[0.2, 0.4]$	0.2	0.04	0.16	0.008	0.032
$[0.4, 0.5]$	0.1	0.16	0.25	0.016	0.025
$[0.5, 0.6]$	0.1	0.25	0.36	0.025	0.036
$[0.6, 0.8]$	0.2	0.36	0.64	0.072	0.128
$[0.8, 1]$	0.2	0.64	1	0.128	0.2
				$\downarrow +$	$\downarrow +$
				$L_f(P) =$ 0.249	$U_f(P) =$ 0.429

★

Queremos llamar la atención al fenómeno presentado en el ejemplo anterior: observe que al considerar una nueva partición P' del intervalo $[0, 1]$, que proviene de la partición P del ejemplo 12.3.1, agregando en ésta un nuevo punto, la suma inferior aumentó de valor, mientras que la suma superior disminuyó. Esto es un hecho general que explicamos a continuación. Supongamos que la partición P' del intervalo $[a, b]$, se obtiene agregando un punto α a una partición dada $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de tal intervalo, y supongamos que el nuevo punto se encuentra en el j-ésimo subintervalo $[x_{j-1}, x_j]$. Es decir, supongamos que $x_{j-1} < \alpha < x_j$. Veamos el comportamiento que tienen las sumas inferiores de la función f asociadas con estas dos particiones P y P' de $[a, b]$. La suma inferior $L_f(P)$ tiene n sumandos del tipo $m_i(x_i - x_{i-1})$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Puesto que los subintervalos de P' son los mismos que los de P, excepto el j-ésimo subintervalo de P, $[x_{j-1}, x_j]$, que en P' quedó dividido en los dos subintervalos $[x_{j-1}, \alpha]$ y $[\alpha, x_j]$, se tiene que en la suma $L_f(P')$ aparecen los mismos sumandos de $L_f(P)$, excepto el j-ésimo de estos sumandos, en lugar del cual aparecen en $L_f(P')$ dos sumandos del tipo $m_a(\alpha - x_{j-1})$ y $m_b(x_j - \alpha)$. Así entonces, la diferencia $L_f(P') - L_f(P)$ se reduce a:

$$L_f(P') - L_f(P) = m_a(\alpha - x_{j-1}) - m_b(x_j - \alpha) - m_j(x_j - x_{j-1}),$$

en donde m_a es el mínimo absoluto de f en $[x_{j-1}, \alpha]$, m_b es el mínimo absoluto de f en $[\alpha, x_j]$, y m_j es el mínimo absoluto de f en $[x_{j-1}, x_j]$. Como $m_a \geq m_j$ y $m_b \geq m_j$ (pues m_j es el mínimo absoluto de f en *todo* el intervalo $[x_{j-1}, x_j]$, del cual $[x_{j-1}, \alpha]$ y $[\alpha, x_j]$ son subintervalos), se tiene que:

$$m_a(\alpha - x_{j-1}) + m_b(x_j - \alpha) - m_j(x_j - x_{j-1}) \geq m_j(\alpha - x_{j-1} + x_j - \alpha - x_j + x_{j-1}) = 0.$$

Es decir que $L_f(P') - L_f(P) \geq 0$, o bien que $L_f(P') \geq L_f(P)$, lo que muestra que la suma inferior de f asociada con la partición P' es no menor que la suma inferior de f asociada a la partición $P \subset P'$.

Esquemáticamente se tiene:

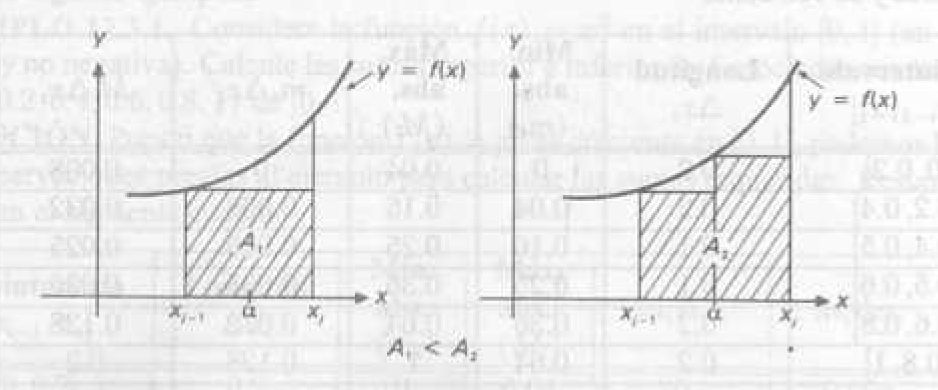


Figura 12.3.7. La suma inferior de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ aumenta de valor al aumentar los puntos de la partición.

Un argumento similar muestra que $U_f(P') \leq U_f(P)$.

Retomemos el caso expuesto en los ejemplos 12.3.1 y 12.3.2. Comenzando con la partición $P = \{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$ de $[0, 1]$, obtuvimos las sumas superior e inferior de $f(x) = x^2$ como $U_f(P) = 0.44$ y $L_f(P) = 0.24$. Si aumentamos un punto a la partición P, por ejemplo como lo hicimos en el ejemplo 12.3.2, la suma superior disminuye y la inferior aumenta: de hecho, si P' es la partición del ejemplo 12.3.2, se tiene $U_f(P') = 0.429 \leq 0.44 = U_f(P)$ y $L_f(P') = 0.249 \geq 0.24 = L_f(P)$. Pensemos en que seguimos aumentando puntos a la partición, obteniendo así nuevas particiones $P', P^{(2)}, P^{(3)}, ..., P^{(n)}$ tales que:

$$P \subset P' \subset P^{(2)} \subset \ldots \subset P^{(n)} \subset \ldots$$

Según lo que hemos discutido anteriormente, el efecto en las sumas superiores será el de ir disminuyendo, y el de las inferiores el de ir aumentando. Se tendrá entonces:

$$L_f(P) \leq L_f(P') \leq \ldots \leq L_f(P^{(n)}) \leq \ldots \leq U_f(P^{(n)}) \leq \ldots \leq U_f(P') \leq U_f(P).$$

Por ejemplo, con los resultados de los ejemplos 12.3.1 y 12.3.2, hemos visto que:

$$L_f(P) = \underbrace{0.24 \leq 0.249 \leq}_{\text{va aumentando} \longrightarrow} \ldots \ldots \underbrace{\leq 0.429 \leq 0.44}_{\longleftarrow \text{ va disminuyendo}} = U_f(P).$$

Pensemos que el proceso de ir agregando puntos a las particiones lo hacemos infinito, de tal modo que los puntos de estas particiones vayan cubriendo sin dejar huecos al intervalo $[0, 1]$. Los números anteriores nos sugieren que *lo que comenzó por abajo en 0.24, y va aumentando, y por arriba en 0.44, y va disminuyendo, puede llegar a encontrarse en algún*

punto intermedio. Esto es efectivamente cierto, y ese número es lo que definiremos como área bajo una curva en la siguiente sección.

EJERCICIOS (12.3)

En los ejercicios 1 al 10, calcule las sumas superior $U_f(P)$ e inferior $L_f(P)$ de la función $f(x)$ respecto de una partición P del intervalo $[a,b]$ en n subintervalos de la misma longitud.

1. $f(x) = x$ en $[1,2]$, $n = 5$.

2. $f(x) = x$ en $[1,2]$, $n = 10$.

3. $f(x) = x$ en $[1,2]$, $n = 20$.

4. $f(x) = 2x^2$ en $[0,1]$, $n = 5$.

5. $f(x) = 2x^2$ en $[0,1]$, $n = 10$.

6. $f(x) = x^2 + 2$ en $[0,1]$, $n = 5$.

7. $f(x) = x^2 + 2$ en $[0,1]$, $n = 10$.

8. $f(x) = x^3$ en $[0,1]$, $n = 5$.

9. $f(x) = x^3$ en $[0,1]$, $n = 10$.

10. $f(x) = -x^3$ en $[0,1]$, $n = 10$.

11. Considere el trapecio con vértices en los puntos $A = (1,0)$, $B = (2,0)$, $C = (2,2)$, $D = (1,1)$. Calcule su área. Interprete su resultado con base en los resultados de los ejercicios 1, 2 y 3.

12.4 ÁREA BAJO UNA CURVA

Sea $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ una función continua y no negativa. Hemos visto que si P es una partición cualquiera de $[a,b]$, entonces la suma inferior no excede la suma superior de f asociada con esta partición. Es decir que $L_f(P) \leq U_f(P)$, para cualquier partición P de $[a,b]$. Pensemos, por ejemplo, en una partición P que divide al intervalo $[a,b]$ en n subintervalos. A medida que n crece, las sumas inferiores $L_f(P)$ irán aumentando de valor, mientras que las sumas superiores $U_f(P)$ lo irán disminuyendo, lo que geométricamente nos sugiere que la aproximación que hacen los rectángulos por defecto (en la suma inferior) es cada vez mejor (se va acercando por debajo al valor del área bajo la curva), al igual que los rectángulos por exceso van haciendo cada vez mejor la aproximación al valor de tal área (se van acercando por arriba al área bajo la curva). Este fenómeno se muestra esquemáticamente en la figura 12.4.1, en donde consideramos la función $f(x) = -x^2 + 8x + 1$ en el intervalo $[0,4]$, calculándose las sumas superiores e inferiores para particiones del intervalo en 15, 30 y 70 subintervalos. El valor exacto del área es $\frac{140}{3}$.

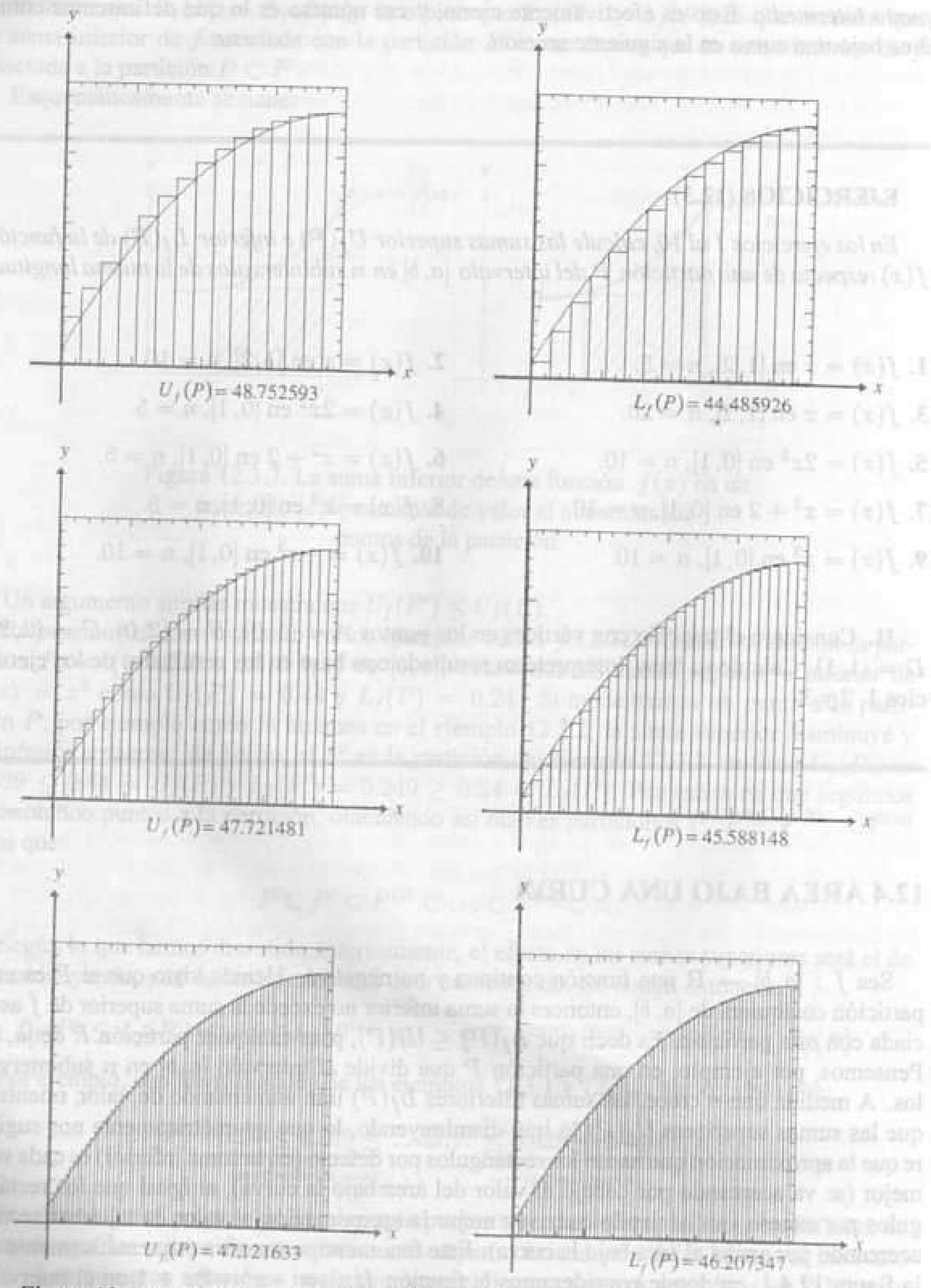


Figura 12.4.1. Las sumas superiores $U_f(P)$ y las sumas inferiores $L_f(P)$ tienden al área bajo la curva.

En el siguiente teorema se establece un resultado importante que es un caso particular (cuando los subintervalos que produce la partición P del intervalo $[a, b]$ son todos del mismo tamaño), en el que nos apoyaremos en los ejemplos que analizaremos en esta sección.

TEOREMA 12.4.1. *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función continua y no negativa. Sea* $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ *la partición de* $[a, b]$ *en la cual* $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$, $i = 0, 1, 2, ..., n$ *(de tal modo que todos los subintervalos de la partición tienen el mismo tamaño* $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$*). Si* $U_f(P)$ *y* $L_f(P)$ *son las sumas superior e inferior de la función* f *asociada con la partición* P, *entonces:*

$$\lim_{n \to \infty} U_f(P) = \lim_{n \to \infty} L_f(P).$$

La siguiente definición nos da la manera precisa de entender el concepto de área bajo una curva en un intervalo.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función continua y no negativa. El área bajo la gráfica de la función* $y = f(x)$ *en el intervalo* $[a, b]$ *es el único número* A *tal que:*

$$L_f(P) \leq A \leq U_f(P)$$

para todas las particiones P *del intervalo* $[a, b]$.

Es decir, el área bajo la curva $y = f(x)$ en $[a, b]$ es un número que es mayor que todas las sumas inferiores de f en $[a, b]$, y menor que todas las sumas superiores de f en $[a, b]$. Esta definición, si bien es precisa y tiene todo lo que el rigor matemático que una definición exige, resulta poco práctica para calcular áreas bajo las curvas. Sin embargo, el teorema 12.4.1 nos da luz sobre cómo podemos calcular el número A de la definición anterior: si tomamos una partición P del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos del mismo tamaño, y calculamos el límite cuando n tiende a infinito de las sumas superior o inferior de la función asociadas con esta partición, el valor del límite será el área bajo la curva que estamos procurando. Ésta es la manera como procederemos en los dos ejemplos siguientes, en los cuales, aunque el teorema 12.4.1 nos dice que podemos trabajar con la suma superior o la inferior para calcular el límite mencionado anteriormente, nosotros lo haremos con ambas sumas (teniendo entonces un valor común del límite, tal como lo establece el teorema 12.4.1), con el propósito de verificar las propiedades que de estas sumas hemos estudiado en la sección anterior.

EJEMPLO 12.4.1. Considere la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 1]$. Sea P una partición de este intervalo en n subintervalos del mismo tamaño. Determine las sumas $L_f(P)$ y $U_f(P)$. Con base en estos resultados, calcule el área bajo la parábola $y = x^2$ en el intervalo $[0, 1]$.

SOLUCIÓN. Puesto que los subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ que son generados por la partición $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ deben ser del mismo tamaño (igual a $\frac{1}{n}$), todos los puntos x_i de la

partición deben ser equidistantes. Éstos deben ser entonces $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, 1, ..., n$. Usando el hecho de que $f(x) = x^2$ es creciente en $[0, 1]$, vemos que las sumas superior e inferior son:

$$L_f(P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^2\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2$$

y

$$U_f(P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2.$$

Usando la fórmula $S_2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ vista en la sección 2, tenemos que:

$$L_f(P) = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 = \frac{1}{n^3}\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2};$$

y

$$U_f(P) = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.$$

Observe que para cualquier $n \in \mathbf{N}$ se tiene:

$$L_f(P) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} = U_f(P),$$

(como debía ocurrir). Más aún, a medida que n crece, los términos $\frac{1}{2n}$ y $\frac{1}{6n^2}$ se hacen cada vez más pequeños (en términos de límites diríamos que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{6n^2} = 0$), de modo que el comportamiento de $L_f(P)$ es aproximarse (cuando n crece) al valor $\frac{1}{3}$, al igual que $U_f(P)$. Entonces, el único número A que puede encontrarse entre $L_f(P)$ y $U_f(P)$ *para todas las particiones* P *de* $[0, 1]$ (entre las cuales están las que hemos considerado en este ejemplo), es $A = \frac{1}{3}$. Éste es el valor del área bajo la parábola $y = x^2$ entre $x = 0$ y $x = 1$.

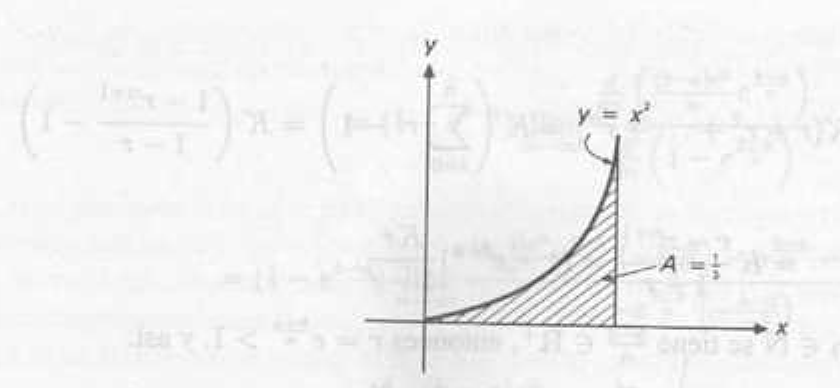


Figura 12.4.2. El área bajo la parábola $y = x^2$ entre $x = 0$ y $x = 1$.

★

EJEMPLO 12.4.2. Considere la función exponencial $f(x) = e^x$ en el intervalo $[a, b]$. Sea P una partición de este intervalo en n subintervalos del mismo tamaño. Determine las sumas $L_f(P)$ y $U_f(P)$. Con base en estos resultados, calcule el área bajo la gráfica de la función $y = e^x$ en el intervalo $[a, b]$.

SOLUCIÓN. La longitud de cada uno de los subintervalos de $[a, b]$ generados por la partición $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ debe ser $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$. De hecho, los puntos x_i de P son $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$, $i = 0, 1, ..., n$. Puesto que la función $f(x) = e^x$ es siempre creciente, tenemos:

$$L_f(P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \left(\frac{2}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(e^{a+(i-1)\frac{b-a}{n}}\right) \left(\frac{b-a}{n}\right) = \frac{(b-a)e^a}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(e^{\frac{b-a}{n}}\right)^{(i-1)}$$

y

$$U_f(P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \left(\frac{b-a}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(e^{a+i\frac{b-a}{n}}\right) \left(\frac{b-a}{n}\right) = \frac{(b-a)e^a}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(e^{\frac{b-a}{n}}\right)^{i}.$$

Las sumas que aparecen en las expresiones anteriores, son sumas de tipo geométrico, con razón $r = e^{\frac{b-a}{n}}$. Usando la fórmula $S = \sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ vista en la sección 2, y llamando (por simplificar la notación) $K = \frac{(b-a)e^a}{n}$ y $r = e^{\frac{b-a}{n}}$, tenemos que:

$$L_f(P) = K \sum_{i=1}^{n} r^{i-1} = K\left(1 + r + \ldots + r^{n-1}\right)$$

$$= K \sum_{i=0}^{n-1} r^i = K\frac{1-r^n}{1-r} = \left(1 - e^{b-a}\right)\frac{K}{1-r}$$

y

$$U_f(P) = K\sum_{i=1}^{n} r^i = K(r + r^2 + \ldots + r^n) = K\left(\sum_{i=0}^{n} r^i - 1\right) = K\left(\frac{1-r^{n+1}}{1-r} - 1\right)$$

$$= K\frac{r - r^{n+1}}{1-r} = (1-e^{b-a})\frac{Kr}{1-r}.$$

Puesto que para todo $n \in \mathbf{N}$ se tiene $\frac{b-a}{n} \in \mathbf{R}^+$, entonces $r = e^{\frac{b-a}{n}} > 1$, y así:

$$L_f(P) = (1-e^{b-a})\,\frac{K}{1-r} < (1-e^{b-a})\frac{Kr}{1-r} = U_f(P)$$

como debía ocurrir. Para determinar el área bajo la gráfica de $y = e^x$ en el intervalo $[a, b]$, debemos procurar un número A tal que $L_f(P) \leq A \leq U_f(P)$ para cualquier partición P de $[a, b]$ (en particular, para las particiones que estamos considerando). Esto lo podemos lograr estudiando los límites cuando n tiende a infinito de $L_f(P)$ y de $U_f(P)$ (el valor común del límite es el área que procuramos). Observe que $\lim\limits_{n\to\infty} K = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(b-a)e^a}{n} = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} r = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{b-a}{n}} = e^0 = 1$, de modo que el límite:

$$\lim_{n\to\infty} L_f(P) = \lim_{n\to\infty}\,(1-e^{b-a})\frac{K}{1-r} = (1-e^{b-a})\,\lim_{n\to\infty}\frac{K}{1-r}$$

produce una forma indeterminada $\frac{0}{0}$. A pesar de que la variable n toma solamente valores enteros positivos, podemos usar la regla de L'Hôpital para evaluar este límite, derivando numerador y denominador (que son funciones de n), respecto de n. Se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} L_f(P) = (1-e^{b-a})\,\lim_{n\to\infty}\frac{K}{1-r} = (1-e^{b-a})\,\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{d}{dn}K}{\frac{d}{dn}(1-r)}$$

$$= (1-e^{b-a})\,\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{d}{dn}\left(\frac{(b-a)e^a}{n}\right)}{\frac{d}{dn}\left(1-e^{\frac{b-a}{n}}\right)}$$

$$= (1-e^{b-a})\,\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{(b-a)e^a}{n^2}}{-e^{\frac{b-a}{n}}\left(-\frac{b-a}{n^2}\right)}$$

$$= (1-e^{b-a})\,\lim_{n\to\infty}\frac{-e^a}{e^{\frac{b-a}{n}}} = (1-e^{b-a})(-e^a) = e^b - e^a.$$

De manera análoga, los cálculos con las sumas superiores $U_f(P)$ se ven como:

$$\lim_{n\to\infty} U_f(P) = (1-e^{b-a})\,\lim_{n\to\infty}\frac{Kr}{1-r} = (1-e^{b-a})\,\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{d}{dn}(Kr)}{\frac{d}{dn}(1-r)}$$

$$= (1 - e^{b-a}) \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{d}{dn}\left(\frac{(b-a)e^a}{n} e^{\frac{b-a}{n}}\right)}{\frac{d}{dn}\left(1 - e^{\frac{b-a}{n}}\right)}$$

$$= (1 - e^{b-a}) \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(b-a)e^a}{n} e^{\frac{b-a}{n}}\left(-\frac{b-a}{n^2}\right) - e^{\frac{b-a}{n}} \frac{(b-a)e^a}{n^2}}{-e^{\frac{b-a}{n}}\left(-\frac{b-a}{n^2}\right)}$$

$$= (1 - e^{b-a}) \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{(b-a)e^a}{n} - e^a\right) = (1 - e^{b-a})(-e^a) = e^b - e^a.$$

Así pues, como el número A que buscamos debe ser tal que $L_f(P) \leq A \leq U_f(P)$ para toda partición P, tomando el límite cuando $n \to \infty$ en las particiones que hemos considerado en este ejemplo, hemos visto que tanto $L_f(P)$ como $U_f(P)$ tienden a $e^b - e^a$ (tal como el teorema 12.4.1 aseguraba que ocurriría), de modo que el número procurado A debe ser justamente $e^b - e^a$. Es decir, concluimos que el área bajo la gráfica de la función $f(x) = e^x$ entre $x = a$ y $x = b$ es de $A = e^b - e^a$ (unidades cuadradas).

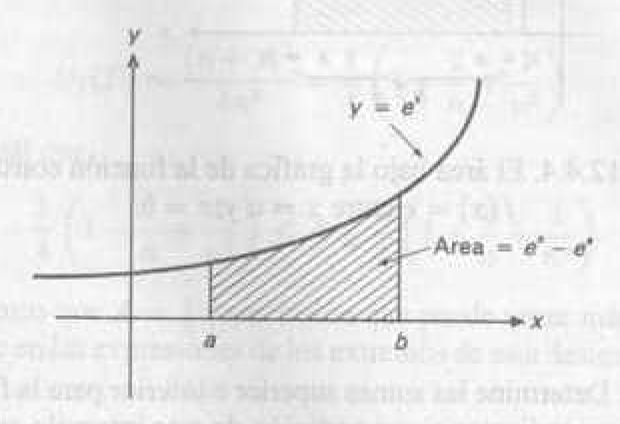


Figura 12.4.3. El área bajo la gráfica de la función $f(x) = e^x$ en el intervalo $[a, b]$.

EJEMPLO 12.4.3. Calcule las sumas inferior y superior $L_f(P)$ y $U_f(P)$ para una función constante $f(x) = c$ (en donde $c \geq 0$), en el intervalo $[a, b]$, respecto de cualquier partición P de tal intervalo. Con base en estos resultados, calcule el área bajo la gráfica de una función constante $f(x) = c$ (en donde $c \geq 0$), en el intervalo $[a, b]$.

SOLUCIÓN. Sea $[x_{i-1}, x_i]$, el i-ésimo subintervalo de la partición P. Tanto el máximo como el mínimo absolutos de f en este subintervalo (¡en cualquiera!) es $M = m = c$, pues la función es constante. Entonces:

$$L_f(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i = c \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c(b - a)$$

y

$$U_f(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i = c\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c(b-a).$$

Es decir, la suma inferior y superior de la función constante $f(x) = c$, en el intervalo $[a, b]$, asociadas con cualquier partición P de este intervalo, es igual a $c(b-a)$. Puesto que el área A procurada debe ser tal que $L_f(P) \leq A \leq U_f(P)$, para cualquier partición del intervalo $[a, b]$, y, hemos obtenido que $L_f(P) = U_f(P) = c(b-a)$, debe tenerse necesariamente $A = c(b-a)$. Éste es el resultado esperado, puesto que el área que se está calculando es la de un rectángulo de base $b-a$ y altura c.

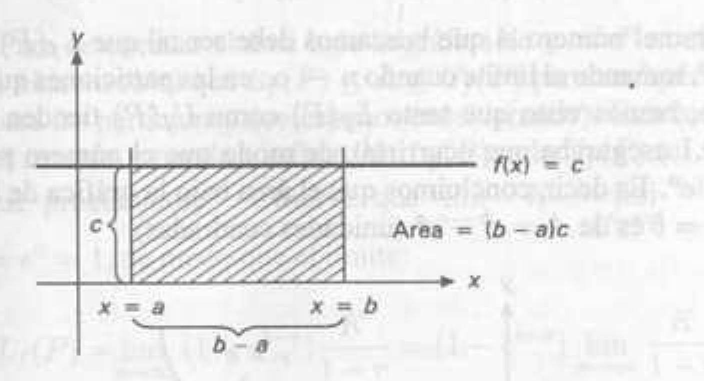


Figura 12.4.4. El área bajo la gráfica de la función constante $f(x) = c$ entre $x = a$ y $x = b$.

★

EJEMPLO 12.4.4. Determine las sumas superior e inferior para la función $f(x) = x^3$ en el intervalo $[0, 1]$, correspondientes a una partición de este intervalo en n subintervalos del mismo tamaño. Con base en estos resultados, determine el área bajo la gráfica de la función $f(x) = x^3$ en el intervalo $[0, 1]$.

SOLUCIÓN. La partición $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ debe ser tal que $x_i = \frac{i}{n}$, de modo que el tamaño de cada uno de los n subintervalos producidos por esta partición es $x_i - x_{i-1} = \frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n}$. Puesto que $f(x) = x^3$ es una función creciente en $[0, 1]$, tenemos: (los cálculos son similares a los del ejemplo 12.4.1)

$$L_f(P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n}\right)^3 \left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^3,$$

y

$$U_f(P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^3 \left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3.$$

Usando la fórmula $S_3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ vista en la sección 2, las expresiones anteriores se ven como:

$$L_f(P) = \frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^3 = \frac{1}{n^4}(1^3 + 2^3 + \ldots + (n-1)^3)$$

$$= \frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n-1} i^3 = \frac{1}{n^4}\frac{(n-1)^2n^2}{4} = \frac{(n-1)^2}{4n^2},$$

y

$$U_f(P) = \frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{n^4}\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)^2}{4n^2}.$$

El área A procurada debe ser tal que $L_f(P) \leq A \leq U_f(P)$ para cualquier partición P del intervalo $[0,1]$. Hemos obtenido que:

$$L_f(P) = \frac{(n-1)^2}{4n^2} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right),$$

y

$$U_f(P) = \frac{(n+1)^2}{4n^2} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right).$$

Como A debe ser tal que:

$$\frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \leq A \leq \frac{1}{4}\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

para toda $n \in \mathbf{N}$, vemos que $A = \frac{1}{4}$ (conclusión que puede verse más claramente tomando límite cuando $n \to \infty$ en las expresiones de los extremos de esta desigualdad: ambos tienden a $\frac{1}{4}$).

★

EJERCICIOS (12.4)

1. Considere la función $f(x) = x$ en el intervalo $[a,b]$, con $0 < a < b$. Sea P una partición de este intervalo en n subintervalos iguales. Determine $L_f(P)$ y $U_f(P)$. A partir de estos resultados, calcule el área bajo la gráfica de esta función en el intervalo $[a,b]$.

2. Sea k una constante positiva. Considere la función $f(x) = kx$ en el intervalo $[a,b]$, con $0 < a < b$. Sea P una partición de este intervalo en n subintervalos iguales. Determine $L_f(P)$ y $U_f(P)$. A partir de estos resultados, calcule el área bajo la gráfica de esta función en el intervalo $[a,b]$. Verifique que esta área es igual a k veces el área bajo $f(x) = x$ en $[a,b]$.

3. Sea k una constante positiva. Considere la función $f(x) = x + k$ en el intervalo $[a, b]$, con $0 < a < b$. Sea P una partición de este intervalo en n subintervalos iguales. Determine $L_f(P)$ y $U_f(P)$. A partir de estos resultados, calcule el área bajo la gráfica de esta función en el intervalo $[a, b]$. Verifique que esta área es igual al área bajo $f(x) = x$ en $[a, b]$, sumada a $k(b - a)$.

4. Considere la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[a, b]$. Sea P una partición de este intervalo en n subintervalos iguales. Determine $L_f(P)$ y $U_f(P)$. A partir de estos resultados, calcule el área bajo la gráfica de esta función en el intervalo $[a, b]$.

5. Sea k una constante positiva. Considere la función $f(x) = kx^2$ en el intervalo $[a, b]$. Sea P una partición de este intervalo en n subintervalos iguales. Determine $L_f(P)$ y $U_f(P)$. A partir de estos resultados, calcule el área bajo la gráfica de esta función en el intervalo $[a, b]$. Verifique que esta área es igual a k veces el área bajo $f(x) = x^2$ en $[a, b]$.

6. Sea k una constante positiva. Considere la función $f(x) = x^2 + k$ en el intervalo $[a, b]$, con $0 < a < b$. Sea P una partición de este intervalo en n subintervalos iguales. Determine $L_f(P)$ y $U_f(P)$. A partir de estos resultados, calcule el área bajo la gráfica de esta función en el intervalo $[a, b]$. Verifique que esta área es igual al área bajo $f(x) = x^2$ en $[a, b]$, sumada a $k(b - a)$.

7. Con base en consideraciones geométricas (usando el resultado del ejemplo 12.4.1), determine el área bajo la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$ entre $x = 0$ y $x = 1$.

8. Con base en consideraciones geométricas, determine el área de la región comprendida entre las parábolas $y = x^2$ y $y^2 = x$. (Sugerencia: Identifique primeramente la región y use el resultado del ejercicio anterior.)

9. Considere la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ en el intervalo $[-1, 1]$. Sea P una partición de este intervalo en n subintervalos de la misma longitud, y sean $L_f(P)$ y $U_f(P)$ las sumas inferior y superior de f respecto de la partición P. ¿Cuánto deben valer los límites $\lim_{n\to\infty} L_f(P)$ y $\lim_{n\to\infty} U_f(P)$? (Sugerencia: No intente hacer explícitas las sumas $L_f(P)$ y $U_f(P)$ para luego tomar el límite correspondiente. Solamente piense en términos geométricos: ¿cuánto debe valer el área bajo la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ en el intervalo $[-1, 1]$?)

10. (EN UN TONO MENOS SERIO: EL PROBLEMA DEL PINTOR MATEMÁTICO.) No hablaremos de Leonardo Da Vinci, quien fue uno de los grandes genios de la pintura (cuya "Mona Lisa" sigue siendo admirada cada año por miles de personas de todo el mundo en el museo de Louvre, en París), y tenía también, entre muchas otras cualidades, ideas matemáticas que bien pueden calificarse de geniales. Hablaremos aquí de don Pancho, un pintor de brocha gorda que, dicen por ahí, para las matemáticas no hay quien se le ponga: todos sus compadres llevan a sus hijos de secundaria y preparatoria a recibir asesorías de don Pancho, a quien sobre todo el cálculo diferencial e integral que estudian los muchachos en preparatoria, le causa una fascinación especial. Relataremos aquí una de las anécdotas más sonadas de don Pancho, ocurrida hace un par de años. Cuando una importante constructora se enteró de que don Pancho era muy bueno en su oficio, lo contrató para que pintara una gran pared cuya parte superior era de forma parabólica, como se muestra en la figura.

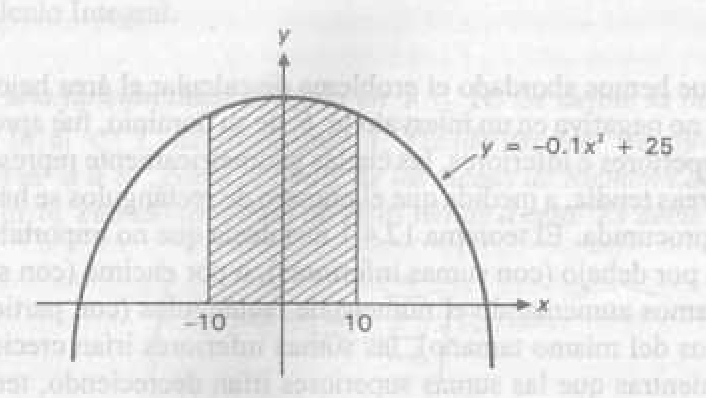


Figura 12.4.5. La pared que debía pintar don Pancho.

Colocando el eje de las ordenadas sobre el eje de simetría de la parábola, y el eje de las abscisas en la parte inferior de la pared, don Pancho no tuvo problema alguno en descubrir que la parábola con la que se remataba en la parte superior era $y = -0.1x^2 + 25$, con las unidades medidas en metros. Así, la región del plano (en el que estaba la pared) que debía cubrirse de pintura estaba limitada por el eje x, las rectas $x = \pm 10$, y la parábola $y = -0.1x^2 + 25$. Don Pancho ideó un ingenioso sistema para cobrar su trabajo, usando sus conocimientos del Cálculo Integral. Tomaría la partición $P = \{-10, -9, ..., -1, 0, 1, ..., 9, 10\}$ del intervalo $[-10, 10]$ y calcularía la suma superior de la función $f(x) = -0.1x^2 + 25$ asociada a la partición P. Ése sería el número de metros cuadrados que cobraría. En el contrato se estipulaba que por cada día de retraso por parte de la compañía en el pago de su trabajo, él recalcularía la suma superior de la función con una partición que sería, en el primer día de retraso, la partición P menos el 0, en el segundo la partición P menos el 0 y el 1, en el tercer día la partición P menos el 0, el 1, y el -1, etcétera.

Observe que para calcular la suma superior de la función $f(x) = -0.1x^2 + 25$ en el intervalo $[-10, 10]$, es suficiente hacer el cálculo de tal suma en el intervalo $[0, 10]$ y multiplicar el resultado por dos. Verifique que la cantidad A de metros cuadrados que cobrará don Pancho a la constructora se puede calcular con la fórmula:

$$A = 2\sum_{i=0}^{9} f(i)$$

en donde $f(x) = -0.1x^2 + 25$. En algún capítulo posterior usted podrá calcular que el área exacta de la pared es de $\dfrac{1300}{3} \approx 433.33$ metros cuadrados. ¿Cuántos metros cuadrados de más está cobrando don Pancho a la constructora? Suponiendo que la constructora le paga con 3 días de retraso, ¿cuántos metros cuadrados de superficie pintada deberá cobrar don Pancho?

12.5 DEFINICIÓN DE INTEGRAL DEFINIDA

La manera en que hemos abordado el problema de calcular el área bajo la gráfica de una función continua y no negativa en un intervalo $[a, b]$ de su dominio, fue aproximándonos a tal valor con sumas superiores e inferiores, las cuales geométricamente representaban rectángulos cuya suma de áreas tendía, a medida que el número de rectángulos se hacía más grande, al área bajo la curva procurada. El teorema 12.4.1 nos decía que no importaba cómo nos aproximáramos, ya sea por debajo (con sumas inferiores), o por encima (con sumas superiores), a medida que fuéramos aumentando el número de rectángulos (con particiones que produjeran subrectángulos del mismo tamaño), las sumas inferiores irían creciendo, tendiendo a un cierto límite, mientras que las sumas superiores irían decreciendo, tendiendo al mismo límite de las sumas inferiores. El valor común de este límite fue lo que definimos como el área bajo la curva.

Vamos a establecer el concepto de integral definida, siguiendo un proceso similar con el que resolvimos el problema de calcular el área bajo una curva, pero de un modo más general:

1) no consideraremos funciones continuas y no negativas en el intervalo $[a, b]$,

2) no consideremos particiones del intervalo $[a, b]$ en subrectángulos del mismo tamaño (como en el teorema 12.4.1).

Tomemos una partición P arbitraria del intervalo $[a, b]$, digamos

$$P = \{a, x_1, ..., x_{n-1}, b\}.$$

Llamaremos **norma de la partición** P, que denotaremos por $\|P\|$, a la longitud máxima de los subintervalos en que queda dividido el intervalo $[a, b]$ con la partición P. Es decir:

$$\|P\| = \max\{\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ i = 1, 2, ..., n\}.$$

Por ejemplo, la partición $P = \{1, 1.8, 2.3, 2.9, 3.5, 4\}$ del intervalo $[1, 4]$, divide a éste en 5 subintervalos cuyas longitudes son $\Delta x_1 = 1.8 - 1 = 0.8$, $\Delta x_2 = 2.3 - 1.8 = 0.5$, $\Delta x_3 = 2.9 - 2.3 = 0.6$, $\Delta x_4 = 3.5 - 2.9 = 0.5$ y $\Delta x_5 = 4 - 3.5 = 0.5$, de modo que la norma de la partición es $\|P\| = \max\{\Delta x_i, i = 1, 2, ..., 5\} = \max\{0.8, 0.5, 0.6, 0.5, 0.5\} = 0.8$.

En cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de la partición P de $[a, b]$, tome un punto arbitrario $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ y forme el producto $f(\xi_i)\Delta x_i$. Este producto puede interpretarse como el área de un rectángulo de base Δx_i y altura $f(\xi_i)$. Consideremos la suma de todos estos productos. Observe que esta suma depende de la partición P y de la elección que hayamos hecho en cada subintervalo del punto ξ_i. Enfatizamos este hecho escribiendo $S(P)$ para indicar el valor de la suma mencionada. Es decir, se tiene:

$$S(P) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Esta suma es llamada **suma de Riemann** de la función f asociada con la partición P del intervalo $[a, b]$. Si consideramos particiones P de $[a, b]$ cada vez con más subintervalos (haciendo que $n \to \infty$), o, equivalentemente, particiones P cuya norma sea cada vez más pequeña, y nos fijamos en el comportamiento de las sumas de Riemann $S(P)$, es posible que éstas tengan algún límite determinado. Cuando así ocurre, al valor del límite lo llamaremos

integral definida de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$. Damos, pues, la definición más importante del Cálculo Integral.

Sea $y = f(x)$ *una función dada definida en* $I \subseteq \mathbb{R}$. *Se define la integral definida de* f *en el intervalo* $[a, b] \subset I$, *denotada por* $\int_a^b f(x)dx$ *(se lee: la integral —definida— de la función* $f(x)$ *de* a *a* b*), como el límite de las sumas de Riemann de* f *asociadas con particiones* P *de* $[a, b]$, *cuando la norma de éstas tiende a cero. Es decir,*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

En el caso de que tal límite exista, se dice que la función f *es integrable según Riemann (o bien, que es Riemann-integrable, o bien, simplemente que es integrable) en el intervalo* $[a, b]$.

El criterio de existencia del límite anterior es el siguiente: el límite $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ existe y vale $\int_a^b f(x)dx$, si podemos tener sumas de Riemann $S(P) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ tan cerca de $\int_a^b f(x)dx$ como nosotros queramos, tomando a las particiones P de $[a, b]$ (respecto de las cuales están calculadas las sumas $S(P)$) cada vez más finas (con subintervalos más delgados). Más precisamente, el límite $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ existe y vale $\int_a^b f(x)dx$, si dado cualquier número $\varepsilon > 0$ (por pequeño que éste sea) existe un número $\delta > 0$ (el cual, en general dependerá del ε dado), con la propiedad de que para cualquier partición P cuya norma sea menor que δ se tiene que $S(P) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ dista de $\int_a^b f(x)dx$ en menos que ε, independientemente de los puntos ξ_i que se tomen en los subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de la partición P. Con símbolos:

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \text{ existe y vale } \int_a^b f(x)dx$$

$$\Updownarrow \text{ (definición)}$$

$$\text{dado } \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \text{ tal que } \left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon \text{ siempre que } \|P\| < \delta.$$

Observe que no estamos pidiendo que la función f sea continua ni que sea no negativa. La definición anterior nos establece la existencia de la integral definida de f en $[a, b]$, o bien, la propiedad de integrabilidad de una función en ese intervalo. Si la función fuera continua

y no negativa, y tomáramos los puntos $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tales que $f(\xi_i)$ fuera el máximo M_i o mínimo m_i absolutos de la función en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ producido por la partición P, la suma de Riemann $S(P)$ se convertiría en:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = U_f(P)$$

o

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = L_f(P),$$

(las sumas superior o inferior de f asociadas con la partición P, respectivamente). Así pues, las sumas superior e inferior son casos particulares de las sumas de Riemann. De hecho, siendo ξ_i un punto arbitrario del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, y M_i y m_i el máximo y mínimo absolutos de la función en este subintervalo, entonces $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$, de donde:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i,$$

o bien:

$$L_f(P) \leq S(P) \leq U_f(P).$$

Así pues, la suma de Riemann $S(P)$ se encuentra siempre entre la suma inferior $L_f(P)$ y la suma superior $U_f(P)$. En el teorema 12.4.1 se estableció que siendo f una función continua y no negativa en $[a, b]$, y P una partición de este intervalo en n subintervalos tal que los subintervalos obtenidos son todos del mismo tamaño, entonces, a medida que n tendía a infinito, las sumas superior e inferior tendían a un límite común, que era el área bajo la gráfica de la función $y = f(x)$ en $[a, b]$.

En este caso, tomar el límite cuando n (el número de subintervalos de la partición P) tiende a infinito es equivalente a tomar el límite cuando $\|P\| = \frac{b-a}{n} \to 0$, de modo que, usando la relación previamente establecida $L_f(P) \leq S(P) \leq U_f(P)$ tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} L_f(P) \leq \lim_{\|P\|\to 0} S(P) \leq \lim_{n\to\infty} U_f(P).$$

Los dos límites $\lim_{n\to\infty} L_f(P)$ y $\lim_{n\to\infty} U_f(P)$ son iguales (al área bajo la curva $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$), de modo que (por un argumento análogo al teorema del sandwich visto en el capítulo 2), el límite $\lim_{\|P\|\to 0} S(P)$ debe existir y ser igual también al área bajo la curva. Este límite es la integral definida de $f(x)$ en $[a, b]$. Así pues, toda función f continua y no negativa en $[a, b]$ es integrable en tal intervalo, y su integral es igual al área bajo la gráfica de la función f entre $x = a$ y $x = b$. Éste es un hecho importante que dejamos enfatizado a continuación.

Si la función $y = f(x)$ es continua y no negativa en el intervalo $[a, b]$, entonces su integral definida $\int_a^b f(x)dx$ existe y es igual al área bajo la gráfica de la función entre $x = a$ y $x = b$.

En la notación $\int_a^b f(x)dx$ para la integral definida de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$, diremos que:

• la función $f(x)$ es el **integrando.**

• los valores $x = a$ y $x = b$ son los **límites de integración**, siendo $x = a$ el **límite inferior** y $x = b$ el **límite superior.**

El símbolo dx que aparece multiplicando a la función del integrando lo leeremos como "diferencial de x". En algún momento del próximo capítulo daremos sentido a este símbolo como fue estudiado en el capítulo 11 de este curso. Es importante aclarar que la variable x que aparece en la expresión de la integral $\int_a^b f(x)dx$ es una "variable muda" o "variable ficticia": el significado de $\int_a^b f(x)dx$ es exactamente el mismo que el de $\int_a^b f(u)du$ o bien que $\int_a^b f(y)dy$. Todos ellos significan el límite de las sumas de Riemann de la función f en el intervalo $[a, b]$ (cuando éste existe).

Usemos el hecho de que la integral de una función continua no negativa es el área bajo la gráfica de la función, para calcular la integral $\int_0^t \sqrt{a^2 - x^2}dx$. Consideremos el círculo con centro en el origen y radio $a > 0$, $x^2 + y^2 = a^2$. De él, despejando la variable y en términos de x, se producen las dos funciones $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ y $g(x) = -\sqrt{a^2 - x^2}$, cuyas gráficas corresponden al semicírculo superior y al semicírculo inferior, respectivamente. Sabemos que el área total de este círculo es $A = \pi a^2$, de modo que si consideramos la integral definida de la función continua y no negativa $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, en el intervalo $[-a, a]$, el valor de ésta será la mitad del área total del círculo, que corresponde al área bajo la gráfica de la función (el semicírculo superior) entre $x = a$ y $x = -a$. Así pues, se tiene que:

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2}\pi a^2.$$

Más generalmente, consideremos un número $t \in [0, a]$. Calcularemos, con argumentos geométricos, el valor de la integral $\int_0^t \sqrt{a^2 - x^2}dx$. El problema consiste entonces en calcular el área de la región limitada por el eje x, el semicírculo $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, y las rectas $x = 0$ y $x = t$. Esta región la podemos ver dividida en dos subregiones, correspondientes al triángulo (rectángulo) OAP, y al sector circular OPQ. Llamemos θ al ángulo formado por el segmento $\overline{OP}$ y la parte positiva del eje x.

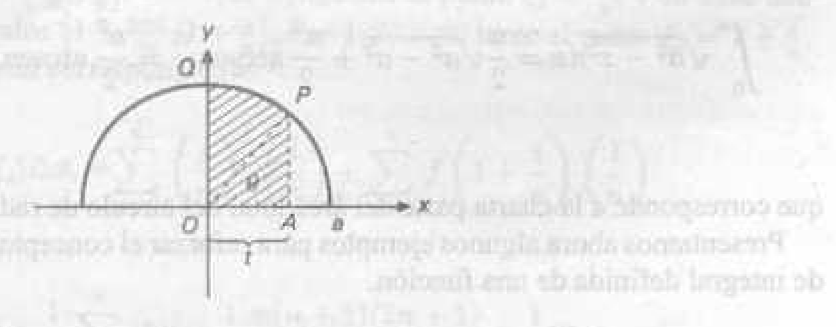


Figura 12.5.1. Cálculo de la integral $\int_0^t \sqrt{a^2 - x^2}dx$.

El triángulo OAP tiene por base a t, y por altura al valor de la función $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, para $x = t$, es decir, la altura de este triángulo es $h = \sqrt{a^2 - t^2}$. Así, el área del triángulo OAP es

$$A_1 = \frac{1}{2} t \sqrt{a^2 - t^2}.$$

Para calcular el área del sector circular OPQ, recordemos que un sector circular en un círculo de radio r, con un ángulo central igual a α, tiene un área igual a $\frac{1}{2}\alpha r^2$. En nuestro caso, el ángulo central del sector circular OPQ es $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$, en donde θ es un ángulo cuyo coseno es $\cos\theta = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} = \frac{t}{a}$. Es decir, $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta = \frac{t}{a}$, de donde $\alpha = \operatorname{arcsen}\frac{t}{a}$. Entonces, el área del sector circular OPQ es:

$$A_2 = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{arcsen} \frac{t}{a},$$

quedándonos finalmente el área procurada como $A = A_1 + A_2 = \frac{1}{2} t \sqrt{a^2 - t^2} + \frac{1}{2} a^2 \operatorname{arcsen}\frac{t}{a}$. Éste es el valor de la integral que queríamos calcular:

$$\int_0^t \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{t}{2}\sqrt{a^2 - t^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{t}{a}.$$

En particular, si $t = a$, obtenemos que:

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a}{2}\sqrt{a^2 - a^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{a}{a} = \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen} 1 = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}\pi a^2,$$

que corresponde a la cuarta parte del área total del círculo de radio a.

Presentamos ahora algunos ejemplos para reforzar el concepto establecido en esta sección de integral definida de una función.

EJEMPLO 12.5.1. Calcule la integral definida de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 1]$.

SOLUCIÓN. Siendo $f(x) = x^2$ continua y no negativa en $[a, b]$, y sabiendo que $\int_0^1 x^2dx$ es igual al área bajo la parábola $y = x^2$ en $[0, 1]$, el valor de esta área es, según se calculó en el ejemplo 12.4.1 de la sección anterior, igual a $\frac{1}{3}$. Así pues:

$$\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}.$$

★

EJEMPLO 12.5.2. Calcule la integral $\int_a^b e^x dx$, en donde $0 < a < b$.

SOLUCIÓN. Siendo $f(x) = e^x$ continua y positiva, la integral $\int_a^b e^x dx$ es igual al área bajo la gráfica de esta función en el intervalo $[a, b]$. Esta área fue calculada en el ejemplo 12.4.2 de la sección anterior, y resultó ser igual a $e^b - e^a$. Así pues,

$$\int_a^b e^x dx = e^b - e^a.$$

★

Es importante hacer hincapié en el hecho de que la propiedad de integrabilidad de una función en un intervalo $[a, b]$, es independiente de que la función sea continua y no negativa en $[a, b]$. Estas condiciones sobre la función son suficientes para que sea integrable (en cuyo caso el valor de la integral es igual al área bajo la gráfica de la función en $[a, b]$), pero, como se muestra en los dos ejemplos siguientes, tales condiciones no son necesarias.

EJEMPLO 12.5.3. Considere la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 3 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$ en el intervalo $[0, 2]$. Verifique que esta función es integrable en tal intervalo.

SOLUCIÓN. Debemos mostrar que la integral $\int_0^2 f(x)dx$ (el límite que la define) existe. Tomemos la partición $P = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., 1, 1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{2}{n}, ..., 2\}$ del intervalo $[0, 2]$. Cada uno de los $2n$ subintervalos de la partición P tiene la misma longitud $\Delta x_i = \frac{1}{n}$. En cada uno de los primeros n subintervalos $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$, $i = 1, 2, ..., n$, tome el punto $\xi_i = \frac{i}{n}$, y en cada uno de los segundos n subintervalos $\left[1 + \frac{i-1}{n}, 1 + \frac{i}{n}\right]$, $i = 1, 2, ..., n$, tome el punto $\xi_i = 1 + \frac{i}{n}$. Considere la suma de Riemann correspondiente:

$$S(P) = \sum_{i=1}^{2n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \left(\frac{1}{n}\right) + \sum_{i=1}^{n} f\left(1 + \frac{i}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(3) = \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{n}(3n)$$

$$= \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)+3.$$

Como la norma de la partición $\|P\|$ es igual a $\frac{1}{n}$, tomar el límite cuando $\|P\| \to 0$ es equivalente a tomar el límite cuando $n \to \infty$ en la suma de Riemann. Así pues, la integral procurada es:

$$\int_0^2 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)+3\right] = \frac{2}{6}+3 = \frac{10}{3}.$$

La función $f(x)$ del ejemplo anterior es discontinua en $x = 1 \in [0,2]$ y sin embargo es integrable en ese intervalo. Observe que tal función es no negativa en $[0,2]$. Esto permite aún (a pesar de la discontinuidad de la función) considerar el valor de la integral $\int_0^2 f(x)dx$ como un área bajo la gráfica de la función $f(x)$ en el intervalo $[0,2]$, como se muestra en la figura 12.5.2.

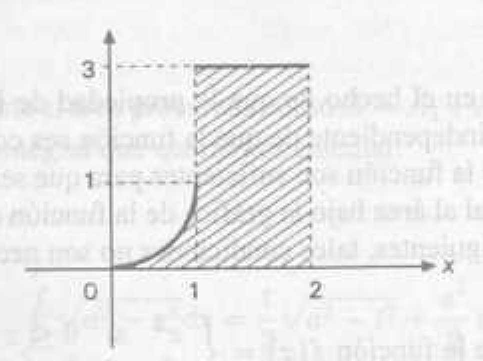


Figura 12.5.2. La integral $\int_0^2 f(x)dx$ de la función del ejemplo 12.5.3.

EJEMPLO 12.5.4. Considere la función $f(x) = -x^2$ en el intervalo $[0,1]$. Verifique que esta función es integrable en tal intervalo.

SOLUCIÓN. Debemos mostrar que la integral $\int_0^1 -x^2dx$ existe. Tomemos la partición $P = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., 1\}$ de $[0,1]$, y en cada subintervalo $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ tomemos el punto $\xi_i = \frac{i}{n}$. La suma de Riemann correspondiente es:

$$S(P) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} -\left(\frac{i}{n}\right)^2\left(\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= -\frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = -\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right).$$

Como $\|P\| = \frac{1}{n}$, tomar límite cuando $\|P\| \to 0$ es equivalente a tomar límite cuando $n \to \infty$, de modo que:

$$\int_0^1 -x^2 dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \left[-\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right] = -\frac{1}{3}.$$

★

El ejemplo anterior, que nos sirvió para mostrar que un función puede ser integrable sin ser no negativa, presenta un fenómeno de carácter general: si comparamos los resultados de los ejemplos 12.5.1 y 12.5.4, en los cuales se obtuvo que:

$$\int_0^1 x^2 dx = \tfrac{1}{3} \quad \text{y} \quad \int_0^1 -x^2 dx = -\tfrac{1}{3}$$

respectivamente, vemos que la integral definida de la función continua no positiva $g(x) = -x^2$ en $[0, 1]$ es el negativo de la integral definida de la función continua no negativa $f(x) = -g(x)$. Este hecho sugiere que si una función $f(x)$ es continua y no positiva en un intervalo $[a, b]$ (es decir, $f(x) \leq 0$ para toda $x \in [a, b]$), entonces esta función es integrable en tal intervalo y su integral es el negativo de la integral $\int_a^b -f(x)dx$, la cual existe, pues $-f(x)$ es una función continua y no negativa en $[a, b]$. De hecho, observe que el valor de esta última integral debe ser el del área bajo la gráfica de la función $y = -f(x)$ en $[a, b]$. Este resultado es efectivamente cierto, y lo enunciamos sin demostración:

Si $y = f(x)$ es una función continua y no positiva en $[a, b]$, entonces es integrable en $[a, b]$ y su integral $\int_a^b f(x)dx$ es igual al negativo del área bajo la curva de $y = -f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$. Es decir, $\int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

Esquemáticamente:

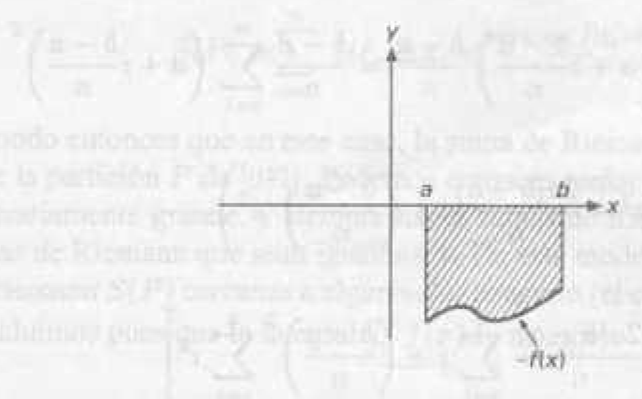


Figura 12.5.3. La integral $\int_a^b f(x)\,dx$ de una función continua y no positiva en $[a, b]$.

EJEMPLO 12.5.5. Calcule la integral $\int_a^b -e^x dx$, en donde $0 < a < b$.

SOLUCIÓN. La función $f(x) = -e^x$ es continua y no positiva en $[a, b]$. Según las observaciones previas al ejemplo, tenemos que $\int_a^b -e^x dx = -\int_a^b e^x dx = -(e^b - e^a)$ (según se calculó en el ejemplo 12.5.2).

*

EJEMPLO 12.5.6. Calcule la integral definida $\int_a^b c dx$ de la función constante $f(x) = c$ en el intervalo $[a, b]$.

SOLUCIÓN. Si $c \geq 0$, la función $f(x) = c$ es continua y no negativa en $[a, b]$, y por lo tanto la integral $\int_a^b c dx$ es el área bajo la curva $y = c$ entre $x = a$ y $x = b$, la cual es $c(b - a)$ (ejemplo 12.4.3). Si $c < 0$, digamos $c = -\alpha$, con $\alpha > 0$, entonces, por las observaciones previas al ejemplo anterior, tenemos que

$$\int_a^b c dx = -\int_a^b \alpha dx = -\alpha(b - a) = c(b - a).$$

En cualquier caso se tiene entonces que:

$$\int_a^b c dx = c(b - a).$$

*

EJEMPLO 12.5.7. Use la definición de integral como límite de sumas de Riemann para calcular la integral $\int_a^b x^2 dx$.

SOLUCIÓN. Tomamos la partición $P = \{a, x_1, ..., x_{n-1}, b\}$ de $[a, b]$ tal que $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$, $i = 0, 1, ..., n$. Es decir, $[a, b]$ queda dividido según esta partición en n subintervalos de la misma longitud $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$. Los puntos $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, los tomamos como siendo $\xi_i = x_i$ (es decir, la suma de Riemann que vamos a considerar es de hecho la suma superior de la función $f(x) = x^2$ asociada a la partición P de $[a, b]$). Entonces la suma de Riemann $S(P)$ es:

$$S(P) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)^2$$

$$= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(a^2 + \frac{2a(b-a)}{n}i + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 i^2\right)$$

$$= \frac{b-a}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} a^2 + \frac{2a(b-a)}{n}\sum_{i=1}^{n} i + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} i^2\right]$$

$$= \frac{b-a}{n}\left[a^2 n + \frac{2a(b-a)}{n}\frac{n(n+1)}{2} + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= (b-a)a^2 + a(b-a)^2\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{6}(b-a)^3\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right),$$

de tal modo que, cuando n tiende a infinito, nos queda:

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$

⋆

Veamos ahora un ejemplo de una función *no integrable*.

EJEMPLO 12.5.8. Considere la función $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si} \quad x \text{ es irracional} \end{cases}$ en el intervalo $[0, 1]$. Demuestre que esta función no es integrable en tal intervalo (no es integrable, de hecho, en cualquier intervalo $[a, b]$ de $\mathbf{R}$).

SOLUCIÓN. Sea $P = \{0, x_1, ..., x_{n-1}, 1\}$ una partición cualquiera del intervalo $[0, 1]$. En cada uno de los subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ tome el punto ξ_i tal que ξ_i sea racional (esto lo puede hacer porque los números racionales son densos en $\mathbf{R}$, lo cual significa justamente que en cualquier intervalo, por pequeño que sea, existen una infinidad de números racionales. Esta propiedad de densidad la tienen también los números irracionales). Considere la suma de Riemann correspondiente:

$$S(P) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \overset{\text{puesto que } f(\xi_i)=0}{=\!=\!\longrightarrow\!=} \sum_{i=1}^{n} (0)\Delta x_i = 0.$$

Así pues, no importa cuál sea la partición P del intervalo $[0, 1]$, si escogemos los puntos $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tales que ξ_i sea racional, la suma de Riemann correspondiente es $S(P) = 0$.

Tomemos ahora los puntos $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tales que ξ_i sea irracional. La suma de Riemann en este caso sería:

$$S(P) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \overset{\text{puesto que } f(\xi_i)=1}{=\!=\!\longrightarrow\!=} \sum_{i=1}^{n} (1)\Delta x_i = 1,$$

de modo entonces que en este caso, la suma de Riemann será igual a 1, independientemente de la partición P de $[0, 1]$. Podemos entonces tomar particiones con un número de puntos arbitrariamente grande, y siempre habrá sumas de Riemann que sean iguales a cero como sumas de Riemann que sean iguales a 1. De este modo, no podremos tener nunca las sumas de Riemann $S(P)$ cercanas a algún valor concreto (el cual sería la integral de $f(x)$ en $[0, 1]$). Concluimos pues que la integral $\int_0^1 f(x)dx$ no existe.

⋆

Debemos decir que el ejemplo anterior es casi el único ejemplo decente (al alcance de un primer curso de cálculo) del cual se dispone, para exhibir una función que carece de la propiedad de integrabilidad. Esta propiedad es, de hecho, compartida por "muchísimas"

funciones. *A partir de este momento, todas las funciones con las que trabajaremos serán funciones integrables.*

Uno de los resultados importantes del cálculo, que nos pone en la mira a una gran cantidad de funciones integrables, se establece en el siguiente teorema, que enunciamos sin demostración.

TEOREMA 12.5.1. *Si la función $y = f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces es integrable en este intervalo.*

Con este teorema podemos ver que la propiedad de integrabilidad de una función es más débil que la propiedad de diferenciabilidad vista en el capítulo 11 del curso de cálculo diferencial. Por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ es continua en cualquier intervalo $[a, b]$, pero, si $0 \in (a, b)$, tal función no es diferenciable en ese intervalo (no lo es en $x = 0$). Sin embargo el teorema anterior nos dice que esta función es integrable en cualquier intervalo $[a, b]$ de R.

Más aún, observe que la clase de funciones integrables es, de hecho, más amplia que la de las funciones continuas que nos establece el teorema 12.5.1: en el ejemplo 12.5.3 se vio que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 3 & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$, que es discontinua en $[0, 2]$, es integrable en este intervalo. En cursos más avanzados de cálculo se puede discutir a detalle qué características específicas son necesarias y suficientes para que una función sea integrable en un intervalo $[a, b]$ de su dominio.

EJERCICIOS (12.5)

En los ejercicios 1 al 5, determine la suma de Riemann de la función $f(x)$ dada, respecto de la partición P del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de la misma longitud, tomando como puntos ξ_i los puntos medios de cada uno de los subintervalos.

1. $f(x) = 3x + 2$ en $[0, 2]$, $n = 10$.

2. $f(x) = 3x^2$ en $[0, 2]$, $n = 10$.

3. $f(x) = 2x^3$ en $[0, 2]$, $n = 10$.

4. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $[1, 5]$, $n = 10$.

5. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ en $[0, 1]$, $n = 5$.

6. Demuestre que: $\displaystyle\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right)$.

7. Calcule la integral $\displaystyle\int_0^1 x^3\,dx$.

8. Calcule la integral $\int_0^1 -x^3dx$.

9. Calcule la integral $\int_0^1 e^x dx$.

10. Calcule la integral $\int_0^1 5dx$.

11. Considere la función $f(x) = \alpha x$, en donde α es un número real positivo dado, en el intervalo $[a, b]$. Use argumentos geométricos para demostrar que:

$$\int_a^b f(x)dx = \alpha\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right).$$

12. Use el resultado del ejercicio anterior para demostrar que:

$$\int_a^b \alpha x dx = \alpha \int_a^b x dx.$$

13. Demuestre que si α y β son números reales cualesquiera, se tiene:

$$\int_a^b (\alpha x + \beta)dx = \alpha \int_a^b x dx + \int_a^b \beta dx.$$

14. Use los resultados de los ejercicios anteriores para calcular $\int_1^3 (2 + x)dx$. Interprete geométricamente el valor calculado.

12.6 PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

En esta sección estudiaremos las propiedades básicas de la integral definida de una función. Todas estas propiedades pueden ser demostradas con argumentos rigurosos, usando la definición de la integral definida como límite de sumas de Riemann, dada en la sección 5. Nosotros no haremos tales demostraciones. En algunos casos haremos solamente unas cuentas sencillas que permitan hacer plausible la validez de la propiedad, y en otros, trataremos de apelar al sentido geométrico que tiene la integral definida, cuando la función es continua y no negativa, en cuyo caso sabemos que el valor de la integral definida de $f(x)$ en $[a, b]$ es el área bajo la gráfica de $f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$.

Comenzamos por dar dos definiciones importantes, que se refieren a lo que pasa cuando los límites superior e inferior de la integral $\int_a^b f(x)dx$ son iguales, o están "invertidos".

Definimos, para cualquier a en el dominio de f :

$$\int_a^a f(x)dx = 0,$$

y para cualquier intervalo $[a, b]$ del dominio de f :

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Así por ejemplo, $\int_1^1 x^2dx = 0$, $\int_{-4}^{-4} x^2dx = 0$, $\int_1^0 x^2dx = -\int_0^1 x^2dx = -\frac{1}{3}$, etcétera. Todas estas expresiones se justifican *por definición* (es decir, no existe "justificación racional" de estos hechos: se aceptan porque *así están definidos*).

Las propiedades que ahora comenzaremos a estudiar las enunciaremos como teoremas.

TEOREMA 12.6.1. *Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones integrables en el intervalo $[a, b]$, entonces su suma $f(x) + g(x)$ es integrable en $[a, b]$ y:*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Para justificar esta propiedad, pensemos en una partición P arbitraria del intervalo $[a, b]$. La suma de Riemann de la función $f(x) + g(x)$ asociada a esta partición es:

$$S(P) = \sum_{i=1}^{n} (f(\xi_i) + g(\xi_i))\, \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$$

de tal modo que (sin ser muy rigurosos con el paso del límite sobre las sumas), podemos escribir que:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (f(\xi_i) + g(\xi_i))\, \Delta x_i$$

$$= \lim_{\|P\|\to 0} \left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i \right) = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Por ejemplo:

$$\int_0^1 (4 + x^2)dx = \int_0^1 4dx + \int_0^1 x^2dx = 4(1 - 0) + \frac{1}{3} = \frac{13}{3}.$$

$4x$ $\frac{x^3}{3}$

El teorema 12.6.1 admite una generalización natural: si $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ son m funciones integrables en $[a, b]$, entonces su suma $f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_m(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x)$ es integrable, y:

$$\int_a^b \sum_{i=1}^{m} f_i(x)dx = \sum_{i=1}^{m} \int_a^b f_i(x)dx.$$

Por ejemplo:

$$\int_0^1 (x^2 + e^x + 6)dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 e^x dx + \int_0^1 6dx = \left(\frac{1}{3}\right) + (e-1) + (6) = e + \frac{16}{3}.$$

TEOREMA 12.6.2. *Si $f(x)$ es una función integrable en el intervalo $[a, b]$, y k es una constante cualquiera, entonces su producto $kf(x)$ es integrable en $[a, b]$ y:*

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

Justificamos esta propiedad de manera análoga a como lo hicimos con la anterior: pensemos en una partición P arbitraria del intervalo $[a, b]$. La suma de Riemann de la función $kf(x)$ asociada a esta partición es:

$$S(P) = \sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\Delta x_i = k\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

de tal modo que:

$$\int_a^b kf(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\|P\|\to 0} k\sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= k \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = k\int_a^b f(x)dx.$$

Por ejemplo:

$$\int_0^4 -2e^x dx = -2\int_0^4 e^x dx = -2(e^4 - e^0) = -2(e^4 - 1).$$

Quisiéramos llamar la atención al contenido de los dos teoremas anteriores. En ellos se establece que:

- suma de funciones *integrables* es una función *integrable*, y la *integral* de la suma de las funciones es igual a la suma de las *integrales* de cada una de las funciones. Es decir, la *integral* "pasa por la suma de funciones", en el sentido de que "la *integral* de una suma de funciones es igual a la suma de las *integrales* de las funciones".

ZAAA7

• el producto de una constante por una función *integrable* es una función *integrable*, y su *integral* es igual al producto de la constante por la *integral* de la función dada. Es decir, las constantes "salen de la acción de la *integral*", en el sentido de que "la *integral* de una constante por una función es la constante por la *integral* de la función".

Vuelva a leer estos dos resultados, cambiando la palabra "*integrable*" por "DIFERENCIABLE", y la palabra "*integral*" por "DERIVADA". Seguramente brincará de gusto al reconocer a dos viejos resultados conocidos del curso de cálculo diferencial (la derivada de una suma de funciones es la suma de las derivadas de las funciones, y la derivada de una constante por una función es la constante por la derivada de la función, respectivamente). Es decir, la integral definida comparte con la derivada las propiedades de "paso por las sumas" y "dejar fuera las constantes". Estas dos propiedades le dan el carácter de **linealidad** tanto a la derivada como a la integral.

EJEMPLO 12.6.1. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones integrables en el intervalo $[a,b]$, tales que $\int_a^b f(x)dx = 3$ y $\int_a^b g(x)dx = -5$. Calcule $\int_a^b (4f(x) - 2g(x))\,dx$.

SOLUCIÓN. Por la propiedad de linealidad de la integral, se tiene:

$$\int_a^b (4f(x) - 2g(x))\,dx = 4\int_a^b f(x)dx - 2\int_a^b g(x)dx = 4(3) - 2(-5) = 22.$$

★

TEOREMA 12.6.3. *Si $f(x)$ es una función integrable y no negativa en el intervalo $[a,b]$, entonces:*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

La propiedad contenida en este teorema puede entenderse fácilmente si se piensa que la función $f(x)$ es (además de integrable) continua: en tal caso la función sería continua y no negativa, y entonces, como se vio en la primera sección, la integral $\int_a^b f(x)dx$ es el área bajo la gráfica de la función $f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$, la cual es siempre un número no negativo.

TEOREMA 12.6.4. *Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones integrables en el intervalo $[a,b]$, tales que $f(x) \geq g(x)$ para toda x en $[a,b]$, entonces:*

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

Esta propiedad es una consecuencia inmediata de la propiedad de linealidad de la integral y del teorema 12.6.3, pues siendo $f(x)$ y $g(x)$ integrables, la función $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ es también integrable, y además, según las hipótesis del teorema, se tiene para toda $x \in [a,b]$ que $\varphi(x) = f(x) - g(x) \geq 0$, por lo que:

$$0 \leq \int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx,$$

de donde se obtiene que:

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx,$$

como se quería.

Si pensamos que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ del teorema 12.6.1 son además continuas y no negativas, la interpretación geométrica de la propiedad establecida en ese teorema es muy fácil de entender: el hecho de que $f(x) \geq g(x)$ para toda $x \in [a, b]$ nos dice que la gráfica de $f(x)$ está siempre por encima de la gráfica de $g(x)$ (o coincide con ella). La propiedad del teorema 12.6.4 nos dice entonces que el área bajo la curva de $f(x)$ en $[a, b]$ es no menor que el área bajo la curva de $g(x)$ en $[a, b]$.

Esquemáticamente tenemos:

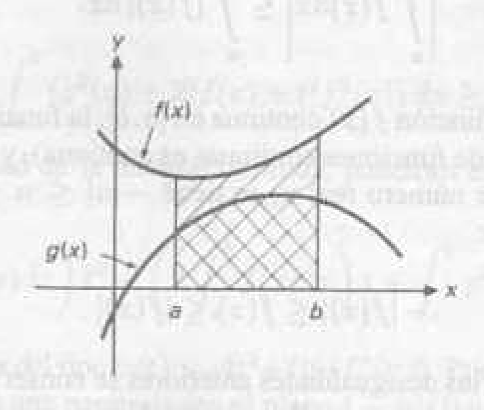


Figura 12.6.1. La propiedad del teorema 12.6.4 en el caso de que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ sean continuas y no negativas en $[a, b]$.

EJEMPLO 12.6.2. Diga cuál de las integrales $\int_0^1 x^2dx$ y $\int_0^1 x^3dx$ es mayor (sin calcularlas).

SOLUCIÓN. Sabemos que la función $f(x) = x^2$ es no menor (mayor o igual) que la función $g(x) = x^3$ en el intervalo $[0, 1]$ (para todo número real entre 0 y 1, su cuadrado es mayor o igual que su cubo). Es decir, en este intervalo, la gráfica de la parábola $y = x^2$ está por encima de la gráfica de la parábola cúbica $y = x^3$ (coinciden en los extremos del intervalo). Entonces, por el teorema 12.6.4, como $x^2 \geq x^3$ para toda $x \in [0, 1]$, se tiene: $\int_0^1 x^2dx \geq \int_0^1 x^3dx$.

★

EJEMPLO 12.6.3. Diga cuál de las integrales $\int_1^2 x^2dx$ y $\int_1^2 x^3dx$ es mayor (sin calcularlas).

SOLUCIÓN. Observe que se trata de las mismas funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$ del ejemplo anterior. Sin embargo, para las x del intervalo $[1, 2]$, se tiene $x^2 \leq x^3$ (para los números reales de este intervalo —de hecho para todos los números mayores o iguales que 1— su cuadrado es no mayor que su cubo). Entonces, por el teorema 12.6.4 se tiene:

$$\int_1^2 x^2dx \leq \int_1^2 x^3dx.$$

★

EJEMPLO 12.6.4. Una desigualdad de gran importancia en el cálculo integral, es aquella que relaciona el valor absoluto de una integral de una función con la integral del valor absoluto de la función. Verifique que si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$, entonces se cumple la desigualdad:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

SOLUCIÓN. Siendo la función $f(x)$ continua en $[a, b]$, la función $|f(x)|$ también es continua en $[a, b]$ (composición de funciones continuas es continua), y por lo tanto es integrable. Sabemos que para cualquier número real u, se tiene $-|u| \leq u \leq |u|$, de modo que para cualquier x en $[a, b]$ se tiene:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|.$$

Según el teorema 12.6.4, las desigualdades anteriores se conservan si tomamos la integral de a a b a las funciones que aparecen en ellas, quedándonos:

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

de donde (como $|z| \leq a \Leftrightarrow -a \leq z \leq a$) se obtiene:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

como se quería ver.

★

EJEMPLO 12.6.5. Otra desigualdad importante en el cálculo de integrales, es la llamada *desigualdad de Cauchy-Schwarz*: demuestre que si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en el intervalo $[a, b]$, entonces:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \sqrt{\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)}.$$

SOLUCIÓN. Observe que la desigualdad es trivial si la función $f(x)$ es la función cero en $[a,b]$, pues en tal caso ambos miembros de la desigualdad son iguales (a cero). Consideremos entonces que $f(x)$ no es siempre cero. En tal caso la función $f^2(x)$ es continua y no negativa, y por lo tanto su integral $A = \int_a^b f^2(x)dx$ es no negativa (por el teorema 12.6.3). De hecho, (vamos a usar que) esta integral es en este caso positiva (es un resultado de carácter general, que se prueba con argumentos de continuidad de la función, que si $G(x)$ es una función continua y no negativa en $[a,b]$, entonces $\int_a^b G(x)dx = 0$ si y solamente si $G(x) = 0$ para toda $x \in [a,b]$). Sea t un número real cualquiera. Considere la función $\varphi(x) = (g(x) + tf(x))^2$. Ciertamente $\varphi(x) \geq 0$ para toda $x \in [a,b]$, y por lo tanto (teorema 12.6.3) se tiene:

$$\int_a^b \varphi(x)dx \geq 0.$$

Es decir:

$$\int_a^b \left(g^2(x) + 2tf(x) + t^2 f^2(x)\right) dx \geq 0,$$

o bien, usando la linealidad de la integral definida, podemos escribir la expresión anterior como:

$$\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)t^2 + \left(2\int_a^b f(x)dx\right)t + \int_a^b g^2(x)dx \geq 0.$$

Esta última expresión es del tipo $\psi(t) = At^2 + Bt + C \geq 0$. Puesto que $A = \int_a^b f^2(x)dx > 0$, la función $\psi(t)$ representa una parábola (en el plano $t - \psi(t)$) que abre hacia arriba, la cual no cruza nunca al eje t (pues $\psi(t) \geq 0$ para cualquier $t \in \mathbf{R}$). Esto ocurre si y solamente si $B^2 - 4AC \leq 0$. Es decir, si y solamente si:

$$\left(2\int_a^b f(x)dx\right)^2 - 4\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right) \leq 0,$$

de donde se obtiene la desigualdad de Cauchy-Schwarz cuya validez se quería establecer.

⋆

TEOREMA 12.6.5. *Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a,b]$. Sean M y m los valores máximo y mínimo absolutos de la función en tal intervalo. Entonces:*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

La propiedad establecida en este teorema se deduce fácilmente del teorema 12.6.4: al ser la función $f(x)$ continua en $[a,b]$, esta función es integrable en ese intervalo. Además, según la definición de los valores máximo y mínimo absolutos de la función en $[a,b]$, se tiene, para toda x de este intervalo que:

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Las funciones constantes $\varphi(x) = m$ y $\psi(x) = M$ son integrables en $[a,b]$, y sus integrales son (según el ejemplo 12.5.6), $\int_a^b m dx = m(b-a)$ y $\int_a^b M dx = M(b-a)$. Según el teorema 12.6.5, las desigualdades $m \leq f(x) \leq M$ se conservan al tomar la integral de a a b, quedándonos:

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx,$$

de donde se obtiene:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a),$$

tal como lo establece el teorema 12.6.5.

Si pensamos que la función $f(x)$ es, además de continua en $[a,b]$ como se establece en el teorema 12.6.5, una función no negativa en ese intervalo, la interpretación geométrica de la fórmula ahí establecida es una desigualdad entre áreas muy fácil de entender: el rectángulo de base $b-a$ y altura m, tiene un área no mayor que el área bajo la gráfica de la función $f(x)$ en $[a,b]$, y a su vez, esta área es no mayor que la del rectángulo de base $b-a$ y altura M, como se muestra en la figura 12.6.2.

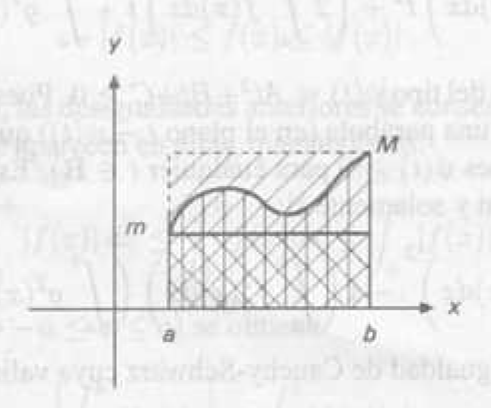


Figura 12.6.2. La propiedad del teorema 12.6.5 en el caso de que la función $f(x)$ sea no negativa en $[a,b]$.

EJEMPLO 12.6.6. Con base en el teorema 12.6.5, establezca un intervalo en el cual se encuentra el valor de la integral $\int_5^7 \ln x dx$.

SOLUCIÓN. Como la función $f(x) = \ln x$ es creciente en todo su dominio $x > 0$ (pues, $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$ para toda $x > 0$, ¡recuerde los resultados del capítulo 8!), el máximo absoluto

de esta función en el intervalo $[5, 7]$ se debe encontrar en $x = 7$, y vale $M = f(7) = \ln 7$, y el mínimo absoluto debe estar en $x = 5$, y su valor es $m = f(5) = \ln 5$. Así, según el teorema 12.6.5, el valor de la integral $\int_5^7 \ln x dx$ debe encontrarse entre $m(b-a) = (\ln 5)(7-5) = 2\ln 5 \approx 3.219$ y $M(b-a) = (\ln 7)(7-5) = 2\ln 7 \approx 3.89$. Es decir:

$$3.219 \leq \int_5^7 \ln x dx \leq 3.89.$$

(Con los métodos que estudiaremos posteriormente, podremos ver que el valor de esta integral es: $\int_5^7 \ln x dx = 7\ln 7 - 5\ln 5 - 2 \approx 3.574$.)

★

EJEMPLO 12.6.7. Considere la integral $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx$. Use el resultado del teorema 12.6.5 para dar un intervalo en el cual se encuentre el valor de esta integral.

SOLUCIÓN. La función $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ tiene por derivada a $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, de donde se ve que $x = 0$ es un punto crítico de ella. Evaluamos $f(0) = 1$, $f(1) = \sqrt{2}$, y concluimos que el mínimo absoluto de esta función en el intervalo $[0, 1]$ se encuentra en $x = 0$, y vale $m = f(0) = 1$, y el máximo absoluto se encuentra en $x = 1$, y vale $M = f(1) = \sqrt{2}$. Entonces, según se establece en el teorema 12.6.5, el valor de la integral $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx$ se encuentra entre $m(b-a) = (1)(1-0) = 1$ y $M(b-a) = \sqrt{2}(1-0) = \sqrt{2}$. Es decir:

$$1 \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx \leq \sqrt{2}.$$

★

EJEMPLO 12.6.8. Considere la integral del ejercicio anterior $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx$. Use la desigualdad de Cauchy-Schwarz establecida en el ejemplo 12.6.5, para dar un intervalo en el que se encuentra el valor de esta integral.

SOLUCIÓN. Se tiene, con $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ y $g(x) = 1$,

$$\left|\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx\right| \leq \sqrt{\left(\int_0^1 \left(\sqrt{1+x^2}\right)^2 dx\right)\left(\int_0^1 (1)^2 dx\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\int_0^1 (1+x^2)\,dx\right)\left(\int_0^1 dx\right)} = \sqrt{\left(\int_0^1 (1+x^2)\,dx\right)(1-0)}$$

$$= \sqrt{\int_0^1 dx + \int_0^1 x^2 dx} = \sqrt{1+\frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.1547.$$

Así, en valor absoluto, la integral $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx$ no puede pasar del valor 1.1547. Ésta es una mejor aproximación de la lograda en el ejercicio anterior, en donde dedujimos que tal valor no podía superar a $\sqrt{2} \approx 1.4142$. ★

TEOREMA 12.6.6. *Sea $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable en el intervalo $[a,b] \subseteq I$. Si c es cualquier número real (y $f(x)$ es integrable en $[c,b]$ si $c < a$, o en $[a,c]$ si $c > b$), entonces:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Observe que si el número c es igual a a o a b, la fórmula establecida en el teorema anterior es trivial. En efecto, si $c = a$, se tiene:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx = 0 + \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx,$$

pues, por definición (vista al comienzo de la presente sección) $\int_a^a f(x)dx = 0$. Similarmente, si $c = b$, se tiene:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + 0 = \int_a^b f(x)dx.$$

En el caso en que $a < c < b$, la propiedad establecida en este teorema es fácil de entender si pensamos en el caso de que la función sea continua y no negativa. En efecto, lo que en él se establece en este caso es que el área bajo la gráfica de la función entre $x = a$ y $x = b$, es la suma de las correspondientes áreas bajo la gráfica de la función entre $x = a$ y $x = c$, más el área entre $x = c$ y $x = b$, como se muestra en la figura 12.6.3.

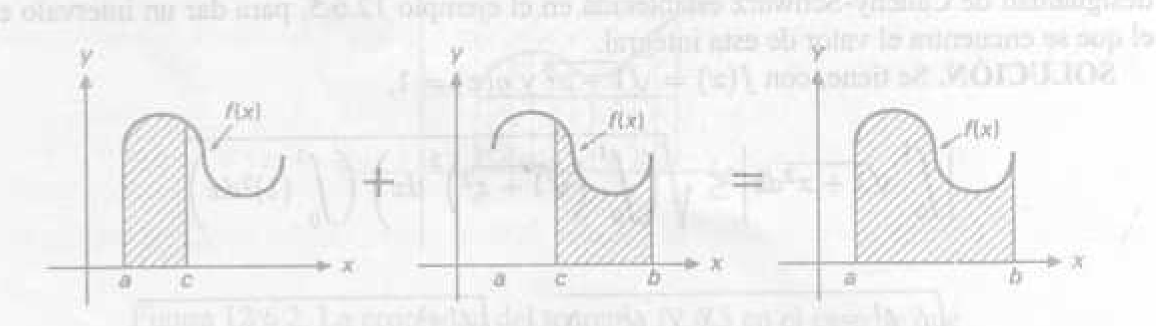


Figura 12.6.3. La propiedad del teorema 12.6.6 en el caso de que la función $f(x)$ sea continua y no negativa en $[a,b]$, y que $a < c < b$.

Aún si el punto c no se encuentra en el intervalo (a,b), la fórmula del teorema 12.6.6 es cierta. Supongamos, por ejemplo, que $c < a < b$, y que la función $f(x)$ es continua y no negativa en $[c,b]$. Un argumento de áreas análogo al caso anterior nos muestra que:

$$\int_c^b f(x)dx = \int_c^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx,$$

de donde:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^b f(x)dx - \int_c^a f(x)dx.$$

Pero, por definición, se tiene que $\int_c^a f(x)dx = -\int_a^c f(x)dx$. Entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^b f(x)dx - \int_c^a f(x)dx = \int_c^b f(x)dx - \left(-\int_a^c f(x)dx\right)$$

$$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

tal como se asegura en el teorema 12.6.6. Un argumento análogo muestra la validez de tal fórmula en el caso en que $a < b < c$.

EJEMPLO 12.6.9. Sea $f(x)$ una función tal que $\int_1^4 f(x)dx = 6$ y $\int_2^1 f(x)dx = 2$. Determine $\int_2^4 f(x)dx$.

SOLUCIÓN. Se tiene:

$$\int_1^4 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx,$$

de donde:

$$\int_2^4 f(x)dx = \int_1^4 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx = \int_1^4 f(x)dx + \int_2^1 f(x)dx = 6 + 2 = 8.$$

★

El teorema 12.6.6 nos permite dar una mayor generalidad a la interpretación de la integral definida de una función continua en un intervalo. Hemos visto que si esta función es no negativa, el valor de la integral es el área bajo la curva (la gráfica de la función) en el intervalo considerado. También vimos que si la función es no positiva, el negativo del valor de la integral de la función es el área sobre la gráfica de la función en tal intervalo. Sin embargo, muchas funciones continuas son positivas en algunas partes y negativas en otras, como la que se muestra en la figura 12.6.4.

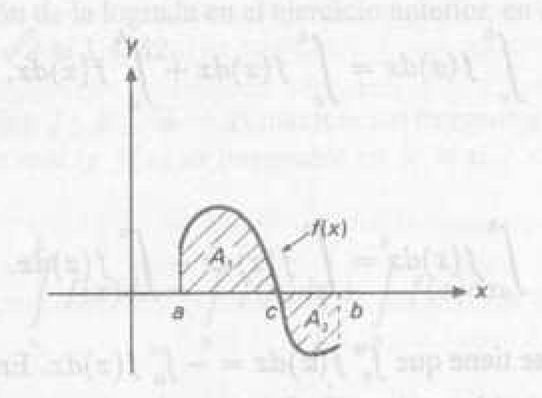


Figura 12.6.4. Una función $f(x)$ continua en $[a, b]$.

Para la función mostrada en la figura 12.6.4, la integral $\int_a^b f(x)dx$ la podemos descomponer, según el teorema 12.6.6, como $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. La primera de estas integrales es el área A_1 bajo la curva entre $x = a$ y $x = c$ (en donde la función es positiva). La segunda integral es el negativo del área A_2 sobre la curva entre $x = c$ y $x = b$ (en donde la función es negativa). Así, la integral $\int_a^b f(x)dx$ será igual a $A_1 + (-A_2) = A_1 - A_2$. Es decir, el valor de la integral $\int_a^b f(x)dx$ es una resta de áreas: de lo que la curva encierra entre $x = a$, el eje x, y esté por encima del eje x, menos lo que esta curva encierra entre $x = b$, el eje x, y esté por debajo del eje x.

En la figura 12.6.5 se muestra una situación más general.

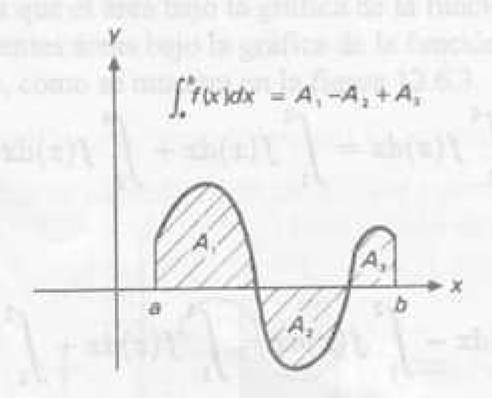


Figura 12.6.5. La integral de una función $f(x)$ continua en $[a, b]$.

EJEMPLO 12.6.10. Con base en argumentos geométricos, determine el valor de la integral $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x dx$.

SOLUCIÓN. La gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es simétrica respecto de la recta $x = \pi$, estando por encima del eje x en $(0, \pi)$ y por debajo en $(\pi, 2\pi)$. Así, las integrales $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x dx$ y $\int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x dx$ difieren solamente por un signo (su valor absoluto común es el área bajo la curva $y = \operatorname{sen} x$ entre 0 y π). Entonces:

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x dx = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x dx + \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x dx = 0.$$

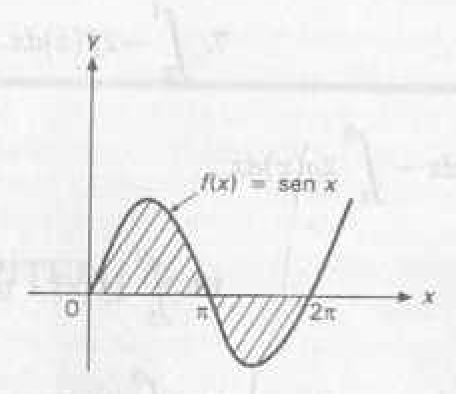


Figura 12.6.6. La integral $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x dx$ es igual a cero.

EJERCICIOS (12.6)

1. ¿Verdadero o falso? Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones integrables en $[a, b]$, entonces su suma es integrable en $[a, b]$, y la integral de su suma es la suma de las integrales de cada una de las funciones.

2. ¿Verdadero o falso? Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones integrables en $[a, b]$, entonces su producto es integrable en $[a, b]$, y la integral de su producto es el producto de las integrales de cada una de las funciones.

3. ¿Verdadero o falso? Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones integrables en $[a, b]$, entonces su cociente es integrable en $[a, b]$, y la integral de su cociente es el cociente de las integrales de cada una de las funciones.

4. ¿Verdadero o falso? Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones integrables en $[a, b]$, y además $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$, entonces $f(x) \geq g(x)$ para toda $x \in [a, b]$.

5. ¿Verdadero o falso? No existe función alguna $f(x)$ integrable en $[0, 1]$ tal que cumpla $\int_0^1 f^2(x)dx = \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$.

En los ejercicios 6 al 15, suponga que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en $\mathbb{R}$, *y que* $\int_1^3 f(x)dx = 4$, $\int_3^5 f(x) = 3$ *y* $\int_1^5 g(x)dx = -2$. *Calcule el valor de la expresión indicada.*

6. $\int_1^1 f(x)dx.$

7. $\int_3^1 -2f(x)dx.$

8. $4\int_2^3 f(x)dx + \int_1^2 4f(x)dx - \int_1^5 2g(x)dx.$

9. $\int_1^5 (f(x) - 4g(x))\,dx.$

10. $\int_5^1 (f(x) + g(x))\,dx.$

11. $\int_1^3 f(x)dx + \int_5^3 4f(x)dx.$

12. $\int_1^5 f(x)dx + 3\int_2^5 g(x)dx + \int_1^2 3g(x)dx.$

13. $\int_1^3 (2f(x) + g(x))\,dx + \int_3^5 g(x)dx.$

14. $\int_3^5 (-3f(x) + 4g(x))\,dx + \int_1^3 4g(x)dx.$

15. $\int_1^3 (2f(x) + 7g(x))\,dx - \int_3^5 (4f(x) - 7g(x))\,dx.$

En los ejercicios 16 al 20, coloque el signo $\geq$ o $\leq$ que corresponda.

16. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} x dx$ ____ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx.$

17. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x dx$ ____ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx.$

18. $\int_1^e \ln x dx$ ____ $\int_1^e \ln^2 x dx.$

19. $\int_e^{e^2} \ln x dx$ ____ $\int_e^{e^2} \ln^2 x dx.$

20. $\int_0^1 x^2 dx$ ____ $\int_0^1 \sqrt{x} dx.$

En los ejercicios 21 al 30, dé una estimación de la integral dada usando el teorema 12.6.5.

21. $\int_1^3 \sqrt{1+x^2}dx.$

22. $\int_1^3 x\sqrt{1+x}dx.$

23. $\int_0^1 \sqrt{2+3x^2}dx.$

24. $\int_{-1}^1 (x^2+3)dx.$

25. $\int_0^1 x(3-x^2)dx.$

26. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx.$

27. $\int_{-1}^{1} \sqrt{5+x^3}dx.$ **28.** $\int_{1}^{2} (x^2-x)dx.$ **29.** $\int_{-1}^{1} x^2e^x dx.$

30. $\int_{-3}^{-1} x^2e^x dx.$

EXAMEN DEL CAPÍTULO 12

EXAMEN TIPO (A)

1. Calcule la suma $\sum_{i=1}^{9}(i^2+2^i)$.

2. En una pila de naranjas, en forma piramidal, con base triangular (triángulo equilátero), hay 12 naranjas en cada lado del triángulo de la base. ¿Cuántas naranjas hay en total en la pila? (Véase ejemplo 12.2.7.)

3. Determine las sumas superior e inferior de la función $f(x)=2x+1$ en el intervalo $[0,3]$, correspondientes a la partición $P=\{0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3\}$ de tal intervalo.

4. Use argumentos geométricos para calcular el área bajo la gráfica de la función $f(x)=2x+1$ en el intervalo $[0,3]$. Verifique que el valor de esta área se encuentra entre los valores de las sumas superior e inferior calculadas en el ejercicio anterior.

5. Considere la función $f(x)=\operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0,\pi]$. Tome una partición P de este intervalo en 10 partes iguales, y en cada uno de los subintervalos $[x_{i-1},x_i]$, $i=1,2,...,10$, tome el punto $\xi_i=\frac{1}{2}(x_{i-1}+x_i)$. Determine la suma de Riemann $S(P)$ correspondiente a esta partición y a esta elección de los puntos ξ_i.

6. Calcule la integral $\int_0^2(3x^2+2x+1)dx.$

7. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones tales que $\int_1^7 f(x)dx=9$ y $\int_1^7 3g(x)dx=6$. Calcule $\int_1^7(5f(x)-2g(x))\,dx.$

8. Sea $f(x)$ una función tal que $\int_1^6 2f(x)dx=7$ y $\int_3^6 4f(x)dx=12$. Calcule $\int_3^1 2f(x)dx.$

9. Considere la función $F:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$ dada por $F(x)=\int_1^x \frac{1}{y}dy$. a) ¿Qué signo tiene $F(x)$ si $0<x<1$? b) ¿Cuánto vale $F(1)$? c) ¿Qué signo tiene $F(x)$ para $x>1$? Compare con el comportamiento que tiene la función $G(x)=\ln x$.

10. Calcule el área de la región comprendida entre la parábola cúbica $y = x^3$ y la parábola $y = x^2$.

EXAMEN TIPO (B)

1. Calcule la suma $\sum_{i=1}^{6} (3i + 3^{-i})$.

2. Suponga que la pirámide de naranjas en el ejercicio 2 del examen tipo (A) es de base cuadrada (con 12 naranjas en cada lado). ¿Cuántas naranjas hay en total?

3. Determine las sumas superior e inferior de la función $f(x) = x^2 + 1$ en el intervalo $[0, 3]$, correspondientes a la partición $P = \{0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3\}$ de tal intervalo.

4. Use argumentos geométricos para calcular el área bajo la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 1$ en el intervalo $[0, 3]$. Verifique que el valor de esta área se encuentra entre los valores de las sumas superior e inferior calculadas en el ejercicio anterior.

5. Considere la función $f(x) = \cos^2 x$ en el intervalo $[0, \pi]$. Tome una partición P de este intervalo en 10 partes iguales, y en cada uno de los subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., 10$, tome el punto $\xi_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$. Determine la suma de Riemann $S(P)$ correspondiente a esta partición y a esta elección de los puntos ξ_i.

6. Calcule la integral $\int_0^1 (3x + 2)^3 dx$.

7. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones tales que $\int_1^4 f(x)dx = 3$, $\int_4^7 f(x)dx = -2$ y $\int_1^7 3g(x)dx = 6$. Calcule $\int_7^1 (5f(x) + g(x))\, dx$.

8. Sin hacer el cálculo de las integrales, diga cuál de las dos integrales $\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}dx$ o $\int_{-1}^{1} (1 - x^2)dx$ es mayor.

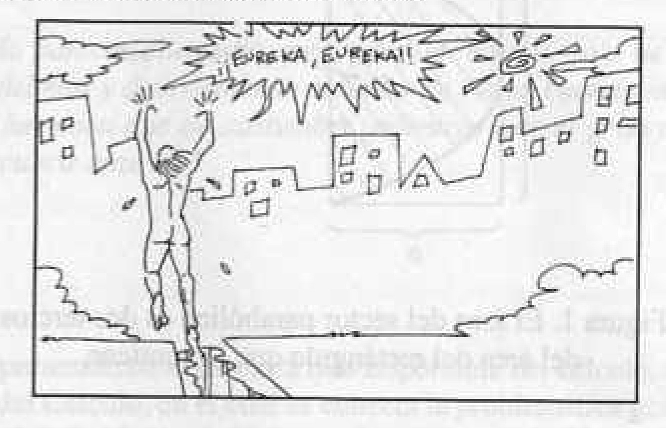
9. Sea $f(x)$ una función continua, creciente y no negativa, cuya gráfica es cóncava hacia arriba en $[a, b]$. Con base en razonamientos geométricos, demuestre que:

$$(b - a)f(a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

10. Verifique que la función $f(x) = \sqrt{1 + x^4}$ satisface las hipótesis del ejercicio anterior. Use el resultado ahí establecido para dar un intervalo en el que se encuentre el valor de esta integral.

NOTA HISTÓRICA: ¡EUREKA!: ARQUÍMEDES Y EL CÁLCULO INTEGRAL.

Arquímedes nació en Siracusa (Sicilia) en el año 287 a.C. Su nombre está ligado al cálculo pues, con casi 2000 años de anticipación, logró percibir algunas de las ideas fundamentales que constituirían, en el siglo XVII, el nacimiento formal de esta parte de la matemática. El historiador Herbert W. Turnbull se refiere a él como "el Newton de su época". Y quizás este calificativo no se deba solamente a las importantes ideas que tuvo Arquímedes sobre lo que conformaría posteriormente el cálculo integral. Arquímedes, al igual que Newton, fue digno representante del estereotipo del matemático distraído y sumido en sus pensamientos, a quienes los problemas matemáticos sobre los que trabajaban los podían hacer incluso dejar de comer, aún sentados a la mesa con sus alimentos en frente de ellos.



En una ocasión el rey Hierón mandó hacer una corona de oro, y, al recibirla, sospechó que el orfebre no había utilizado en su elaboración oro puro, sino que había mezclado algún otro metal de menor calidad. El rey encargó a Arquímedes la "investigación del caso". Un día que Arquímedes se disponía a tomar un baño, seguramente después de muchos días de estar pensando en cómo resolver el problema encargado por el rey, al entrar a la bañera y ver cómo el nivel del agua ascendía y salía de la bañera conforme él se sumergía en ella, encontró repentinamente la manera de dar solución al problema de la corona del rey. Con gritos de "¡Eureka, eureka!" ("¡lo encontré, lo encontré!"), Arquímedes salió desnudo corriendo por las calles de Siracusa. Lo que descubrió Arquímedes cuando se introducía a la bañera es un hecho que ahora es conocido por cualquier estudiante de secundaria después de su primer curso de física. Se trata del "Principio de Arquímedes": el peso que pierde un cuerpo que se sumerge en un líquido es igual al peso del líquido que el cuerpo desaloja al sumergirse (cuando entramos a una bañera —o a una alberca— llena de agua, nuestro cuerpo pesa menos —la atracción que ejerce la Tierra sobre nuestro cuerpo es menor cuando estamos dentro del agua—; el peso que perdemos es igual al peso del agua que desalojamos de la bañera). Usando este principio fue como Arquímedes resolvió el problema encargado por el rey. Y, para dejar la historia con buen sabor anecdótico, aunque no se sabe a ciencia cierta el desenlace de este episodio, diremos que efectivamente Arquímedes descubrió la presencia de otros metales menos finos (de plata) en la corona del rey, y que el orfebre fue entonces declarado culpable.

Entre las contribuciones científicas importantes que se atribuyen a Arquímedes se encuentran el uso de principios mecánicos para calcular los centros de gravedad de figuras planas y de cuerpos sólidos, el estudio de los fundamentos de la hidrostática (que usó para determinar las posiciones de equilibrio de cuerpos de varios tipos flotando), el estudio de los principios de las palancas (otra frase famosa de Arquímedes es: "dadme un punto de apoyo, y moveré la Tierra", la cual surgió del estudio que hizo sobre las fuerzas y los puntos de apoyo en las palancas), el uso de la reflexión de rayos solares en espejos para concentrar energía, etcétera. Dentro de la Matemática se le recuerda por algunos métodos novedosos para aproximar el número pi (por ejemplo, $3 + \frac{1}{7} < \pi < 3 + \frac{10}{71}$), así como para aproximar algunas raíces cuadradas no

exactas (por ejemplo, $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$), pero, sobre todo (y éste es el motivo de esta nota histórica), por el MÉTODO DE EXHAUCIÓN, con el cual logró calcular algunas áreas de figuras planas. Su idea fue la de llenar a la figura de la que quería calcular el área, con formas geométricas más simples, como rectángulos o triángulos, hasta dejarla "exhausta" de estas figuras. Conociendo las áreas de estas pequeñas figuras, pudo calcular, sumándolas, las áreas de las figuras iniciales. Por ejemplo, usando este método demostró que el área del sector parabólico como el que se muestra en la figura, es igual a $\frac{2}{3}$ del área del rectángulo que lo contiene. La teoría que hemos estudiado en este capítulo tiene, en el fondo, las ideas de Arquímedes: hemos calculado áreas cubriendo las regiones correspondientes con rectángulos "por debajo" y "por encima", y hemos hecho crecer el número de rectángulos hasta dejar tapizada nuestra figura.

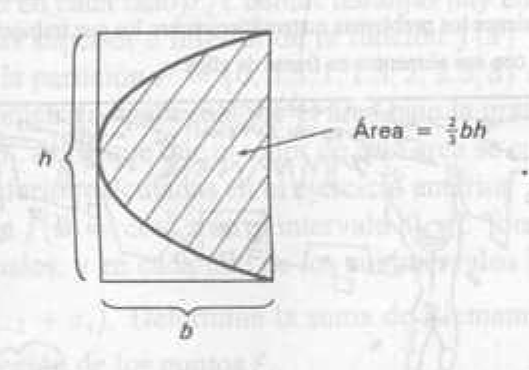


Figura 1. El área del sector parabólico es dos tercios del área del rectángulo que lo contiene.

En un día aciago del año 212 a.C., durante la segunda guerra púnica, Arquímedes se encontraba contemplando algunos círculos que tenía dibujados sobre la arena. Un soldado romano trató de interrumpirlo. La reacción de Arquímedes ante la presencia del enemigo invasor, en lugar de ser de miedo, fue de indignación por verse interrumpido en su trabajo intelectual. —"¡Deje en paz a mis círculos!", le gritó al soldado—. Ese día, el genio matemático de 75 años de edad, murió atravesado por la espada del soldado romano.

CAPÍTULO 13
EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

"No sé lo que puedo parecer al mundo; pero para mí mismo, sólo he sido como un niño, jugando a la orilla del mar, y divirtiéndome al hallar de vez en cuando un guijarro más suave o una concha más hermosa que de costumbre, mientras que el gran océano de la verdad permanecía sin descubrir ante mí."

Sir Isaac Newton

En este capítulo presentamos el teorema más importante del cálculo, conocido como Teorema Fundamental del Cálculo, en el cual se conecta la problemática generada en el capítulo anterior de la integral definida (y por lo tanto, el problema del cálculo de áreas bajo las curvas), con la problemática de obtener "derivadas al revés" de funciones dadas (obtener funciones cuyas derivadas nos son dadas, las cuales son llamadas antiderivadas). Empezaremos por estudiar el teorema del valor medio de una función, pues, además de que éste encierra una idea muy importante e interesante (con muchas aplicaciones), lo usaremos para dar un argumento que justifica la validez del Teorema Fundamental del Cálculo, cuyo estudio es el objetivo principal del presente capítulo.

13.1 EL VALOR MEDIO DE UNA FUNCIÓN

La idea de "media" o "promedio" de n valores de alguna medida (nuestras calificaciones, la temperatura, la presión, etcétera), nos ha acompañado desde hace muchos años. Si se tienen n valores $a_1, a_2, ..., a_n$, decimos que su media (aritmética) $\overline{a}$ es:

$$\overline{a} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Consideremos una función $y = f(x)$. Si ésta tomara solamente una cantidad finita de valores en sus imágenes, no habría problema alguno para calcular la media de la función (la media de los valores de la función). Sin embargo, lo que es más común que ocurra es que

la función tenga una infinidad de valores en su rango, y esto nos impide usar la fórmula anterior para calcular el promedio de la función. Supongamos, por ejemplo, que la función f da la temperatura del medio ambiente (en grados centígrados) al tiempo x (en horas). Si durante un día vamos a ver el termómetro cada hora, y leemos el valor $f(x)$ de la temperatura en la hora x, podríamos decir que, con base en las lecturas tomadas, en ese día hubo una temperatura promedio de:

$$\overline{T} = \frac{f(1) + f(2) + \ldots + f(24)}{24}.$$

Sin embargo, si las lecturas de temperatura se hacen con un dispositivo especial que *de manera continua* nos está dando el valor de $f(x)$ en un instante x, lo que tendríamos a nuestra disposición sería una gráfica de x contra $f(x)$ en la que hay *una infinidad* de puntos (de valores reportados de la temperatura), digamos como la mostrada en la figura 13.1.1.

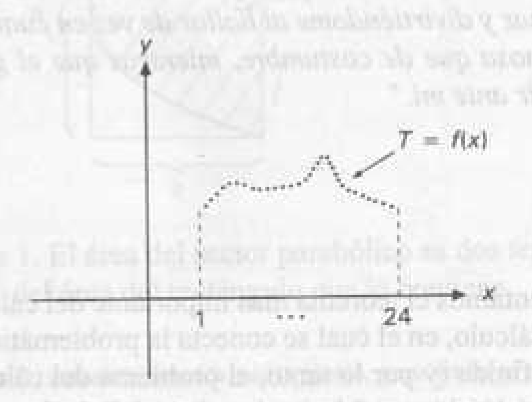


Figura 13.1.1. La gráfica de la función $T = f(x)$, para $1 \leq x \leq 24$.

¿Cómo podemos reportar un promedio de las temperaturas en este caso? Consideremos la situación en general: sea $y = f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$. Queremos estudiar cómo calcular el valor medio de la función (de los valores de la función) en el intervalo $[a, b]$, al cual denotaremos por $\overline{y}$. Si tomamos una partición $P = \{a, x_1, ..., x_{n-1}, b\}$ del intervalo $[a, b]$, y en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$ producido por esta partición, tomamos arbitrariamente un punto ξ_i en él, una primera aproximación al valor medio de la función $\overline{y}$ sería sumar los n valores de $f(\xi_i)$ y dividir entre n (el número de sumandos). Así,

$$\overline{y} \approx \frac{1}{n}\left(f(\xi_1) + f(\xi_2) + ... + f(\xi_n)\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).$$

Esta aproximación sería tanto mejor si hacemos crecer a n. Por ejemplo, pensemos en que las particiones las hacemos de tal modo que todas produzcan n subintervalos del mismo tamaño $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ y que cada vez tomamos a n más grande. Podemos entonces escribir la expresión anterior como:

$$\overline{y} \approx \left(\frac{1}{b-a}\right)\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) = \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\frac{b-a}{n} = \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Si dejamos que n tienda a infinito, la aproximación anterior se convierte en una igualdad (es entonces cuando capturaremos a *todos* los valores de las imágenes $f(x)$), quedándonos:

$$\overline{y} \approx \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right] = \frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

El límite $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ es, según la definición dada en el capítulo anterior, la integral definida de la función continua $y = f(x)$ en el intervalo $[a,b]$. Así pues, concluimos que el valor medio de la función continua $y = f(x)$ en el intervalo $[a,b]$ es:

$$\overline{y} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

En los ejemplos que presentamos en esta sección, usaremos algunos resultados vistos en la sección 5 del capítulo anterior (como las integrales definidas –en el intervalo $[a,b]$– de las funciones $y = c$, $y = x$ y $y = x^2$), así como la propiedad de linealidad de la integral definida estudiada también en el capítulo anterior.

EJEMPLO 13.1.1. El porcentaje de humedad dentro de un invernadero, durante las 12:00 y las 13:00 horas en que se estuvo inyectando vapor de agua al interior, se monitoreó continuamente, produciendo una función del tipo $f(x) = 80x^2 + 10$, en donde $0 \leq x \leq 1$ (siendo $x = 0$ a las 12:00 y $x = 1$ a las 13:00 horas), y $f(x)$ es el porcentaje de humedad en el ambiente. Determine el porcentaje medio de humedad que se tuvo en ese lapso de tiempo en el interior del invernadero.

SOLUCIÓN. A las 12:00 horas, en $x = 0$, el porcentaje de humedad era de $f(0) = 10\%$ y, después de una hora, de $f(1) = 90\%$. El promedio $\overline{y}$ lo obtenemos, según la discusión previa al ejemplo, como:

$$\overline{y} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{1-0}\int_0^1 (80x^2+10)dx = 80\int_0^1 x^2dx + \int_0^1 10dx$$
$$= (80)\left(\frac{1}{3}\right) + 10(1-0) = \frac{80}{3} + 10 = \frac{110}{3} \approx 36.67\%.$$

★

En el capítulo 7 se estudió el teorema del valor medio (Lagrange): si la función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a,b]$ y derivable en el intervalo (a,b), entonces existe un $c \in (a,b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

A continuación veremos un "teorema del valor medio para integrales" (así lo distinguiremos del teorema de Lagrange de Cálculo Diferencial; posteriormente veremos que estos teo-

remas están íntimamente relacionados), el cual nos dice esencialmente que el valor medio de una función continua $y = f(x)$ en un intervalo $[a, b]$, que acabamos de ver cómo calcular, es un valor que toma la función $f(x)$ para alguna $c \in (a, b)$.

TEOREMA 13.1.1. (TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES.) *Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$. Existe entonces una $c \in (a, b)$ tal que:*

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Al valor $f(c)$ se le llama "valor medio de la función en $[a, b]$".

Es muy fácil ver la validez de este teorema, apoyándonos en el teorema del valor intermedio para funciones continuas en intervalos compactos estudiado en el capítulo 3 (recuerde que este teorema establece que si $f(x)$ es una función continua en el intervalo compacto $[a, b]$, entonces esta función toma todos los valores que hay entre $f(a)$ y $f(b)$). En efecto, según el teorema 12.6.5 del capítulo anterior, se tiene:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a),$$

en donde m y M son los valores mínimo y máximo absolutos de la función en el intervalo $[a, b]$. Esta expresión la podemos reescribir como:

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M.$$

Los valores m y M son valores que toma la función en puntos del intervalo $[a, b]$, digamos que $f(x_1) = m$ y $f(x_2) = M$, con $x_1, x_2 \in [a, b]$ (este hecho se establece también en el capítulo 3), así que si consideramos el subintervalo $[x_1, x_2] \subseteq [a, b]$, en donde la función $f(x)$ sigue teniendo la propiedad de ser continua, tenemos que $\overline{y} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ es un valor (el valor medio de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$) que se encuentra entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$, valor que, según el teorema del valor intermedio, debe ser tomado por la función. Es decir, debe existir algún punto $c \in (x_1, x_2)$ (y por lo tanto $c \in (a, b)$), tal que:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

EJEMPLO 13.1.2. Según el ejemplo 13.1.1, el valor medio del porcentaje de humedad entre las 12:00 y las 13:00 horas, que resultó ser de $\frac{110}{3}\%$ debe ser un valor tomado por la función $f(x) = 80x^2 + 10$, para alguna $c \in (0, 1)$. Determine tal valor de c.

SOLUCIÓN. Se quiere ver que existe una $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 80c^2 + 10 = \frac{110}{3}$. Despejando c de esta ecuación obtenemos: $80c^2 = \frac{110}{3} - 10 = \frac{80}{3} \Rightarrow c^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow c = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. El valor $c = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.5773$ es el que asegura el teorema del valor medio que existe. Esto significa que 0.5773 h después de las 12:00 (aproximadamente a las 12 h con 34 min y 38 s),

el porcentaje de humedad dentro del invernadero era justamente el porcentaje medio entre las 12:00 y las 13:00 horas.

★

El teorema del valor intermedio para integrales tiene una interpretación geométrica muy simple en el caso de que la función sea no negativa, pues, en tal caso, como sabemos, la integral $\int_a^b f(x)dx$ es el área bajo la gráfica de la función entre $x = a$ y $x = b$. Esta área, dice el teorema del valor medio, debe ser igual a $(b-a)f(c)$, en donde c es algún punto del intervalo (a, b). El producto $(b-a)f(c)$ lo podemos ver como un "base por altura" del área de un rectángulo de base $b - a$ y altura $f(c)$. Así pues, lo que establece desde el punto de vista geométrico el teorema del valor medio para integrales, es que el área bajo la curva de $y = f(x)$ en $[a, b]$ es igual al área de un rectángulo de base $b-a$ y altura $\overline{y} = f(c) =$ valor medio de la función $f(x)$ en $[a, b]$.

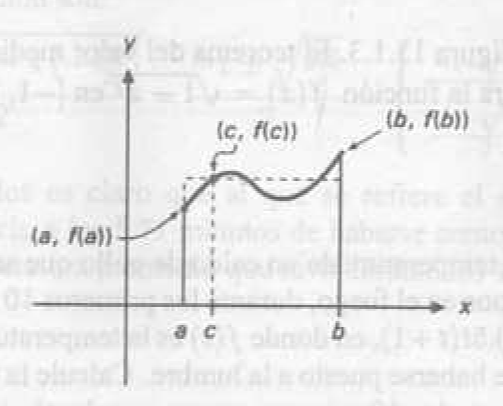


Figura 13.1.2. Interpretación geométrica del teorema del valor medio para integrales.

EJEMPLO 13.1.3. Verifique la validez del teorema del valor medio para integrales, con la función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ en el intervalo $[-1, 1]$.

SOLUCIÓN. El valor medio de la función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ en $[-1, 1]$ es:

$$\overline{y} = \frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx.$$

La integral $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$ representa geométricamente el área bajo el semicírculo superior $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ de radio 1 y centro en el origen. Esta área es entonces $\frac{1}{2}\pi$. Así, el valor medio $\overline{y}$ es:

$$\overline{y} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Este valor debe ser tomado por la función $f(x)$ para alguna $c \in (-1, 1)$. Es decir, debe haber una $c \in (-1, 1)$ tal que $f(c) = \sqrt{1-c^2} = \frac{\pi}{4}$. De esta expresión obtenemos que $1 - c^2 = \frac{\pi^2}{16} \Rightarrow c^2 = 1 - \frac{\pi^2}{16} \Rightarrow c = \pm\sqrt{1-\frac{\pi^2}{16}} \approx \pm 0.619$. Estos dos valores de c se encuentran en el intervalo $(-1, 1)$. El valor de la función $f(x)$ en cualquiera de ellos es la

altura de un rectángulo de base 2 cuya área es igual al área del semicírculo $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ en $[-1, 1]$.

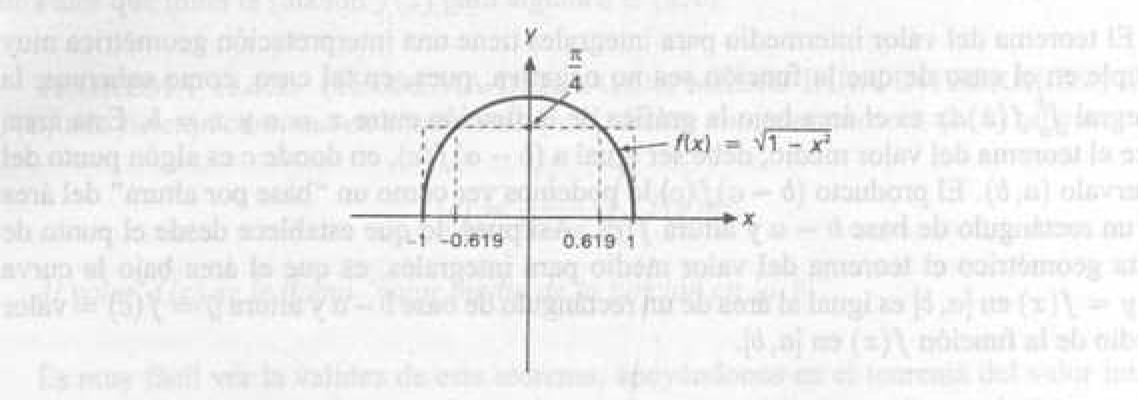


Figura 13.1.3. El teorema del valor medio para la función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ en $[-1, 1]$.

★

EJEMPLO 13.1.4. La temperatura de un caldo de pollo que se saca del refrigerador (a 5 grados centígrados) y se pone en el fuego, durante los primeros 10 minutos, puede modelarse por la función $f(t) = 5 + 0.5t(t+1)$, en donde $f(t)$ es la temperatura (en grados centígrados) del caldo a los t minutos de haberse puesto a la lumbre. Calcule la temperatura promedio que tuvo el caldo de pollo durante los 10 minutos en que se calentó. ¿A qué temperatura llegó a los 10 minutos?

SOLUCIÓN. El valor medio de $f(t)$ en el intervalo $[a, b] = [0, 10]$ es:

$$\overline{y} = \frac{\int_a^b f(t)dt}{b-a} = \frac{\int_0^{10}(5 + 0.5t(t+1))dt}{10-0} = \frac{1}{10}\int_0^{10}(5 + 0.5t^2 + 0.5t)dt.$$

Usando las propiedades de la integral definida, así como los resultados de la sección 5 del capítulo anterior, tenemos que

$$\overline{y} = \frac{1}{10}\int_0^{10}(5 + 0.5t^2 + 0.5t)dt = \frac{1}{10}\left[\int_0^{10} 5dt + 0.5\int_0^{10} t^2dt + 0.5\int_0^{10} tdt\right]$$

$$= \frac{1}{10}\left[5(10-0) + 0.5\left(\frac{1}{3}(10)^3\right) + 0.5\left(\frac{1}{2}(10)^2\right)\right] = \frac{145}{6} \approx 24.167.$$

Es decir, durante los 10 primeros minutos, el caldo tuvo un promedio de temperatura de 24.167 grados centígrados. La temperatura al final de los 10 minutos era de $f(10) = 5 + 0.5(10)(11) = 60$ grados centígrados.

★

EJEMPLO 13.1.5. ¿En qué momento de los primeros 10 minutos de calentamiento, el caldo del ejercicio anterior tuvo la temperatura promedio?

SOLUCIÓN. Según el teorema del valor medio para integrales, el valor promedio calculado de $\frac{145}{6}$ debe ser el valor de la función f para algún $t \in (0, 10)$. Tal valor de t lo podemos encontrar resolviendo la ecuación $f(t) = \frac{145}{6}$. Es decir:

$$5 + 0.5t(t+1) = \frac{145}{6},$$

que puede reescribirse como:

$$t^2 + t - \frac{115}{3} = 0.$$

Las raíces de esta ecuación son:

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\left(-\frac{115}{3}\right)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{\frac{463}{3}}}{2} = \begin{cases} \frac{-1+\sqrt{\frac{463}{3}}}{2} \approx 5.71 \\ \frac{-1-\sqrt{\frac{463}{3}}}{2} \approx -6.71. \end{cases}$$

De los valores obtenidos es claro que al que se refiere el ejercicio es sólo al valor $t = 5.71 \in (0, 10)$. Es decir, a los 5.71 minutos de haberse comenzado a calentar el caldo, es que éste llegó a su temperatura promedio que tuvo durante los 10 minutos que se calentó.

*

EJERCICIOS (13.1)

1. Determine el valor medio de una función constante $f(x) = c$ en un intervalo cualquiera $[a, b]$.

2. Determine el valor medio de la función identidad $f(x) = x$ en un intervalo cualquiera $[a, b]$.

3. El crecimiento de un cierto arbusto en su primer mes (30 días) de vida sigue un modelo dado por la fórmula $f(x) = 0.25x^2 + 12$, en donde x se mide en días y $f(x)$ es el tamaño del arbusto, en centímetros, a los x días de que es plantado. ¿De qué tamaño se plantó el arbusto? ¿Cuál es el tamaño promedio del arbusto en su primer mes de crecimiento?

4. El crecimiento que tiene una población de bacterias en un cultivo, durante las primeras 5 horas, sigue un modelo de "crecimiento exponencial" dado por la fórmula $f(x) = 1230e^x$, en donde $f(x)$ es el número de bacterias que hay en el cultivo al tiempo x, medido en horas. ¿Cuál es el número inicial de bacterias en el cultivo? ¿Qué cantidad de bacterias hay en promedio en el cultivo durante las primeras 5 horas?

5. El porcentaje del nivel de aprovechamiento de un alumno de preparatoria en un curso de cálculo diferencial e integral, durante los 8 meses que el alumno estudia diariamente el curso, viene modelado con la función $f(x) = \frac{5}{16}x(156 - 19x)$, en donde $f(x)$ es el porcentaje de aprovechamiento del alumno en el mes x. ¿Qué porcentaje de aprovechamiento tiene el

alumno a la mitad del curso?, ¿al finalizar el curso? ¿Cuál es promedio del porcentaje de aprovechamiento que tiene el alumno durante los 8 meses del curso? ¿En qué momentos se alcanza este porcentaje promedio?

En los ejercicios 6 al 10, verifique la validez del Teorema del Valor Medio para la función dada en el intervalo indicado.

6. $f(x) = x^2 + 1$ en $[0, 1]$.

7. $f(x) = 4 - 3x^2$ en $[-1, 1]$.

8. $f(x) = x^2 + x + 2$ en $[-1, 1]$.

9. $f(x) = e^x$ en $[0, 1]$.

10. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ en $[0, 3]$.

13.2 EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

En esta sección haremos un cocktail con las dos ideas fundamentales del Cálculo. Obtendremos algo sorprendente.

Concepto fundamental del Cálculo Diferencial → **VELOCIDAD DE CAMBIO (DERIVADA)**

Concepto fundamental del Cálculo Integral → **ÁREA BAJO UNA CURVA (INTEGRAL DEFINIDA)**

↓

SE MEZCLAN

↓

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Partamos de una función continua definida en algún intervalo I de R. Por razones de "seguridad" (para que no nos vayamos a confundir con las letras en la discusión que sigue), llamaremos t a la variable de esta función (la x será la variable de *otra* función que consideraremos más adelante). Es decir, escribiremos $f(t)$ con $t \in I$ para denotar a la función con la que iniciamos esta historia.

Fijemos un punto $a \in I$, y consideremos la función $F : I \to$ R, tal que a cada x de I, le asigna por imagen a la integral definida de la función $f(t)$ en el intervalo $[a, x]$. Es decir

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Esta función está bien definida, pues siendo $f(t)$ continua, la integral definida $\int_a^x f(t)dt$ existe. Más aún, si pensamos en que la función $f(t)$ es no negativa, podemos imaginar que lo que hace la función F es asociar a cada $x \in I$ el valor del área bajo la gráfica de la función $f(t)$ entre $t = a$ y $t = x$.

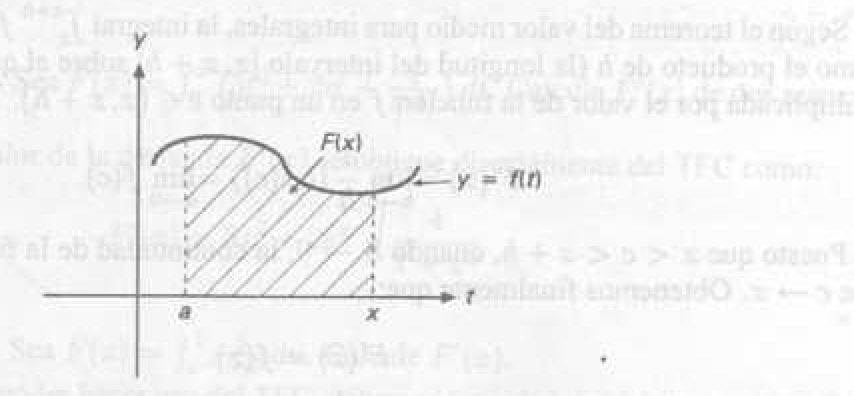


Figura 13.2.1. La función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Diremos que la integral que define a la función $F(x)$ es una "integral de límite superior variable". Observe pues que la función $F(x)$ está de algún modo comprometida en su definición con el concepto más importante del cálculo integral: esta función es, de hecho, una integral definida. Mezclemos ahora el ingrediente del cálculo diferencial: queremos calcular la derivada $F'(x)$ de esta función. Antes de hacer los cálculos correspondientes, llamamos la atención al significado geométrico que podemos dar al valor de $F'(x)$. Siendo la derivada de una función una medida de la velocidad de variación que tiene la función respecto de su variable independiente, podemos ver la derivada $F'(x)$ (en el caso de que $f(t)$ sea una función continua y positiva) como la velocidad a la que está cambiando el área bajo la gráfica de la función $f(t)$ entre $t = a$ (fija), cuando t está cambiando, en el instante en que t pasa por el valor x. Es decir, si pensamos a la abscisa moviéndose sobre el eje t, queremos medir a qué velocidad está cambiando el área $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ en el instante en que la abscisa pasa por $t = x$.

Calculemos entonces $F'(x)$. Según la definición de derivada tenemos:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h},$$

en donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ y por lo tanto $F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)dt$. Según la propiedad establecida en el teorema 12.6.6 del capítulo anterior, podemos escribir:

$$F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt,$$

de donde se obtiene entonces que:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)dt.$$

Según el teorema del valor medio para integrales, la integral $\int_x^{x+h} f(t)dt$ se puede escribir como el producto de h (la longitud del intervalo $[x, x+h]$ sobre el que se está integrando), multiplicada por el valor de la función f en un punto $c \in (x, x+h)$. Así pues:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\,(hf(c)) = \lim_{h\to 0} f(c).$$

Puesto que $x < c < x+h$, cuando $h \to 0$, la continuidad de la función f nos garantiza que $c \to x$. Obtenemos finalmente que:

$$F'(x) = f(x).$$

Es decir:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x).$$

Este resultado nos dice entonces que **la derivada deshace la acción de la integral de la función** $f(t)$. Más precisamente, nos dice que la derivada respecto de x de la integral definida de a a x de la función $f(t)$, es el valor de esta función en $t = x$. Con la interpretación geométrica que estábamos manejando anteriormente, el contenido de este resultado se puede ver de la siguiente manera: si pensamos en la integral $\int_a^x f(t)dt$ como el área bajo la gráfica de $f(t)$ entre el valor fijo $t = a$ y con $t = x$ moviéndose (hacia la derecha, digamos), entonces en el instante en que t pasa por el valor x_0, la velocidad a la que está cambiando el área $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es justamente el valor de f en x_0.

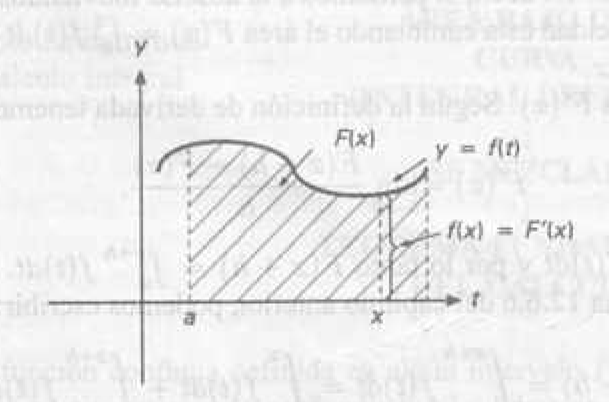


Figura 13.2.2. La derivada $F'(x)$ de la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es $f(x)$.

El resultado anterior es conocido como **TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO** (que abreviaremos como TFC), debido a la conexión que establece entre los dos conceptos más importantes del cálculo: la derivada y la integral de una función.

EJEMPLO 13.2.1. Sea $F(x) = \int_2^x \sqrt{1+t^2}dt$. Calcule $F'(2)$.

SOLUCIÓN. Según el TFC, tenemos que $F'(x) = \sqrt{1+x^2}$, de modo que $F'(2) = \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}$.

★

EJEMPLO 13.2.2. Sea $F(x) = \int_0^x \left(3t^2 + 2e^t + \frac{4}{1+t^2}\right) dt$. Calcule $F'(x)$ de dos maneras distintas.

SOLUCIÓN. El valor de la derivada $F'(x)$ se obtiene directamente del TFC como:

$$F'(x) = 3x^2 + 2e^x + \frac{4}{1+x^2}.$$

★

EJEMPLO 13.2.3. Sea $F(x) = \int_x^1 \frac{1}{1+u^2} du$. Calcule $F'(x)$.

SOLUCIÓN. Para poder hacer uso del TFC, debemos tener la integral que expresa $F(x)$ con el límite superior variable. Usando entonces la definición correspondiente del capítulo anterior, tenemos:

$$F(x) = \int_x^1 \frac{1}{1+u^2} du = -\int_1^x \frac{1}{1+u^2} du,$$

de modo que:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(-\int_1^x \frac{1}{1+u^2} du\right) = -\frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{1+u^2} du = -\frac{1}{1+x^2}.$$

★

EJEMPLO 13.2.4. Considere la función $F(x) = \int_1^{x^2} \arctan t dt$. Calcule $F'(x)$.

SOLUCIÓN. El TFC nos dice que la derivada respecto de x de una función del tipo $\int_a^x f(t)dt$ es $f(x)$. Sin embargo, la función $F(x)$ dada en el ejercicio, es una integral cuyo límite superior no es x, sino x^2. Para poder hacer uso del TFC, hagamos $u = x^2$. Podemos ver entonces la función $F(x)$ como la composición de la función $y = \varphi(u) = \int_1^u \arctan t dt$, con la función $u = \psi(x) = x^2$. Es decir, se tiene que $F(x) = \varphi(\psi(x))$. Según la regla de la cadena, la derivada de $F(x)$ es: $F'(x) = \varphi'(\psi(x))\, \psi'(x)$, o bien, con la notación de Leibniz, $F'(x) = \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)$. La primera de estas derivadas la calculamos directamente con el TFC, pues:

$$\frac{dy}{du} = \frac{d}{du}\int_1^u \arctan t dt = \arctan u.$$

Por otra parte, es claro que $\frac{du}{dx} = 2x$. Entonces:

$$F'(x) = (\arctan u)(2x) = 2x \arctan x^2.$$

★

Generalizando lo que se hizo en el ejemplo anterior, podemos establecer que: si $f(x)$ es cualquier función continua y $\varphi(x)$ cualquier función derivable, entonces:

$$\frac{d}{dx}\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt = f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x).$$

Más aún, si $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ son funciones derivables, y usando que:

$$\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt = \int_{\psi(x)}^{a} f(t)dt + \int_a^{\varphi(x)} f(t)dt,$$

así como la idea del ejemplo 13.2.3, podemos establecer el resultado general:

$$\frac{d}{dx}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt = f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x) - f\left(\psi(x)\right)\psi'(x).$$

EJEMPLO 13.2.5. Considere la función $F(x) = \int_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} \sqrt{1+t^2}dt$. Calcule $F'(x)$.

SOLUCIÓN. Según el resultado general previamente establecido, tenemos que:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \sqrt{1+\cos^2 x}(\cos x)' - \sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}(\operatorname{sen} x)' \\ &= -\operatorname{sen} x\sqrt{1+\cos^2 x} - \cos x\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}. \end{aligned}$$

⋆

Ahora deduciremos una consecuencia importante del TFC presentado anteriormente, la cual es en realidad, la manera como más se utiliza en la práctica este teorema. Para ello, tendremos que recordar algo de lo que estudiamos en el capítulo 7 sobre el Teorema del Valor Medio (Lagrange). En particular usaremos (como se vio en el capítulo referido) que si una función $\psi : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida en un intervalo I de $\mathbf{R}$ es tal que $\psi'(x) = 0$ para toda x de I, entonces ésta es una función constante.

Sea entonces $g : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función definida en el intervalo I de $\mathbf{R}$, el cual contiene al intervalo $[a, b]$, tal que su derivada $g'(x)$ sea igual a la función $f(x)$ (la cual la suponemos continua en $[a, b]$). Para un $a \in I$ fijo, consideremos también la función $F : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dada por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Sea $\psi : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la función definida por:

$$\psi(x) = g(x) - F(x).$$

Observe que ψ está definida en el intervalo I y además, para toda x de I se tiene, por las hipótesis hechas sobre g y el TFC visto anteriormente, que:

$$\psi'(x) = g'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Es decir, la función ψ debe ser una función constante en I, digamos $\psi(x) = c$. Tenemos entonces que:

$$\psi(x) = g(x) - \int_a^x f(t)dt = c.$$

Si en la expresión anterior ponemos $x = a$, obtenemos que:

$$g(a) - \int_a^a f(t)dt = c.$$

Pero, por definición $\int_a^a f(t)dt = 0$, de modo que la constante c no es más que $c = g(a)$. Así, tenemos que:

$$g(x) - \int_a^x f(t)dt = g(a).$$

Esta última expresión es verdadera para toda x de I. En particular, si ponemos $x = b$ nos queda:

$$g(b) - \int_a^b f(t)dt = g(a),$$

y así llegamos al resultado:EF

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a), \text{ en donde } g'(x) = f(x)$$

(Continuamos con la tradición de denotar por x a la variable de la función f.) Esta "formulita" (a la que seguiremos llamando TFC) es, *aunque usted no lo crea*, el resultado más espectacular que haya aparecido en los 13 capítulos que lleva estudiados de este libro. En él se revela el parentesco que hay entre los dos problemas más importantes del cálculo (el del cálculo de derivadas y el del cálculo de integrales). La determinación de la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ de la función f (que se definió como el límite de sumas de Riemann) se puede hacer encontrando una función $g(x)$ cuya derivada sea $f(x)$, y evaluando tal función en $x = b$ y en $x = a$, y restando los resultados. Es decir, la determinación de integrales definidas se puede hacer con un proceso inverso al de derivación: el determinar la función $g(x)$ con la que se calcula, según la fórmula anterior, la integral $\int_a^b f(x)dx$, es en realidad una *antiderivación* de la función $f(x)$ (se está tratando de hallar la función $g(x)$ cuya derivada sea $f(x)$, es decir, conociendo la derivada $f(x)$ y se quiere hallar la función $g(x)$ que al derivarla dé por resultado a $f(x)$).

Antes de introducir un poco de terminología, resolvamos el problema de determinar la integral $\int_a^b e^x dx$. Según la fórmula establecida anteriormente, todo nuestro esfuerzo debe concentrarse sobre la pregunta: ¿conocemos alguna función $g(x)$ cuya derivada $g'(x)$ sea igual a $f(x) = e^x$? Con seguridad, en menos de lo que está leyendo esta línea ya tendrá la respuesta: tal función $g(x)$ es la misma e^x, pues $g'(x) = (e^x)' = e^x$. Entonces:

$$\int_a^b e^x dx = g(b) - g(a) = e^b - e^a.$$

Ahora regrese al ejemplo 12.4.2 (capítulo 12) para que vea los cálculos que se tuvieron que hacer para hallar el área bajo la curva de $f(x) = e^x$ entre $x = a$ y $x = b$ (es decir, la integral $\int_a^b e^x dx$). ¡Ésta es la causa por lo que la "formulita" que obtuvimos anteriormente es el resultado más importante del curso de Cálculo!

La diferencia $g(b)-g(a)$ que aparece en la fórmula $\int_a^b f(x)dx = g(b)-g(a)$ del TFC, la escribiremos como $[g(x)]_a^b$ o bien como $g(x)]_a^b$. Así, el TFC se ve como:

$$\int_a^b f(x)dx = [g(x)]_a^b, \text{ en donde } g'(x) = f(x),$$

o bien como:

$$\int_a^b f(x)dx = g(x)]_a^b, \text{ en donde } g'(x) = f(x).$$

EJEMPLO 13.2.6. Use el TFC para calcular $\int_1^3 2xdx$.

SOLUCIÓN. No es difícil descubrir una función $g(x)$ tal que $g'(x) = 2x$. Con nuestra experiencia del curso de cálculo diferencial vemos que $g(x) = x^2$ es una función con tales características. Entonces $\int_1^3 2xdx = x^2]_1^3 = (3)^2 - (1)^2 = 9 - 1 = 8$. ⋆

Observe que en el ejemplo anterior quizás se halla pensado en *otra* función $g(x)$ tal que $g'(x) = 2x$. Por ejemplo $g(x) = x^2+1$, o $g(x) = x^2-3$, o, en general, $g(x) = x^2+k$, en donde k es una constante. En todos estos casos tenemos $g'(x) = (x^2+k)' = (x^2)' + (k)' = 2x + 0 = 2x$. Sin embargo, el TFC nos dice que:

$$\int_1^3 2xdx = g(3) - g(1) = ((3)^2 + k) - ((1)^2 + k) = 9 + k - 1 - k = 8$$

que es el mismo resultado obtenido en el ejemplo anterior. Este tipo de detalles los discutiremos más ampliamente en el próximo capítulo.

EJEMPLO 13.2.7. Haciendo uso del TFC, obtenga la fórmula

$$\int_a^b \alpha xdx = \alpha\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right)$$

establecida en los ejercicios de la sección 5 del capítulo anterior.

SOLUCIÓN. Debemos procurar una función $g(x)$ tal que $g'(x) = \alpha x$. El caso $\alpha = 2$ fue resuelto en el ejemplo anterior. Observe que escribiendo $g(x) = \frac{\alpha}{2}x^2$, obtenemos $g'(x) = \left(\frac{\alpha}{2}x^2\right)' = \frac{\alpha}{2}(x^2)' = \frac{\alpha}{2}(2x) = \alpha x$, de modo que, según el TFC se tiene:

$$\int_a^b \alpha xdx = \frac{\alpha}{2}x^2\Big]_a^b = \frac{\alpha}{2}b^2 - \frac{\alpha}{2}a^2 = \alpha\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right).$$

⋆

EJEMPLO 13.2.8. Verifique que $(xe^x)' = (x+1)e^x$. Calcule entonces $\int_0^1 (x+1)e^x dx$.

SOLUCIÓN. La derivada de xe^x se obtiene como:

$$(xe^x)' = x(e^x)' + e^x(x)' = xe^x + e^x = (x+1)e^x.$$

Esto significa que una antiderivada de $f(x) = (x+1)e^x$ es $g(x) = xe^x$. Entonces, según el TFC se tiene entonces:

$$\int_0^1 (x+1)e^x dx = [xe^x]_0^1 = (1)e^1 - 0e^0 = e.$$

★

EJEMPLO 13.2.9. Verifique el teorema del valor medio para integrales con una función lineal $f(x) = mx + b$ en un intervalo cualquiera $[\alpha, \beta]$.

SOLUCIÓN. El valor medio de la función dada en $[\alpha, \beta]$ es:

$$\overline{y} = f(c) = \frac{\int_\alpha^\beta (mx+b)dx}{\beta - \alpha} = \frac{1}{\beta - \alpha}\int_\alpha^\beta (mx+b)dx.$$

La integral indicada la calculamos haciendo uso del TFC. Se tiene:

$$\int_\alpha^\beta (mx+b)dx = m\left(\frac{\beta^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2}\right) + b(\beta - \alpha) = (\beta - \alpha)\left(\frac{m}{2}(\beta + \alpha) + b\right).$$

Entonces:

$$\overline{y} = f(c) = \frac{1}{\beta - \alpha}\int_\alpha^\beta (mx+b)dx = \frac{1}{\beta - \alpha}(\beta - \alpha)\left(\frac{m}{2}(\beta + \alpha) + b\right) = \frac{m}{2}(\beta + \alpha) + b.$$

Suponiendo que la gráfica de la función lineal $f(x) = mx + b$ (la recta $y = mx + b$) está por encima del eje x en el intervalo $[\alpha, \beta]$, el valor obtenido es el de la altura de un rectángulo de base $\beta - \alpha$ cuya área es igual al área bajo la recta $y = mx + b$ en el intervalo $[\alpha, \beta]$. Tal valor debe ser el valor de la función f en algún punto $c \in (\alpha, \beta)$. Veamos cuál es este punto. Se tiene:

$$f(c) = mc + b = \frac{m}{2}(\beta + \alpha) + b,$$

de donde, despejando c se obtiene:

$$c = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Es decir, es justamente en el punto medio del intervalo $[\alpha, \beta]$, en donde el valor de la función lineal $f(x) = mx + b$ es el de la altura del rectángulo de base $\beta - \alpha$ que tiene la misma área que la del trapecio limitado por el eje x, las rectas $x = \alpha$, $x = \beta$, y la recta $y = mx + b$.

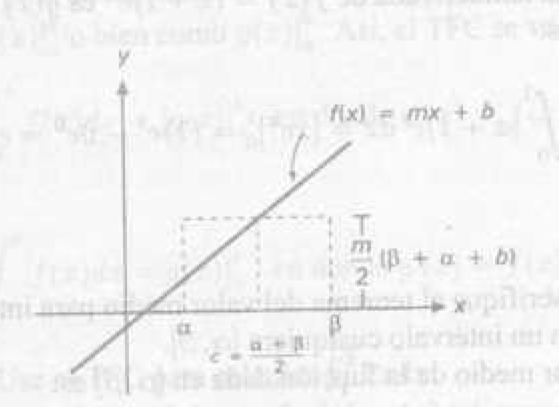


Figura 13.2.3. Ejemplo 13.2.9.

En este momento nuestro curso de cálculo integral toma un giro especial: no cabe duda que el cálculo de integrales definidas es mucho más sencillo haciendo uso del TFC, que usando directamente la definición (como límites de sumas de Riemann). Si nuestro objetivo es poder calcular integrales, porque éstas tienen muchas aplicaciones que presentaremos en capítulos posteriores, vale la pena entonces en este momento desviar un poco nuestra atención para estudiar cómo se calculan antiderivadas de funciones, pues, según el TFC, es con ellas con las que finalmente calcularemos las integrales definidas. Esto es lo que haremos en la próxima sección, y, con un poco más de detalle, en el próximo capítulo.

EJERCICIOS (13.2)

En los ejercicios 1 al 20, calcule la derivada $F'(x)$ de la función $F(x)$ indicada.

1. $F(x) = \int_1^5 \operatorname{sen}^4 t^2 dt.$ **2.** $F(x) = \int_1^x \operatorname{sen}^4 t^2 dt.$

3. $F(x) = \int_x^1 \operatorname{sen}^2 t dt + \int_3^x \cos t^2 dt.$ **4.** $F(x) = \int_4^x e^{-4t} dt + \int_x^4 te^t dt.$

5. $F(x) = \int_2^x \sqrt{1 + t + t^2} dt.$ **6.** $F(x) = x \int_0^x e^t dt.$

7. $F(x) = \int_x^4 x \cos^2 t dt.$ **8.** $F(x) = \int_1^{x^2} x^2 dt + \int_{x^2}^1 t^2 dt.$

9. $F(x) = \int_1^{x^3} \sqrt{1 + t^2} dt.$ **10.** $F(x) = \int_5^{x^2} \sqrt{4 + 3t^4} dt.$

11. $F(x)=\int_1^{1-x} e^{2t^2}dt.$ **12.** $F(x)=\int_{1-x}^{2-x} xe^{t^3}dt.$ **13.** $F(x)=\int_{x^2}^{\sqrt{x}} \cos^2 u du.$

14. $F(x)=\int_{x^2-1}^{1-x^2} \sqrt{2+t^2}dt.$ **15.** $F(x)=\int_{xe^x}^{x^2e^{2x}} x\cos^4 t dt.$

16. $F(x)=\dfrac{\int_{2x}^{3x}\sqrt{u^3+2}du}{x^2+1}.$ **17.** $F(x)=\dfrac{4}{\int_3^{x^3} e^{-t^2}dt}.$

18. $F(x)=\dfrac{x}{\int_{3x^2}^{3}\frac{1}{1+u^4}du}.$ **19.** $F(x)=\dfrac{\int_2^{x^2} te^{t^3}dt}{\int_{x^3}^{3} t^2e^t dt}.$

20. $F(x)=\dfrac{\int_{x^2}^{x^3}\frac{1}{1+t^3}dt}{\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}}\frac{1}{(1+u^3)^2}du}.$

En los ejercicios 21 a 25, suponga que f *y* g *son funciones continuas definidas en* $\mathbb{R}$. *Obtenga la derivada* $F'(x)$ *de la función* $F(x)$ *dada.*

21. $F(x)=\int_1^{\int_1^x g(t)dt} f(t)dt.$ **22.** $F(x)=\int_x^{\int_1^4 f(t)dt} g(t)dt.$

23. $F(x)=\int_{\int_2^x f^2(t)dt}^{\int_1^x f(t)dt} (f(t)-g(t))\,dt.$ **24.** $F(x)=\int_{\int_2^x x^2f^2(t)dt}^{\int_1^x xf(t)dt} g(u)du.$

25. $F(x)=\int_{\int_{1-x^2}^{2-x^2} f^2(t)dt}^{\int_{1-x}^{2-x} f(t)dt} xg(t)dt.$

En los ejercicios 26 al 35, calcule el límite indicado usando la regla de L'Hôpital.

26. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt}{x}.$ **27.** $\lim_{x\to 1}\dfrac{\int_1^x \sqrt{1+t^2}dt}{x^2-1}.$ **28.** $\lim_{x\to 0}\dfrac{3x}{\int_0^x e^{-u^2}du}.$

29. $\lim_{x\to 1}\dfrac{\int_1^x x\sqrt{1+t^2}dt}{x^2-1}.$ **30.** $\lim_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\sqrt{1+t^3}dt}{8x}.$ **31.** $\lim_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (1-\cos t)dt}{x^3}.$

32. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x t^2\sqrt{1+t^4}dt}{\int_0^x u^2\sqrt{1+u^5}du}$. **33.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x (2\cos t + 3\operatorname{sen} t + t^2 - 1)dt}{x}$.

34. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\int_0^{\int_1^x ue^{-u}du} t^2e^tdt}{x^3-1}$. **35.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^{\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt} \frac{\operatorname{sen} u}{u}du}{\int_0^{\int_x^0 \frac{t}{\operatorname{sen} t}dt} \frac{u}{\operatorname{sen} u}du}$.

En los ejercicios 36 al 45, determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función dada, así como sus extremos locales.

36. $f(x) = \int_1^x (t^2-1)dt$. **37.** $f(x) = \int_{2x}^2 (t-1)^2dt$. **38.** $f(x) = \int_0^{4-x} (5-t)dt$.

39. $f(x) = \int_4^x (u^2-3u+2)du$. **40.** $f(x) = \int_0^{2x} t^3e^{-t^2}dt$.

41. $f(x) = \int_{-4}^x \dfrac{2u}{3+u^4}du$. **42.** $f(x) = \int_3^{1-x^2} \dfrac{t}{1+t^2}dt$.

43. $f(x) = \int_{2x}^3 (t-4)\arctan(t-1)dt$. **44.** $f(x) = \int_{x^2}^4 \arctan(u-4)du$.

45. $f(x) = \int_1^{x^3} \dfrac{t}{t^2+t+1}dt$.

En los ejercicios 46 al 55, determine los intervalos de concavidad de la gráfica de la función dada, así como sus puntos de inflexión.

46. $f(x) = \int_1^x \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 4t\right)dt$. **47.** $f(x) = \int_2^x \left(\frac{1}{3}t^3 + t^2 - 8t\right)dt$.

48. $f(x) = \int_1^x (t^2-2t+1)\,e^tdt$. **49.** $f(x) = \int_x^3 (9t^2-48t+56)\,e^{-3t}du$.

50. $f(x) = \int_x^1 (9t^3-36t^2+42t-14)e^{3t}dt$.

51. $f(x) = \int_4^{x-2} \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 10t\right)dt$. **52.** $f(x) = \int_{x-1}^{2x+3} (t^2+3t+1)dt$.

53. $f(x) = \int_1^{2x-3} \left[\frac{1}{2}(t^2+1)\arctan t - \frac{1}{2}t\right] dt.$

54. $f(x) = \int_1^x \left(\frac{1}{2}\arctan^2 t - \arctan t\right) dt.$

55. $f(x) = \int_1^x \left[\left(\frac{1}{3}t^3 + t\right)\ln t - \frac{2}{9}t(2t^2+9)\right] dt.$

56. Suponga que la función continua f es tal que $f(x_0) = 0$. Demuestre que x_0 es un punto crítico de la función $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Dé un ejemplo (de función f) en el que:

a) en x_0 hay un máximo local de $F(x)$.
b) en x_0 hay un mínimo local de $F(x)$.
c) en x_0 no hay extremo local de $F(x)$.

57. Suponga que la función continua $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es positiva en el intervalo (a, b) y negativa fuera de él. Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, así como los extremos locales para la función $F(x) = \int_0^x f(u)du$.

58. Suponga que la función continua $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es no negativa en todo $\mathbf{R}$, anulándose solamente en x_0. Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, así como los extremos locales para la función $F(x) = \int_0^x f(u)du$.

59. Suponga que la función derivable $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tiene un único punto crítico en x_0, el cual es un mínimo local. Determine los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión para la función $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

60. Repita el ejercicio anterior si en x_0 la función f tiene un máximo local.

61. Suponga que la función derivable $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tiene dos (únicos) puntos críticos en $x_0 = 1$ y $x_1 = 4$, siendo x_0 un mínimo local y x_1 un máximo local. Determine los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión para la función $F(x) = \int_2^x f(t)dt$.

62. Calcule la primera y segunda derivadas de la función $f(x) = \int_0^x \left(\int_1^t \sqrt{1+u^2}du\right) dt$.

63. Repita el ejercicio anterior con la función $f(x) = \int_4^{3x} \left(\int_{2t-1}^4 u\sqrt{1+u}du\right) dt$.

64. Considere la función $f(x) = (1 + \operatorname{sen}^2 t)^{\int_2^x \sqrt{1+t^3}dt}$. Calcule $f'(x)$.

65. Repita el ejercicio anterior con la función $f(x) = \left(\int_{2x}^4 \frac{t}{1+t^2}dt\right)^{\int_4^{3x} \cos^4 t dt}$

En los ejercicios 66 al 70, calcule la derivada de la función $y = f(x)$ dada implícitamente en la expresión indicada.

66. $\int_1^y t\sqrt{1+t}dt + x^2 + 3y - 1 = 0.$ **67.** $x^2 + 3xy + \int_x^y te^t dt = 0.$

68. $2x + 5y + x\int_2^y (t^2+1)e^t dt = 0.$ **69.** $2x + 3xy + 5y + \int_0^x \operatorname{sen}^3 t dt = 0.$

70. $4x + x^2y^3 + y^2 + \int_x^y \sqrt{t+1}dt = 0.$

En los ejercicios 71 al 80, verifique que la derivada de la función $g(x)$ es igual a la función $f(x)$. Calcule entonces, usando el TFC, la integral definida indicada.

71. $g(x) = \frac{1}{3}\ln(1+x^3)$, $f(x) = \frac{x^2}{1+x^3}$. Calcule $\int_0^2 \frac{x^2}{1+x^3}dx.$

72. $g(x) = x\ln x - x$, $f(x) = \ln x$. Calcule $\int_1^3 \ln x dx.$

73. $g(x) = \frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{16}x^4$, $f(x) = x^3\ln x$. Calcule $\int_{\frac{1}{2}}^2 (3 + 2x^3\ln x)dx.$

74. $g(x) = x\arctan x - \ln\sqrt{1+x^2}$, $f(x) = \arctan x$. Calcule $\int_0^1 (2x + 5\arctan x)dx.$

75. $g(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\ln(e^{2x}+4)$, $f(x) = \frac{1}{e^{2x}+4}$. Calcule $\int_0^1 \frac{3}{e^{2x}+4}dx.$

76. $g(x) = -e^{-x}(x^2+2x+2)$, $f(x) = x^2e^{-x}$. Calcule $\int_{-1}^1 x^2e^{-x}dx.$

77. $g(x) = -\frac{1}{9}(3x+10)e^{-3x}$, $f(x) = (x+3)e^{-3x}$. Calcule $\int_1^4 (2x+6)e^{-3x}dx.$

78. $g(x) = \frac{2}{105}(x+3)^{\frac{3}{2}}(15x^2+6x+23)$, $f(x) = (x+1)^2\sqrt{x+3}.$
Calcule $\int_2^5 (4x^2+8x+4)\sqrt{x+3}dx.$

79. $g(x) = x\ln x$, $f(x) = 1 + \ln x$. Calcule $\int_1^e (2 - 3\ln x)dx.$

80. $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x$, $f(x) = \operatorname{sen}^2 2x$. Calcule $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x dx.$

En los ejercicios 81 al 85, use los resultados de los ejercicios anteriores para calcular el valor medio de la función $f(x)$ dada en el intervalo $[a, b]$ indicado.

81. $f(x) = \arctan x$, en el intervalo $[0, 1]$.

82. $f(x) = (3x + 9)e^{-3x}$, en el intervalo $[0, 2]$.

83. $f(x) = x^3 \ln x$, en el intervalo $[1, e^2]$.

84. $f(x) = 2 + \ln x$, en el intervalo $[1, 2e]$.

85. $f(x) = \operatorname{sen}^2 2x$, en el intervalo $[0, \pi]$.

86. Suponga que la gráfica de la función dos veces derivable $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tiene en $x = 1$ una recta tangente de pendiente -1, mientras que en $x = 5$ la recta tangente tiene pendiente 2. Calcule $\int_1^5 f''(x)dx$.

87. La gráfica de la función derivable $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ pasa por los puntos $(2, 4)$ y $(5, -3)$. Calcule el valor medio de la derivada $f'(x)$ en el intervalo $[2, 5]$.

88. La gráfica de la función derivable $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ pasa por los puntos $(-1, 2)$ y $(3, 4)$. Calcule el valor medio de la función $h(x) = 3 + 2f'(x)$ en el intervalo $[-1, 3]$.

89. Sea $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función derivable. Suponga que f es par y que su gráfica pasa por el punto $(1, 1)$. Calcule el valor medio de la derivada $f'(x)$ en el intervalo $[-1, 1]$. Interprete su resultado.

90. (LOS DOS TEOREMAS DEL VALOR MEDIO.) Sea $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una función continua, derivable, con derivada f' continua.

a) Use el teorema del valor medio para integrales (aplicado a f') y el TFC, para concluir que existe una $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

(que es el teorema del valor medio para derivadas).

b) Use el teorema del valor medio para derivadas (Lagrange) y el TFC, para concluir que existe una $c \in (a, b)$ tal que:

$$\int_a^b f'(x)dx = f'(c)(b - a).$$

c) ¿Qué significado geométrico tiene el valor medio de la derivada f' en el intervalo $[a, b]$?

13.3 ANTIDERIVACIÓN

Diremos que la función $g(x)$ es una **antiderivada** de la función $f(x)$, si $g'(x) = f(x)$. El TFC visto en la sección anterior nos muestra que el cálculo de integrales definidas está íntimamente relacionado con el problema de calcular antiderivadas de funciones. Alrededor de este último problema hay algunos detalles teóricos que debemos estudiar. En esta sección solamente daremos las ideas introductorias que nos permitan resolver algunos problemas más sobre el uso del TFC para calcular integrales definidas (y redondear así el estudio que emprendimos sobre este teorema en el presente capítulo), para luego, en el capítulo siguiente, abordar detalladamente los aspectos importantes de la teoría que hay alrededor del cálculo de antiderivadas de funciones.

El TFC nos dice que para calcular la integral $\int_a^b f(x)dx$ debemos procurar una antiderivada $g(x)$ de $f(x)$. La pregunta que surge de inmediato es si siempre podremos determinar esta antiderivada, y si en el caso de que la encontremos, ésta es única. Éste es un asunto delicado sobre el cual no ahondaremos mucho. Simplemente llamamos la atención a que el mismo TFC nos da siempre respuesta a estos cuestionamientos sobre la existencia de antiderivadas de funciones continuas $f(x)$: la función $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ es una antiderivada de $f(x)$ pues $g'(x) = f(x)$. Sin embargo, esta antiderivada "no nos sirve" para calcular la integral $\int_a^b f(x)dx$ (¿por qué?) Las funciones $g(x)$ que nos sirven deben estar "escritas con una fórmula" (no en términos de integrales). En lenguaje matemático preciso esto se establece diciendo que se procura una $g(x)$ "escrita en términos de funciones elementales". Una función elemental la podemos pensar como una combinación de las funciones algebraicas y trascendentes con las que hemos trabajado desde el curso de cálculo diferencial. Hay ejemplos famosos que muestran este tipo de diferencias sutiles entre lo que es simplemente una antiderivada y lo que es una antiderivada escrita en términos de funciones elementales. Uno de ellos es el siguiente: la función $g(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$ es una antiderivada de la función $f(x) = e^{-x^2}$, pues, según el TFC se tiene $g'(x) = e^{-x^2} = f(x)$. Sin embargo, desde el siglo pasado se sabe que no existe función elemental alguna $g(x)$ tal que $g'(x) = e^{-x^2}$ (para desgracia nuestra). Esta mala noticia no debe desanimar al estudiante. Hay también buenas noticias: existen muchas, muchísimas funciones importantes (para las aplicaciones) que sí tienen antiderivadas en términos de funciones elementales, y con las cuales podremos hacer uso del TFC para calcular sus integrales.

Otro hecho importante que hay que observar es que una función $f(x)$ no tiene una única antiderivada: si $g(x)$ es tal que $g'(x) = f(x)$, todas las funciones $\varphi(x)$ del tipo $\varphi(x) = g(x) + k$ son tales que $\varphi'(x) = (g(x)+k)' = g'(x) + k' = f(x) + 0 = f(x)$. Es decir, las funciones $\varphi(x)$ también son antiderivadas de $f(x)$. ¿Hay más antiderivadas de $f(x)$? En el próximo capítulo veremos que no. Por lo pronto observe que el TFC produce siempre el mismo resultado aunque usted tome antiderivadas distintas del tipo $\psi(x) = g(x) + k$. En efecto, siendo $\psi'(x) = f(x)$ se tiene que:

$$\int_a^b f(x)dx = \psi(x)]_a^b = \psi(b) - \psi(a) = (g(b)+k) - (g(a)+k) =$$
$$g(b) + k - g(a) - k = g(b) - g(a) = g(x)]_a^b$$

que es el mismo resultado si se hubiera usado el TFC con la antiderivada $g(x)$ de $f(x)$.

EJEMPLO 13.3.1. Verifique que la función $g(x) = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ es una antiderivada de $f(x) = \arctan x$. Use este hecho para calcular el área bajo la gráfica de la función $f(x) = \arctan x$ comprendida entre las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

SOLUCIÓN. La derivada de $g(x)$ es:

$$g'(x) = x(\arctan x)' + (\arctan x)(x)' - \frac{1}{2}\left(\ln(1+x^2)\right)'$$

$$= x\left(\frac{1}{1+x^2}\right) + \arctan x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)(2x) = \frac{x}{1+x^2} + \arctan x - \frac{x}{1+x^2} = \arctan x.$$

Con esto se prueba que $g'(x) = f(x)$, es decir, que $g(x)$ es una antiderivada de $f(x)$. Puesto que la función $f(x) = \arctan x$ es continua y no negativa en el intervalo $[0,1]$, el área que el ejemplo pide calcular es el valor de la integral $\int_0^1 \arctan x dx$. Entonces, según el TFC, se tiene:

$$\int_0^1 \arctan x dx = \left[x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1$$

$$= (1)\arctan 1 - \frac{1}{2}\ln(1+1^2) - 0\arctan 0 + \frac{1}{2}\ln(1+0^2)$$

$$= \arctan 1 - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2} \approx 0.4388.$$

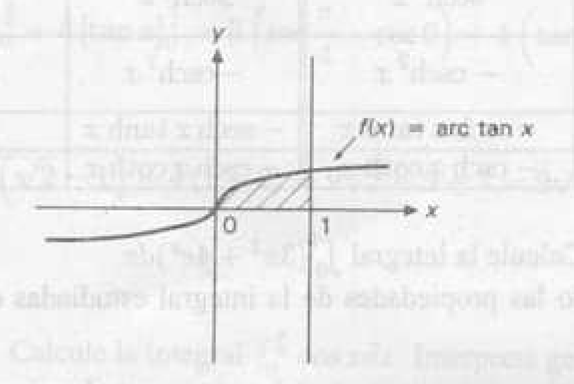


Figura 13.3.1. Ejemplo 13.3.1.

★

Las primeras antiderivadas con las que nos debemos familiarizar, son las de las "fórmulas de derivación leídas al revés". Si sabemos, por ejemplo, que la derivada de la función $g(x) = \arctan x$ es $g'(x) = f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, concluimos que una antiderivada de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

es $g(x) = \arctan x$. A continuación escribimos algunas de las fórmulas de derivación "al derecho y al revés", en donde se mostrarán entonces las antiderivadas correspondientes.

Función $g(x)$	Derivada $g'(x)$	Función $f(x)$	Antiderivada $g(x)$
x^n	nx^{n-1}	nx^{n-1}	x^n
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	$\cos x$	$\operatorname{sen} x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$	$-\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\tan x$	$\sec^2 x$	$\sec^2 x$	$\tan x$
$\cot x$	$-\csc^2 x$	$-\csc^2 x$	$\cot x$
$\sec x$	$\sec x \tan x$	$\sec x \tan x$	$\sec x$
$\csc x$	$-\csc x \cot x$	$-\csc x \cot x$	$\csc x$
$\operatorname{arcsen} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcsen} x$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
e^x	e^x	e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\ln x$
$\operatorname{senh} x$	$\cosh x$	$\cosh x$	$\operatorname{senh} x$
$\cosh x$	$\operatorname{senh} x$	$\operatorname{senh} x$	$\cosh x$
$\tanh x$	$\operatorname{sech}^2 x$	$\operatorname{sech}^2 x$	$\tanh x$
$\coth x$	$-\operatorname{csch}^2 x$	$-\operatorname{csch}^2 x$	$\coth x$
$\operatorname{sech} x$	$-\operatorname{sech} x \tanh x$	$-\operatorname{sech} x \tanh x$	$\operatorname{sech} x$
$\operatorname{csch} x$	$-\operatorname{csch} x \coth x$	$-\operatorname{csch} x \coth x$	$\operatorname{csch} x$

EJEMPLO 13.3.2. Calcule la integral $\int_0^1 (3x^2 + 4e^x)dx$.

SOLUCIÓN. Usando las propiedades de la integral estudiadas en el capítulo anterior podemos escribir:

$$\int_0^1 (3x^2 + 4e^x)dx = \int_0^1 3x^2 dx + 4\int_0^1 e^x dx.$$

Una antiderivada de $f_1(x) = 3x^2$ es $g_1(x) = x^3$ y una antiderivada de $f_2(x) = e^x$ es $g_2(x) = e^x$. Entonces, según el TFC tenemos:

$$\int_0^1 (3x^2 + 4e^x)dx = \int_0^1 3x^2 dx + 4\int_0^1 e^x dx = x^3\Big]_0^1 + 4\left(e^x\Big]_0^1\right)$$

$$= (1)^3 - (0)^3 + 4\left(e^1 - e^0\right) = 1 + 4(e-1) = 1 + 4e - 4 = 4e - 3.$$

★

EJEMPLO 13.3.3. Calcule la integral $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x(9\tan x + 4\sec x)dx$.

SOLUCIÓN. Usando las propiedades de la integral estudiadas en el capítulo anterior podemos escribir:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x(9\tan x + 4\sec x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (9\sec x\tan x + 4\sec^2 x)dx$$

$$= 9\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x\tan x dx + 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x dx.$$

Una antiderivada de $f_1(x) = \sec x\tan x$ es $g_1(x) = \sec x$ y una antiderivada de $f_2(x) = \sec^2 x$ es $g_2(x) = \tan x$. Entonces, según el TFC tenemos:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x(9\tan x + 4\sec x)dx = 9\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x\tan x dx + 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x dx$$

$$= 9\left[\sec x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + 4\left[\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 9\left(\sec\frac{\pi}{4} - \sec 0\right) + 4\left(\tan\frac{\pi}{4} - \tan 0\right)$$

$$= 9\left(\sqrt{2} - 1\right) + 4(1 - 0) = 9\sqrt{2} - 9 + 4 = 9\sqrt{2} - 5.$$

★

EJEMPLO 13.3.4. Calcule la integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$. Interprete geométricamente.

SOLUCIÓN. Sabemos que una antiderivada de $f(x) = \cos x$ es $g(x) = \operatorname{sen} x$. Entonces:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \left[\operatorname{sen} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0 = 1.$$

Como $f(x) = \cos x \geq 0$ para toda $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, y es además una función continua, lo que hemos calculado es el área bajo la gráfica de $f(x) = \cos x$ entre $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$

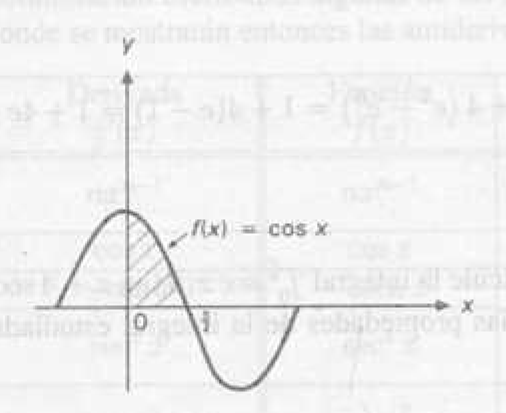


Figura 13.3.2. Ejemplo 13.3.4.

★

EJEMPLO 13.3.5. Calcule $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx$.

SOLUCIÓN. Una antiderivada de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ es $g(x) = \arctan x$. Entonces:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan x]_{-1}^{1} = \arctan 1 - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Observe que la función continua $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ es siempre positiva, de modo que el número calculado $\frac{\pi}{2}$ es el valor del área bajo la gráfica de esta función entre $x = -1$ y $x = 1$. Esta gráfica es una bruja de Agnesi (con $a = \frac{1}{2}$; véase nota histórica "*Traduttore Traditore*" del capítulo 9).

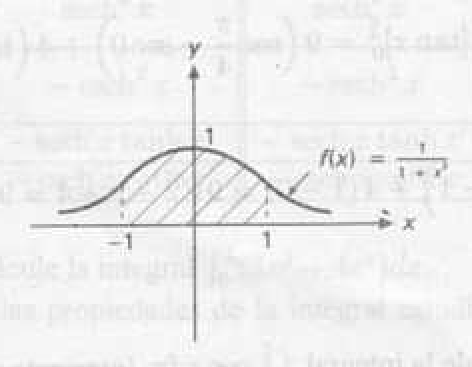


Figura 13.3.3. Ejemplo 13.3.5.

★

EJEMPLO 13.3.6. Calcule el área bajo la catenaria $f(x) = \cosh x$ entre $x = 0$ y $x = 1$.

SOLUCIÓN. Como el coseno hiperbólico es una función continua y positiva, el área requerida la calculamos como $\int_0^1 \cosh x dx$. Una antiderivada de $f(x) = \cosh x$ es $g(x) = \operatorname{senh} x$. Entonces:

$$\int_0^1 \cosh x dx = [\operatorname{senh} x]_0^1 = \operatorname{senh} 1 - \operatorname{senh} 0 = \operatorname{senh} 1 = \frac{e - e^{-1}}{2} \approx 1.1752.$$

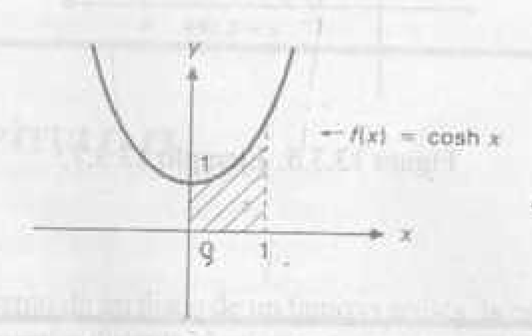


Figura 13.3.4. Ejemplo 13.3.6.

EJEMPLO 13.3.7. Calcule el valor medio de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $[1, 4]$.

SOLUCIÓN. Como se discutió en la sección 1, el valor medio de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b] = [1, 4]$ es:

$$\overline{y} = f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = \frac{\int_1^4 \frac{1}{x}dx}{4-1} = \frac{1}{3}\int_1^4 \frac{1}{x}dx.$$

Una antiderivada de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ es $g(x) = \ln x$, de modo que:

$$\int_1^4 \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^4 = \ln 4 - \ln 1 = \ln 4.$$

Entonces el valor medio requerido es:

$$\overline{y} = \frac{1}{3}\ln 4 \approx 0.4621.$$

Geométricamente, este valor es la altura del rectángulo de base $4 - 1 = 3$, cuya área es igual al área bajo la gráfica de la función continua y positiva $f(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $[1, 4]$. Tal valor medio, lo toma la función en el punto $c = \frac{3}{\ln 4} \approx 2.164$.

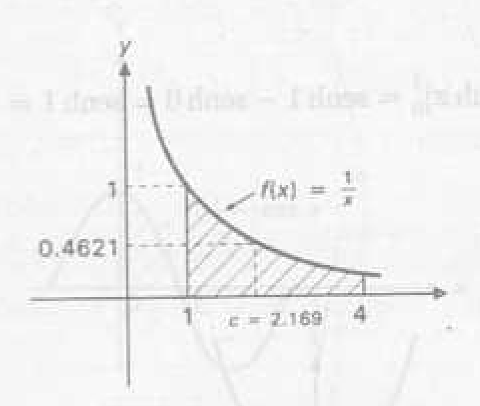


Figura 13.3.5. Ejemplo 13.3.7.

EJERCICIOS (13.3)

1. Suponga que $g(x)$ es una antiderivada de $f(x)$. Demuestre que para cualquier constante c, la función $cg(x)$ es una antiderivada de $cf(x)$.

2. Suponga que $g_1(x)$ es una antiderivada de $f_1(x)$, y que $g_2(x)$ es una antiderivada de $f_2(x)$. Demuestre que $g_1(x) + g_2(x)$ es una antiderivada de $f_1(x) + f_2(x)$. Generalice este resultado al caso de n funciones.

En los ejercicios 3 al 20, determine una antiderivada de la función $f(x)$ dada.

3. $f(x) = 4e^x$.

4. $f(x) = 6x^2$.

5. $f(x) = 6x^2 + 4x$.

6. $f(x) = 4$.

7. $f(x) = x^2 + x + 1 + x^{-1} + x^{-2}$.

8. $f(x) = 3\operatorname{sen} x + x$.

9. $f(x) = 2x + 4\cos x$.

10. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$.

11. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$.

12. $f(x) = 2\sec^2 x + x^4$.

13. $f(x) = \sec x(4\sec x + 7\tan x)$.

14. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 5}{x}$.

15. $f(x) = \dfrac{2}{x^2 + 1}$.

16. $f(x) = \operatorname{senh} x + 4\cosh x$.

17. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1 - x^2}} + x + 2$.

18. $f(x) = \csc x(3\csc x - 5\cot x)$.

19. $f(x) = \dfrac{(x^2 + 1)^2 + 3}{x^2 + 1}$.

20. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 + x^2} + 4}{1 + x^2}$.

21. Calcule el área bajo la curva $y = \operatorname{senh} x + \cosh x$ entre $x = 0$ y $x = 1$.

22. Calcule el área bajo la gráfica de la función $f(x) = 3\cos x - 8\operatorname{sen} x$ entre $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{4}$.

23. Calcule el valor medio de la función $f(x) = \frac{5}{x^2+1} + x^2 + 2$ en el intervalo $[-1, 1]$.

24. Calcule el valor medio de la función $f(x) = \cosh x$ en el intervalo $[-1, 1]$.

25. Verifique la validez del Teorema del Valor Medio (para integrales) con la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0, \pi]$.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 13

EXAMEN TIPO (A)

1. Después del lanzamiento de un disco de un famoso artista, la compañía disquera espera que el comportamiento de ventas durante el primer mes esté modelado por la función $f(x) = 25x^2 + 32x$, en donde $f(x)$ es el número de discos vendidos a los x días del lanzamiento (con $0 \le x \le 30$). Determine el promedio de ventas que la compañía disquera espera durante los primeros quince días en los que está el disco en el mercado.

2. Cuando una persona hace ejercicios aeróbicos durante 45 minutos, el comportamiento de su presión arterial (alta) desde el comienzo de los ejercicios hasta una hora después de que comenzó sus ejercicios, se puede modelar con la función $f(x) = -120(x^2 - x - 1)$, en donde $f(x)$ es la presión de la persona a las x horas de haber comenzado su ejercicio (con $0 \le x \le 1$). (La presión alta normal de una persona es de 120.) ¿En qué momento es máxima la presión arterial de la persona?, ¿cuál es su presión arterial promedio durante los 45 minutos en que realiza sus ejercicios?, ¿cuál es la presión arterial promedio durante toda la hora (incluyendo los 15 minutos de descanso después del ejercicio)?

3. En una cierta zona del sur de la Ciudad de México, el número de imecas entre las 12:00 y las 15:00 horas, se puede modelar con la función $f(x) = -20(x^2 - 4x - 5)$, en donde $f(x)$ es el número de imecas a las x horas después del mediodía (con $0 \le x \le 3$). Determine el número promedio de imecas que hay en esta zona de la ciudad, entre las 12:00 y las 15:00 horas. ¿A qué hora se alcanza este número promedio de imecas?

4. Verifique el teorema del valor medio para integrales con la función $f(x) = 3x^2 + x + 2$ en el intervalo $[2, 4]$ (es decir, verifique la existencia del número $c \in (2, 4)$ cuya existencia garantiza el teorema mencionado).

5. Considere las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^4$ en el intervalo $[0, 1]$. Al ver sus gráficas, ¿podría conjeturar cuál de las dos funciones tiene mayor valor promedio en tal intervalo? Calcule los valores promedios correspondientes, y verifique si su conjetura fue correcta.

6. Sea $F(x) = \int_2^x \sqrt{1+t^4}\,dt + \int_x^1 \operatorname{sen}^2 u\,du$. Determine $F'(x)$.

7. Sea $F(x) = \int_1^{3x+2} \operatorname{sen}^3 t\,dt$. Halle $F'(x)$.

8. Calcule el área bajo la gráfica de la función $f(x) = 3\cosh x + 4\operatorname{senh} x + 1$ entre $x = 0$ y $x = 2$.

9. Una antiderivada de la función $f(x) = x^2e^x$ es de la forma $g(x) = (x^2 + ax + b)e^x$, en donde a y b son ciertos coeficientes. Imponga la condición $g'(x) = f(x)$ para calcular a y b. Determine entonces el valor de la integral $\int_1^2 x^2e^x dx$.

10. Verifique que la función $g(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)\arctan x - \frac{1}{2}x$ es una antiderivada de $f(x) = x \arctan x$. Calcule entonces la integral $\int_0^1 x\arctan x dx$.

EXAMEN TIPO (B)

1. Con referencia al ejercicio 1 del examen tipo (A), determine el momento en el que el disco alcanza el promedio de ventas durante los primeros 15 días.

2. Con referencia al ejercicio 2 del examen tipo (A), determine el momento en el que la persona tiene la presión arterial promedio durante la hora en que está en el parque haciendo ejercicio.

3. Con referencia al ejercicio 3 del examen tipo (A), determine el número promedio de moscas entre las 12:00 y las 14:00 horas. ¿A qué hora se alcanza este número promedio de moscas?

4. Verifique el teorema del valor medio para integrales con la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en el intervalo $[-1, 1]$ (es decir, verifique la existencia del número $c \in (2, 4)$ cuya existencia garantiza el teorema mencionado).

5. Calcule el valor medio de la función $f(x) = 2\operatorname{sen} x + 3\cos x$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

6. Sea $F(x) = \int_{2x-3}^{x^2+2} x^2\sqrt{1+t^3}dt$. Determine $F'(x)$.

7. Sea $F(x) = \int_x^{\int_2^x te^{t^3}dt} t^2e^t dt$. Halle $F'(x)$.

8. Calcule el área bajo la gráfica de la función $f(x) = \frac{x(x^2+1)+2}{2x^2+2}$ entre $x = 0$ y $x = 1$.

9. Una antiderivada de la función $f(x) = x^3e^x$ es de la forma $g(x) = (x^3+ax^2+bx+c)e^x$, en donde a, b y c son ciertos coeficientes. Imponga la condición $g'(x) = f(x)$ para calcular estos coeficientes. Determine entonces el valor de la integral $\int_1^2 x^3e^x dx$.

10. Una antiderivada de la función $f(x) = \ln^4 x$ es de la forma

$$g(x) = x\left(\ln^4 x + a\ln^3 x + b\ln^2 x + c\ln x + d\right),$$

en donde a, b, c y d son ciertos coeficientes. Imponga la condición $g'(x) = f(x)$ para determinar el valor de estos coeficientes. Calcule entonces el área bajo la curva $y = \ln^4 x$ limitada por las rectas $x = 1$ y $x = e$.

NOTA HISTÓRICA: RIEMANN.



Bernhard Riemann (1826-1866), hijo de un pobre pastor de una parroquia rural en el norte de Alemania, fue indiscutiblemente uno de los hombres que marcaron el rumbo que tomaría la Matemática del siglo XX. Estando aún en la escuela secundaria, estudió las obras de Euler y Legendre, y se cuenta que dominó el tratado de este último sobre Teoría de Números en menos de una semana. Era tímido y muy modesto, con poco aprecio de su extraordinaria capacidad. A los 19 años llegó a la Universidad de Göttingen, siguiendo los deseos paternos, para estudiar teología y hacerse él mismo pastor. Afortunadamente, su vocación religiosa se vio muy prontamente sustituida por su atracción por la Matemática. La presencia de Gauss hacía de Göttingen el centro de la Matemática mundial. Pero Gauss resultaba inaccesible para la mayoría de los estudiantes, especialmente los recién llegados, y Riemann después de un año abandonó esa universidad para trasladarse a la de Berlín, donde atrajo la atención de Dirichlet y Jacobi. Dos años más tarde regresó a Göttingen, donde obtuvo su grado de Doctor en 1851. Durante los ocho años siguientes soportó una pobreza debilitante y produjo sus mejores obras. En 1854 fue nombrado Privatdozent (sin salario), que en ese tiempo era un paso necesario en la carrera académica. Gauss murió en 1855, y Dirichlet fue llamado a Göttingen para sucederle. Dirichlet ayudó a Riemann cuando estuvo en su mano, primero con un pequeño salario (una décima parte del de un profesor permanente) y después promocionándole a profesor ayudante. A la muerte de Dirichlet, en 1859, Riemann le sucedió en su puesto. Los años de penuria habían quedado atrás, pero para entonces su salud estaba destrozada. A los 39 años murió de tuberculosis en Italia, en el último de los viajes que emprendió huyendo del frío y húmedo clima del norte de Alemania. Riemann tuvo una vida breve y publicó relativamente poco, pero sus trabajos alteraron de modo sustancial el desarrollo de la matemática tanto en Análisis como en Geometría y Teoría de Números.

Su primera publicación fue su célebre disertación de 1851 sobre la teoría general de funciones de una variable compleja. Su teoría se basó en lo que hoy llamamos ecuaciones de Cauchy-Riemann (que nos dan condiciones necesarias para que una función de variable compleja sea diferenciable). Los métodos geométricos de Riemann en análisis complejo constituyeron el origen real de la topología, un vasto campo de la geometría que versa sobre el estudio de aquellas propiedades de las figuras que son invariantes bajo deformaciones continuas. Algunas de las funciones que aparecen en Teoría de Números sugirieron a Riemann el concepto de la integral que lleva su nombre, tal como en nuestros días figura en todos los libros de texto de Cálculo (éste es el concepto de integral que presentamos en el capítulo anterior). Las investigaciones pioneras de Riemann fueron los primeros pasos de una nueva rama de las matemáticas, la Teoría de las Funciones de una Variable Real.

Una de las aportaciones más famosas de Riemann a la matemática (además, claro está, de la formulación que hizo del concepto de integral), es una función, llamada función zeta de Riemann, sobre la cual el mismo Riemann hizo muchas afirmaciones que demostró y muchas otras que su prematura muerte le impidieron demostrar. Después de su muerte, muchos de los más célebres matemáticos han dedicado grandes esfuerzos para continuar estudiando la función zeta, creando, de hecho, nuevas ramas del Análisis gracias a sus intentos por demostrar las afirmaciones que hizo Riemann al respecto.

CAPÍTULO 14
INTEGRAL INDEFINIDA. SUSTITUCIONES

"La Matemática ha exigido siglos de excavación, y ese proceso de búsqueda no está concluido ni lo estará nunca. Pero hoy día vemos ya lo excavado con claridad suficiente como para distinguir entre ello y las herramientas utilizadas para la excavación."

Philip E. B. Jourdain

En el capítulo anterior surgió de manera natural la problemática de calcular antiderivadas de funciones dadas, pues con ellas es que se pueden evaluar las integrales definidas sin usar la defimción de estas últimas (como límites de sumas de Riemann), usando (en lugar de la definición) el Teorema Fundamental del Cálculo. Así pues, se coloca naturalmente en la perspectiva del desarrollo de este curso, el cálculo de antiderivadas de funciones. Este tema es, en cierto sentido, equivalente al del cálculo de derivadas de funciones que desarrollamos en los capítulos 5 y 6, en donde se estudiaron las técnicas para calcular la derivada de una función dada. Ahora procederemos al revés: nos darán una función y queremos encontrar otra función cuya derivada sea la función dada. En general este proceso es más complicado que el de derivación, y tendremos que ser más cautelosos y pacientes con las técnicas que nos permiten (en los casos en los que esto es posible) obtener tales antiderivadas de funciones. En este capítulo abordamos este estudio de manera sistemática, presentando las definiciones correspondientes y estudiando la idea de la "sustitución" en una integral indefinida, la cual es usada prácticamente en todos los problemas en donde el resultado de la antiderivada procurada no es inmediato. En capítulos posteriores abordaremos técnicas más especializadas para obtener antiderivadas de funciones, como las funciones racionales, algunas funciones irracionales, y las funciones trigonométricas.

14.1 DEFINICIÓN Y PROPIEDADES

Recordemos que una antiderivada de una función dada $f(x)$, es una función $g(x)$ con la propiedad de que $g'(x) = f(x)$. Si $g(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, y c es cualquier constante, la función $\varphi(x) = g(x) + c$ es también una antiderivada de $f(x)$, pues:

$$\varphi'(x) = (g(x) + c)' = g'(x) + (c)' = g'(x) + 0 = f(x).$$

Surge entonces la pregunta: ¿todas las antiderivadas de la función $f(x)$ son del tipo $g(x)$ más alguna constante? Es decir, ¿podemos decir que "esencialmente" **la** antiderivada de $f(x)$ es $g(x)$? (en el sentido de que cualquier otra antiderivada de $f(x)$ no es más que $g(x)$ sumada con una constante). La respuesta a esta pregunta es afirmativa (cuando las funciones involucradas están definidas en intervalos de $\mathbf{R}$) y es una consecuencia inmediata del teorema del valor medio para derivadas (Lagrange) estudiado en el capítulo 7.

TEOREMA 14.1.1. *Sea $f : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función derivable definida en el intervalo I, y sea $g(x)$ una antiderivada de $f(x)$, es decir que $g'(x) = f(x)$ para toda $x \in I$. Si $\varphi(x)$ es otra antiderivada de $f(x)$, entonces $\varphi(x) = g(x) + c$ para alguna constante c.*

En efecto, siendo $g(x)$ y $\varphi(x)$ antiderivadas de $f(x)$, se tiene que $g'(x) = \varphi'(x) = f(x)$ para toda $x \in I$. Si consideramos la función $h(x) = g(x) - \varphi(x)$, la cual está definida en el intervalo I de $\mathbf{R}$, vemos que su derivada es $h'(x) = g'(x) - \varphi'(x) = f(x) - f(x) = 0$ para toda $x \in I$. Entonces, siendo $h(x)$ una función definida en el intervalo I, que tiene derivada igual a cero en todo punto del intervalo, el teorema del valor medio para derivadas (una de sus consecuencias), nos permite afirmar que tal función es una constante. Es decir que $h(x) = c$ para toda $x \in I$, de donde $g(x) - \varphi(x) = c$, o bien $g(x) = \varphi(x) + c$, como se establece en el teorema anterior.

Por ejemplo, consideremos las funciones $g(x) = \operatorname{arcsen} x$ y $\varphi(x) = -\arccos x$, con $x \in (-1, 1)$. Estas dos funciones son antiderivadas de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pues:

$$g'(x) = (\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = f(x)$$

y

$$\varphi'(x) = (-\arccos x)' = -\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = f(x).$$

El teorema 14.1.1 afirma entonces que existe una constante $c \in \mathbf{R}$ tal que $g(x) = \varphi(x) + c$. De hecho, sabemos que $\operatorname{arcsen} x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ para toda $x \in (-1, 1)$. Es decir,

$$g(x) = \operatorname{arcsen} x = -\arccos x + \frac{\pi}{2} = \varphi(x) + \frac{\pi}{2}.$$

Podemos decir entonces que si $g(x)$ es tal que $g'(x) = f(x)$, esta función $g(x)$ es **la** antiderivada de $f(x)$, entendiendo que en realidad hay una infinidad de éstas, pero que todas las demás no son más que $g(x)$ sumada con alguna constante c.

Al conjunto de todas las antiderivadas de $f(x)$ *se le llama* **integral indefinida** *de* $f(x)$ *y se denota por* $\int f(x)dx$. *Si* $g(x)$ *es una de tales antiderivadas (es decir, si* $g'(x) = f(x)$*), entonces*

$$\int f(x)dx = g(x) + c.$$

A la constante c que aparece en la definición anterior, se le suele llamar "constante de integración". A la función $f(x)$ se le llama también, como en el caso de la integral definida, el **integrando.**

Quisiéramos llamar la atención a la notación que hemos usado para denotar a la integral indefinida de una función: ésta es "casi igual" a la notación de la integral definida, difiere de ésta solamente por los límites de integración. ¿Por qué usar una notación tan parecida para dos conceptos tan distintos? (La integral definida es un límite de sumas de Riemann y representa en algunos casos un área de una región en el plano, mientras que la integral indefinida de un función es el conjunto de todas las antiderivadas de la función). La razón de esta aparente falta de creatividad en la notación matemática empleada, es que estos dos conceptos son parientes muy cercanos. Tal parentesco lo da el Teorema Fundamental del Cálculo. En efecto, recuerde que si $g'(x) = f(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = [g(x)]_a^b = g(b) - g(a),$$

lo cual se puede escribir también como:

$$\int_a^b f(x)dx = \left[\int f(x)dx\right]_a^b = g(b) - g(a).$$

Es importante enfatizar el contenido de la definición que hemos dado de integral indefinida, y su relación con la operación de derivación. Primeramente observe que:

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x).$$

En efecto, la integral $\int f(x)dx$ no es más que el conjunto de antiderivadas de $f(x)$, es decir, funciones $g(x)+c$ en donde $g'(x) = f(x)$. Así entonces, $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = \frac{d}{dx}(g(x)+c) = g'(x) = f(x)$. Por otra parte también se tiene:

$$\int f'(x)dx = f(x) + c,$$

pues es claro que una antiderivada de $f'(x)$ es $f(x)$ (es como una adivinanza con la respuesta dada en su mismo enunciado: preguntarnos por $\int f'(x)dx$ es preguntarnos por las funciones que al derivarlas dan por resultado a $f'(x)$ (la derivada de $f(x)$): tales funciones son, en esencia, $f(x)$).

Los dos hechos anteriores nos muestran el carácter "inverso" que tienen los símbolos $\int$ y $\frac{d}{dx}$: cada uno de ellos deshace la acción del otro sobre una función. En $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$ vemos que la derivada deschace la acción de la integral indefinida de $f(x)$, y en $\int f'(x)dx = f(x) + c$ vemos que la integral indefinida $\int$ deshace la acción de la derivada $'$ de $f(x)$.

Presentaremos a continuación una lista de integrales indefinidas de algunas funciones, la cual es en esencia el contenido de la tabla de antiderivadas del capítulo anterior. Antes de escribirla, llamamos la atención al caso de la integral indefinida $\int x^n dx$. Si $n \neq -1$, es inmediato convencerse que:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,$$

pues la derivada de $g(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ es $g'(x) = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n$. Si $n = -1$, la función que estamos considerando es $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$. Sabemos que la derivada de $g(x) = \ln x$ es justamente, para $x > 0$, la función dada $f(x) = \frac{1}{x}$. Sin embargo, observe también que si $x < 0$, con la función $g(x) = \ln(-x)$, se tiene $g'(x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x} = f(x)$, de modo que como antiderivada de $f(x) = \frac{1}{x}$ debemos aceptar tanto la función $g_1(x) = \ln x$ (la cual está definida para $x > 0$) como $g_2(x) = \ln(-x)$ (la cual está definida para $x < 0$). Estas dos funciones las podemos escribir en una sola fórmula como $g(x) = \ln|x|$, con $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$. En resumen, la función $g(x) = \ln|x|$ es una antiderivada de $f(x) = \frac{1}{x}$ y, por lo tanto,

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c.$$

Presentamos entonces a continuación la lista de integrales indefinidas que son consecuencias inmediatas de las fórmulas de derivación que conocemos del curso de cálculo diferencial. Estas integrales son comúnmente referidas como "fórmulas de integración inmediata".

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$	10. $\int \operatorname{senh} x dx = \cosh x + c$
2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$	11. $\int \cosh x dx = \operatorname{senh} x + c$
3. $\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + c$	12. $\int \operatorname{sech}^2 x dx = \tanh x + c$
4. $\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + c$	13. $\int \operatorname{csch}^2 x dx = -\coth x + c$
5. $\int \sec^2 x dx = \tan x + c$	14. $\int \operatorname{sech} \tanh x dx = -\operatorname{sech} x + c$
6. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + c$	15. $\int \operatorname{csch} \coth x dx = -\operatorname{csch} x + c$
7. $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + c$	16. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \operatorname{arcsen} x + c \\ -\arccos x + c \end{cases}$
8. $\int e^x dx = e^x + c$	17. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$
9. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	

La justificación de las fórmulas anteriores es en todos los casos la misma: la parte que se encuentra a la derecha del signo de igualdad tiene por derivada al integrando $f(x)$ de la integral en el lado izquierdo de la fórmula. Un caso particular de la fórmula 1) es cuando $n = 0$. En este caso se tiene $\int dx = x + c$ (es decir, la derivada de $g(x) = x$ es $g'(x) = 1$, el cual —aunque no lo veamos— es el integrando que aparece en la integral indefinida del lado izquierdo).

En el siguiente teorema se expone la propiedad de linealidad de una integral indefinida.

TEOREMA 14.1.2.

a) Sean $f_1(x)$ y $f_2(x)$ dos funciones dadas. Entonces:

$$\int (f_1(x) + f_2(x))\, dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$$

b) Sea $f(x)$ una función dada, y k una constante. Entonces:

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx.$$

Para justificar la validez de estos hechos, debemos recordar simplemente el significado de la integral indefinida de una función. De manera esquemática podremos recordar este significado como:

$$\int (*)\, dx = \star + c \quad \text{si} \quad (\star)' = *$$

Con este esquema en mente, veamos la validez de lo establecido en el inciso a) del teorema anterior. Debemos verificar que la derivada de lo que se encuentra en el lado derecho de esa fórmula, es igual al integrando de la integral indefinida que está en el lado izquierdo de la misma. Es decir, debemos mostrar que:

$$\frac{d}{dx}\left(\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx\right) = f_1(x) + f_2(x).$$

Ahora bien, sabemos que la derivada de una suma es igual a la suma de las derivadas, de modo que:

$$\frac{d}{dx}\left(\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx\right) = \frac{d}{dx}\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$$

Pero, como ya habíamos observado previamente, $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$. Entonces:

$$\frac{d}{dx}\left(\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx\right) = \frac{d}{dx}\int f_1(x)dx + \frac{d}{dx}\int f_2(x)dx = f_1(x) + f_2(x),$$

que es justamente lo que queríamos probar. El inciso b) del teorema 14.1.2 se prueba de una manera análoga.

El contenido del teorema anterior lo recordamos pensando que "la integral indefinida de una suma de funciones es igual a la suma de las integrales indefinidas de cada una de las funciones", y "la integral indefinida de una constante por una función es igual a la constante por la integral indefinida de la función". En el capítulo anterior habíamos ya observado que estas propiedades las tiene también la integral definida y la derivada. Cuando usemos la propiedad de linealidad en una integral en la que en el integrando haya sumas y constantes multiplicando a los sumandos, comúnmente usaremos expresiones como: "separando en la suma de integrales y sacando las constantes de ellas . . . ."

EJEMPLO 14.1.1. Si $f(x)$ es una función derivable, simplifique la expresión

$$\int (3f'(x)+4)\,dx.$$

SOLUCIÓN. Por la propiedad de linealidad establecida en el teorema 14.1.2 se tiene:

$$\int (3f'(x)+4)\,dx = 3\int f'(x)dx + 4\int dx = 3f(x)+4x+c.$$

★

EJEMPLO 14.1.2. Compruebe que $\int \frac{\arctan x}{x^2}dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{\arctan x}{x} + c.$

SOLUCIÓN. Debemos ver que la derivada de la expresión del lado derecho es igual al integrando $f(x) = \frac{\arctan x}{x^2}$. Sea entonces $g(x) = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{\arctan x}{x} + c$, y obtengamos $g'(x)$. Se tiene:

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)(2x) - \frac{x\left(\frac{1}{1+x^2}\right) - \arctan x}{x^2}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} - \frac{x\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{x^2} + \frac{\arctan x}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{x(1+x^2)} + \frac{\arctan x}{x^2}$$

$$= \frac{1+x^2-x^2-1}{x(1+x^2)} + \frac{\arctan x}{x^2} = \frac{\arctan x}{x^2} = f(x).$$

★

Empezaremos ahora a ejercitarnos en el problema de obtener integrales indefinidas de funciones. En una primera etapa, trataremos simplemente de familiarizarnos con el uso de las fórmulas de integración establecidas anteriormente. Este proceso (de aplicación inmediata de tales fórmulas, junto con la propiedad de linealidad de la integral indefinida) se le suele llamar "integración inmediata".

EJEMPLO 14.1.3. Calcule la integral $\int (3x^2 + 7\sqrt{x} + 12)\,dx$.

SOLUCIÓN. Usando la propiedad de linealidad y la fórmula de integración 1), tenemos:

$$\int (3x^2 + 7\sqrt{x} + 12)\,dx = 3\int x^2dx + 7\int x^{\frac{1}{2}}dx + 12\int dx$$

$$= 3\left(\frac{x^{2+1}}{2+1}\right) + 7\left(\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right) + 12x + c = x^3 + 7\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) + 12x + c$$

$$= x^3 + \frac{14}{3}x^{\frac{3}{2}} + 12x + c.$$

★

EJEMPLO 14.1.4. Calcule la integral $\int \frac{(2x+3)^2}{x}dx$.

SOLUCIÓN. Hacemos primeramente algunas simplificaciones en el integrando, para dejarlo en términos de "integrandos conocidos" (de los que aparecen en las fórmulas que estamos usando)

$$\int \frac{(2x+3)^2}{x}dx = \int \frac{4x^2+12x+9}{x}dx = \int \left(4x + 12 + \frac{9}{x}\right)dx.$$

Separando en tres integrales y sacando las constantes, obtenemos:

$$\int \left(4x + 12 + \frac{9}{x}\right)dx = 4\int xdx + 12\int dx + 9\int \frac{1}{x}dx$$

$$= 4\left(\frac{x^2}{2}\right) + 12x + 9\ln|x| + c = 2x^2 + 12x + 9\ln|x| + c.$$

★

EJEMPLO 14.1.5. Calcule la integral $\int \tan^2 xdx$.

SOLUCIÓN. La función $f(x) = \tan^2 x$ no la tenemos como integrando en ninguna de las fórmulas de las que disponemos hasta este momento. Debemos hacer alguna simplificación previa (en estos casos usando identidades trigonométricas) con el objeto de procurar que aparezcan "funciones conocidas" (de las que conocemos sus integrales indefinidas). Recuerde que $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$. Entonces:

$$\int \tan^2 xdx = \int (1 + \sec^2 x)\,dx = \int dx + \int \sec^2 xdx = x + \tan x + c.$$

Es decir, la función $g(x) = x + \tan x$ es una función que al derivarla, da por resultado $f(x) = \tan^2 x$.

★

EJEMPLO 14.1.6. Calcule la integral $\int \frac{3(2^x)+2(3^x)}{5^{x+1}}dx$.
SOLUCIÓN. Reescribimos el integrando para obtener sólo expresiones del tipo a^x:

$$\int \frac{3(2^x)+2(3^x)}{5^{x+1}}dx = \int \left(3\frac{2^x}{(5)(5^x)} + 2\frac{3^x}{(5)(5^x)}\right)dx = \int \left(\frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^x + \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^x\right)dx$$

$$= \frac{3}{5}\int \left(\frac{2}{5}\right)^x dx + \frac{2}{5}\int \left(\frac{3}{5}\right)^x dx = \frac{3}{5}\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} + \frac{2}{5}\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{3}{5}\right)} + c.$$

★

EJEMPLO 14.1.7. Calcule la integral $\int \frac{\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$.
SOLUCIÓN. Haciendo algunas operaciones previas en el integrando, obtenemos:

$$\int \frac{\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{x^2+2x\sqrt{1-x^2}+1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{2x\sqrt{1-x^2}+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= \int \left(2x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx = 2\int x dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 2\left(\frac{x^2}{2}\right) + \operatorname{arcsen} x + c$$

$$= x^2 + \operatorname{arcsen} x + c.$$

★

EJEMPLO 14.1.8. Calcule la integral $\int \frac{3x^3(1+x)^2-6x^4+2}{5+5x^2}dx$.
SOLUCIÓN. Haciendo simplificaciones en el integrando, obtenemos:

$$\int \frac{3x^3(1+x)^2-6x^4+2}{5+5x^2}dx = \int \frac{3x^3(1+2x+x^2)-6x^4+2}{5(1+x^2)}dx$$

$$= \int \frac{3x^3+6x^4+3x^5-6x^4+2}{5(1+x^2)}dx = \int \frac{3x^3(1+x^2)+2}{5(1+x^2)}dx$$

$$= \int \left(\frac{3}{5}x^3 + \frac{2}{5(1+x^2)}\right)dx = \frac{3}{5}\int x^3 dx + \frac{2}{5}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{3}{5}\left(\frac{x^4}{4}\right) + \frac{2}{5}\arctan x + c.$$

Es decir:

$$\int \frac{3x^3(1+x)^2-6x^4+2}{5+5x^2}dx = \frac{3}{20}x^4 + \frac{2}{5}\arctan x + c.$$

Hemos obtenido entonces que la función $g(x) = \frac{3}{20}x^4 + \frac{2}{5}\arctan x$ tiene por derivada a $g'(x) = \frac{3x^3(1+x)^2-6x^4+2}{5+5x^2}$ (hecho que puede comprobarse de manera directa).

★

EJEMPLO 14.1.9. Calcule la integral $\int 3\cosh x\,(2+\operatorname{sech}^3 x)\,dx$.

SOLUCIÓN. Se tiene:

$$\int 3\cosh x\,(2+\operatorname{sech}^3 x)\,dx = \int\left(6\cosh x + 3(\cosh x)\left(\frac{1}{\cosh^3 x}\right)\right)dx$$

$$= \int\left(6\cosh x + 3\left(\frac{1}{\cosh^2 x}\right)\right)dx = 6\int \cosh x dx + 3\int \operatorname{sech}^2 x dx$$

$$= 6\operatorname{senh} x + 3\tanh x + c.$$

★

EJERCICIOS (14.1)

En los ejercicios 1 al 10, suponga que $f(x)$ es una función "suficientemente derivable". Simplifique la expresión dada.

1. $\int 3f'(x)dx.$

2. $\int (4f''(x)+5f'(x))dx.$

3. $\left(\int (x^2+\operatorname{sen} x + f(x))dx\right)'.$

4. $\left(x+\int f'(x)dx\right)'.$

5. $\int (xf(x))'\,dx.$

6. $\left(\int (x^2+3f(x)+x)'dx\right)'.$

7. $\int (xf'(x)+f(x))\,dx.$

8. $\int ((xf(x))''+xf'(x)+f(x))\,dx.$

9. $\frac{d}{dx}\int (x\operatorname{sen}^2 x + f^3(x))\,dx.$

10. $\frac{d}{dx}\int\left(x^3+\frac{d}{dx}\int x^3 f(x)dx + f''(x)\right)dx.$

En los ejercicios 11 al 30, calcule la integral indicada.

11. $\int (3+7x+x^2-5x^3)\,dx.$

12. $\int (1+4x)^2 dx.$

13. $\displaystyle\int \frac{1+x}{\sqrt{x}}dx.$ **14.** $\displaystyle\int \frac{(2+3x)^2}{x^2}dx.$ **15.** $\displaystyle\int x\left(x+\frac{2}{x}\right)^2 dx.$

16. $\displaystyle\int \frac{(4-x)^3}{x}dx.$ **17.** $\displaystyle\int \cot^2 x dx.$

18. $\displaystyle\int \left(\frac{4}{1+x^2}+4x+1\right)dx.$ **19.** $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{5-5x^2}}dx.$

20. $\displaystyle\int \frac{5}{7+7x^2}dx.$

21. $\displaystyle\int (3\operatorname{sen}^2 x - 7\operatorname{sen} x + 3\cos^2 x + 6\cos x + 1)\,dx.$

22. $\displaystyle\int (4\operatorname{sen} x + 5\cos x)\,dx.$ **23.** $\displaystyle\int (e^x + 3x + 2)dx.$

24. $\displaystyle\int \left(e^{\frac{x}{2}} + 2e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 dx.$ **25.** $\displaystyle\int \frac{x^3+x+5}{x^2+1}dx.$ **26.** $\displaystyle\int \frac{4+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{3-3x^2}}dx.$

27. $\displaystyle\int (2^x + x^2)\,dx.$ **28.** $\displaystyle\int \frac{4^{-x+1}+5^{-x+2}}{3^{-x-1}}dx.$

29. $\displaystyle\int (3\operatorname{senh} x + 2\tanh^2 x + 4)\,dx.$ **30.** $\displaystyle\int e^{\frac{x}{2}}\cosh\frac{x}{2}dx.$

14.2 SUSTITUCIONES ELEMENTALES

Supongamos que queremos calcular la integral

$$\int (2x+1)^{50}dx.$$

Una manera de proceder "a la brava" para obtener la función $g(x)$ cuya derivada sea $f(x) = (2x+1)^{50}$ sería desarrollar el binomio del integrando a la potencia 50, y quedarnos solamente con sumas de términos del tipo kx^r que son fáciles de integrar. Quizás el único pequeño inconveniente en este primitivo procedimiento es que en el desarrollo de tal binomio aparecen 51 sumandos… y esto, en principio, no suena nada agradable.

Recuerde que lo que estamos tratando de encontrar es una función $g(x)$ tal que su derivada sea $f(x) = (2x+1)^{50}$. Tratemos, en este ejemplo preliminar, de adivinar cuál sería la respuesta de la integral planteada. Por la experiencia adquirida en el curso de Cálculo Diferencial, quizás podríamos sospechar que en la función $g(x)$ que buscamos debe aparecer de alguna manera un término del tipo $(2x+1)^{51}$. Al derivar este término, queda un factor 51 multiplicando a $(2x+1)^{51-1} = (2x+1)^{50}$. Para que este factor 51 no aparezca, proponemos como respuesta a $h(x) = \frac{1}{51}(2x+1)^{51}$. En la derivada de esta última función efectivamente bajará el exponente 51 de $(2x+1)$ a multiplicar a la constante $\frac{1}{51}$, se cancelarán y no nos estorbarán. Luego quedará el término $(2x+1)^{50}$ que es el que queremos que aparezca, **PERO...** según la regla de la cadena, en la derivada de $h(x)$ aparecerá todavía el factor $\frac{d}{dx}(2x+1) = 2$, que es la derivada interna del integrando original $f(x)\ldots$ y este factor no lo deberíamos tener en el resultado. Es decir, si $h(x) = \frac{1}{51}(2x+1)^{51}$, tenemos:

$$h'(x) = \frac{1}{51}\left[(51)(2x+1)^{50}\right](2) = (2x+1)^{50}(2),$$

de modo que en tal caso, la función $h(x) = \frac{1}{51}(2x+1)^{51}$ (sumada con la constante de integración) no sería la respuesta de la integral original, sino que ésta sería la respuesta de la integral:

$$\int (2x+1)^{50} 2dx.$$

Una manera de cómo podemos arreglar este conflicto, es sacándole provecho a la propiedad de linealidad que tiene la integral indefinida (en particular, al hecho de que las constantes entran y salen del signo de integral), **y modificar la integral que queremos resolver para que aparezca esta última integral de la que ya tenemos la respuesta**. Si escribimos nuestra integral por resolver como:

$$\int (2x+1)^{50} dx = \int (2x+1)^{50}\left(\frac{2}{2}\right) dx = \int (2x+1)^{50}\left[(2)\left(\frac{1}{2}\right)\right] dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{2}\right)(2x+1)^{50}(2)dx = \frac{1}{2}\int (2x+1)^{50} 2dx,$$

nos encontramos con la agradabilísima sorpresa de que ya tenemos la respuesta de la última integral de esta expresión (la función $h(x) = \frac{1}{51}(2x+1)^{51}$ que habíamos propuesto). Entonces:

$$\int (2x+1)^{50} dx = \frac{1}{2}\int (2x+1)^{50} 2dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{51}(2x+1)^{51}\right] + c = \frac{1}{102}(2x+1)^{51} + c.$$

Con este procedimiento, hemos obtenido la función $g(x) = \frac{1}{102}(2x+1)^{51}$ cuya derivada es $f(x) = (2x+1)^{50}$, sin necesidad de desarrollar el binomio $(2x+1)^{50}$.

La idea expuesta en las líneas anteriores es una de las ideas más importantes que aparecerá constantemente en los problemas de cálculo de integrales que trataremos a partir de este capítulo. En esta idea está involucrada (en un proceso inverso) la regla de la cadena de la derivación estudiada en el curso de cálculo diferencial, y se usa cuando en el integrando

$f(x)$ tenemos una composición de funciones $\varphi(\psi(x))$ multiplicada por la derivada interna $\psi'(x)$, **excepto quizás, por alguna constante** k, la cual la hacemos aparecer en el integrando explotando la linealidad de la integral (la entrada y salida del signo de integración de constantes).

Así pues, al aplicar este procedimiento es muy importante tener la capacidad de identificar las funciones φ y ψ que se están componiendo, así como la derivada interna $\psi'(x)$. En este proceso de identificación se debe tener siempre presente que la integral que finalmente vamos a resolver es la de la función φ, y que por lo tanto esta integral debe ser lo suficientemente sencilla para que efectivamente la podamos resolver.

Una manera sistemática de implementar el procedimiento descrito anteriormente, es pensando en un **cambio de variable** (o una **sustitución**) en la integral dada: supongamos que conocemos que la función $g(x)$ es una antiderivada de la función $\varphi(x)$ (es decir, que $g'(x) = \varphi(x)$) y que la integral por resolver es:

$$\int \varphi(\psi(x))\,\psi'(x)dx.$$

Si llamamos u a la función $\psi(x)$, es decir, si consideramos la función $u = \psi(x)$, vemos que la diferencial de ésta es $du = \psi'(x)dx$, de modo que la integral anterior puede escribirse como:

$$\int \varphi(\psi(x))\,\psi'(x)dx \overset{u=\psi(x)}{=\!=\!=} \int \varphi(u)du.$$

Puesto que $g'(u) = \varphi(u)$, la respuesta de esta última integral será $g(u) + c$, o bien, en términos de x, $g(\psi(x)) + c$. Es decir:

$$\int \varphi(\psi(x))\,\psi'(x)dx = g(\psi(x)) + c.$$

Esta fórmula puede justificarse directamente si derivamos el lado derecho de ella (aplicando la regla de la cadena), y recordando que $g' = \varphi$:

$$\frac{d}{dx}\left(g(\psi(x)) + c\right) = g'(\psi(x))\,\psi'(x) = \varphi(\psi(x))\,\psi'(x).$$

En este esquema es muy común que la derivada $\psi'(x)$ no aparezca completa en el integrando. Si lo que le hace falta a ésta es alguna constante, esta constante la podemos acomodar en donde la necesitemos explotando la linealidad de la integral indefinida.

En nuestro ejemplo inicial, con la integral $\int(2x+1)^{50}dx$, en el integrando $f(x) = (2x+1)^{50}$ aparece la composición de la función $\varphi(x) = x^{50}$ (cuya integral sabemos resolver $\int x^{50}dx = \frac{1}{51}x^{51}+c$), con la función $\psi(x) = 2x+1$. Es decir, $f(x) = (2x+1)^{50} = \varphi(\psi(x))$. Sin embargo, el integrando no contiene la derivada interna $\psi'(x) = 2$. Como ésta es una constante, la podemos acomodar a nuestra conveniencia:

$$\int(2x+1)^{50}dx = \frac{1}{2}\int(2x+1)^{50}2dx \overset{\boxed{u=2x+1}}{=\!=\!=} \frac{1}{2}\int u^{50}du = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{51}u^{51}\right) + c$$

$$= \frac{1}{102}u^{51} + c = \frac{1}{102}(2x+1)^{51} + c.$$

En otras palabras, al aplicar las ideas del método de sustitución para el cálculo de una integral indefinida $\int f(x)dx$, debemos tener la capacidad de:

• reconocer en el integrando $f(x)$ una $u = \psi(x)$

• reconocer en el integrando (como factor de él) la diferencial $du = \psi'(x)dx$, la cual puede estar "incompleta", faltándole una constante. Esta constante la podemos acomodar a nuestra conveniencia, usando de manera adecuada la linealidad de la integral indefinida.

La familiarización con estas ideas es, como decíamos, de fundamental importancia para el resto del curso. Presentamos a continuación varios ejemplos.

EJEMPLO 14.2.1. Calcule la integral $\int (3x^2+4)^4 x dx$.

SOLUCIÓN. Si llamamos $u = 3x^2 + 4$, tenemos $du = 6xdx$. En el integrando aparece u^4 (cuya integral es fácil de obtener), y aparece x como factor, que excepto por el 6, es la diferencial du que necesitamos. Entonces:

$$\int (3x^2+4)^4 x dx = \frac{1}{6}\int (3x^2+4)^4(6xdx) = \overset{u=3x^2+4}{\longrightarrow} = \frac{1}{6}\int u^4 du$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{u^5}{5}\right) + c = \frac{1}{30}(3x^2+4)^5 + c.$$

★

EJEMPLO 14.2.2. Calcule la integral $\int x^2\sqrt{x^3+7}dx$.

SOLUCIÓN. Si llamamos $u = x^3 + 7$, tenemos $du = 3x^2dx$. En el integrando aparece $\sqrt{u}$ y x^2 como factor, el cual, excepto por un 3, es la du que necesitamos para que nos quede la integral $\int \sqrt{u}du$. Entonces:

$$\int x^2\sqrt{x^3+7}dx = \frac{1}{3}\int \sqrt{x^3+7}(3x^2dx) = \overset{u=x^3+7}{\longrightarrow} = \frac{1}{3}\int \sqrt{u}du$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) + c = \frac{2}{9}(x^3+7)^{\frac{3}{2}} + c.$$

★

EJEMPLO 14.2.3. Calcule la integral $\int \operatorname{sen} 2x dx$.

SOLUCIÓN. Si llamamos $u = 2x$, tenemos $du = 2dx$, de modo que, excepto por un 2, la integral por resolver es $\int \operatorname{sen} u du$. Tenemos entonces:

$$\int \operatorname{sen} 2x dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 2x(2dx) = \overset{u=2x}{\longrightarrow} = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} u du = \frac{1}{2}(-\cos u) + c = -\frac{1}{2}\cos 2x + c.$$

Es interesante notar que este ejemplo se hubiera podido abordar de una manera distinta: usando la identidad $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ tenemos:

$$\int \operatorname{sen} 2x dx = \int 2 \operatorname{sen} x \cos x dx = 2 \int \operatorname{sen} x \cos x dx.$$

Si en esta última integral llamamos $u = \operatorname{sen} x$, tenemos $du = \cos x dx$, de modo que esta integral no es más que $\int u du$. Se tiene entonces:

$$\int \operatorname{sen} 2x dx = 2 \int \operatorname{sen} x \cos x dx \overset{u=\operatorname{sen} x}{\longrightarrow} 2 \int u du = 2\left(\frac{u^2}{2}\right) + c = \operatorname{sen}^2 x + c.$$

Más aún, si en la integral $\int \operatorname{sen} 2x dx = 2 \int \operatorname{sen} x \cos x dx$, hacemos $u = \cos x$, tendríamos $du = -\operatorname{sen} x dx$ y:

$$\int \operatorname{sen} 2x dx = -2 \int \cos x(-\operatorname{sen} x dx) \overset{u=\cos x}{\longrightarrow} -2 \int u du = -2\left(\frac{u^2}{2}\right) + c = -\cos^2 x + c.$$

Aparentemente los dos resultados obtenidos $-\frac{1}{2}\cos 2x + c$, $\operatorname{sen}^2 x + c$ y $-\cos^2 x + c$ son diferentes. El teorema 14.1.1 visto al principio de este capítulo, nos dice que tal diferencia es sólo aparente: las funciones $g_1(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$, $g_2(x) = \operatorname{sen}^2 x$ y $g_3(x) = -\cos^2 x$ al ser antiderivadas de la misma función $f(x) = \operatorname{sen} 2x$, deben diferir solamente por una constante. En efecto, la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ nos muestra que $g_2(x) = g_3(x) + 1$. Por otra parte, usando la identidad $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$, podemos escribir:

$$g_1(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x = -\frac{1}{2}(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = -\frac{1}{2}(1 - 2\operatorname{sen}^2 x) = \operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{2} = g_2(x) - \frac{1}{2},$$

de donde:

$$g_2(x) = g_1(x) + \frac{1}{2},$$

como asegurábamos que tenía que ocurrir.

★

EJEMPLO 14.2.4. Calcule la integral $\int e^{4x} dx$.

SOLUCIÓN. Llamando $u = 4x$, tenemos $du = 4dx$, de modo que sólo hace falta un 4 acompañando a dx para tener la diferencial du, y resolver así la integral $\int e^u du$. Se tiene entonces:

$$\int e^{4x} dx = \frac{1}{4} \int e^{4x}(4dx) \overset{u=4x}{\longrightarrow} \frac{1}{4} \int e^u du = \frac{1}{4}e^u + c = \frac{1}{4}e^{4x} + c.$$

★

EJEMPLO 14.2.5. Calcule la integral $\int x^3 e^{-9x^4} dx$.

SOLUCIÓN. Llamando $u = -9x^4$, tenemos $du = -36x^3 dx$. La x^3 la tenemos como parte del integrando. Lo acomodamos entonces de tal manera que aparezca el -36 multiplicando a x^3 y poder identificar el integrando como $e^u du$. Se tiene:

$$\int x^3 e^{-9x^4} dx = -\frac{1}{36}\int e^{-9x^4}(-36x^3 dx) \overset{u=-9x^4}{=\!=\!\longrightarrow} = -\frac{1}{36}\int e^u du = -\frac{1}{36}e^u + c$$

$$= -\frac{1}{36}e^{-9x^4} + c.$$

★

EJEMPLO 14.2.6. Calcule la integral $\int \frac{1}{\sqrt{3^x}}dx$.

SOLUCIÓN. Reescribimos el integrando para identificar la función del tipo a^x que aparece en él:

$$\int \frac{1}{\sqrt{3^x}}dx = \int \frac{1}{(3^x)^{\frac{1}{2}}}dx = \int \frac{1}{3^{\frac{x}{2}}}dx = \int 3^{-\frac{x}{2}}dx.$$

Si hacemos $u = -\frac{x}{2}$, tenemos $du = -\frac{1}{2}dx$, de modo que debemos procurar un factor $-\frac{1}{2}$ multiplicando a dx para tener completa a du. Se tiene:

$$\int \frac{1}{\sqrt{3^x}}dx = \int 3^{-\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}}\int 3^{-\frac{x}{2}}\left(-\frac{1}{2}dx\right) \overset{u=-\frac{x}{2}}{=\!=\!\longrightarrow} = -2\int 3^u dx = -2\left(\frac{3^u}{\ln 3}\right) + c$$

$$= -\frac{2}{\ln 3}3^{-\frac{x}{2}} + c = -\frac{2}{(\ln 3)\sqrt{3^x}} + c.$$

★

EJEMPLO 14.2.7. Calcule la integral $\int \cos\sqrt{x}\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

SOLUCIÓN. Llamando $u = \sqrt{x}$, se tiene $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$, de modo que todo lo que hace falta es un factor 2 multiplicando a $\sqrt{x}$. Tenemos entonces:

$$\int \cos\sqrt{x}\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\int \cos\sqrt{x}\frac{dx}{2\sqrt{x}} \overset{u=\sqrt{x}}{=\!=\!\longrightarrow} = 2\int \cos u du = 2\operatorname{sen} u + c = 2\operatorname{sen}\sqrt{x} + c.$$

★

EJEMPLO 14.2.8. Calcule la integral $\int (e^x + e^{-2x})^2 dx$.

SOLUCIÓN. Desarrollando el binomio al cuadrado que aparece en el integrando, tenemos:

$$\int (e^x + e^{-2x})^2 dx = \int \left(e^{2x} + 2e^{-x} + e^{-4x}\right) dx = \int e^{2x}dx + 2\int e^{-x}dx + \int e^{-4x}.$$

Las tres integrales que se obtienen son del tipo $\int e^{ax}dx$ con a constante. Si en esta última hacemos $u = ax$, tenemos $du = adx$, y entonces:

$$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}\int e^{ax}(adx) \overset{u=ax}{=\!=\!\longrightarrow} = \frac{1}{a}\int e^u du = \frac{1}{a}e^u + c = \frac{1}{a}e^{ax} + c.$$

La integral del ejemplo nos queda entonces:

$$\int (e^x + e^{-2x})^2 dx = \int e^{2x} dx + 2\int e^{-x} dx + \int e^{-4x} = \frac{1}{2}e^{2x} - 2e^{-x} - \frac{1}{4}e^{-4x} + c.$$

★

En los siguientes cinco ejemplos, el esquema que aparecerá es el de un cociente, en el que en el numerador se identifica la diferencial del denominador (excepto quizás por alguna constante). Es decir, estos ejemplos nos conducirán a integrales del tipo

$$\int \frac{du}{u},$$

cuyo resultado es, como sabemos, $\ln|u| + c$.

EJEMPLO 14.2.9. Calcule la integral $\int \frac{e^x}{4e^x+3} dx$.

SOLUCIÓN. Llamando $u = 4e^x + 3$, tenemos $du = 4e^x dx$, de modo que el numerador es, excepto por el factor 4, la diferencial del denominador. Entonces:

$$\int \frac{e^x}{4e^x + 3} dx = \frac{1}{4}\int \frac{4e^x}{4e^x + 3} dx \overset{u=4e^x+3}{=\!=\!\longrightarrow\!=} \frac{1}{4}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{4}\ln|u| + c = \frac{1}{4}\ln(4e^x + 3) + c.$$

(Podemos evitar el uso del valor absoluto en el resultado, ya que lo que se encuentra dentro de él es siempre un número positivo.)

★

EJEMPLO 14.2.10. Calcule la integral $\int \frac{1}{x(9\ln x+8)} dx$.

SOLUCIÓN. Vea la integral a resolver como:

$$\int \frac{\frac{dx}{x}}{9\ln x + 8},$$

y observe que lo que está en el numerador es la diferencial del logaritmo natural. Haciendo entonces $u = 9\ln x + 8$, se tiene que $du = \frac{9}{x}dx$, y así:

$$\int \frac{\frac{dx}{x}}{9\ln x + 8} = \frac{1}{9}\int \frac{\frac{9}{x}dx}{9\ln x + 8} \overset{u=9\ln x+8}{=\!=\!\longrightarrow\!=} \frac{1}{9}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{9}\ln|u| + c = \frac{1}{9}\ln|9\ln x + 8| + c.$$

★

EJEMPLO 14.2.11. Calcule la integral $\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{8\cos^2 x+9} dx$.

SOLUCIÓN. Llamando $u = 8\cos^2 x + 9$, se tiene la diferencial $du = 16\cos x(-\operatorname{sen} x)dx = -16\operatorname{sen} x \cos x dx$. Entonces:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{8\cos^2 x + 9} dx = -\frac{1}{16}\int \frac{-16\operatorname{sen} x \cos x dx}{8\cos^2 x + 9} \overset{u=8\cos^2 x+9}{=\!=\!\longrightarrow\!=} -\frac{1}{16}\int \frac{du}{u}$$

$$= -\frac{1}{16}\ln|u| + c = -\frac{1}{16}\ln(8\cos^2 x + 9) + c.$$

(Como en el ejemplo 14.2.9, podemos evitar el valor absoluto del resultado pues tenemos $8\cos^2 x + 9 > 0$ para toda $x \in \mathbf{R}$.)

★

EJEMPLO 14.2.12. Calcule la integral $\int \tan x dx$.

SOLUCIÓN. Escribiendo la función tangente como el cociente del seno entre el coseno, la integral a calcular se ve como $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx$. Llamando $u = \cos x$ tenemos $du = -\operatorname{sen} x dx$. Entonces:

$$\int \tan x dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = -\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} dx \overset{u=\cos x}{=\!=\!\longrightarrow\!=} -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + c$$

$$= -\ln|\cos x| + c.$$

★

EJEMPLO 14.2.13. Calcule la integral $\int \frac{x^2+4x+2}{x^3+6x^2+6x+8} dx$.

SOLUCIÓN. Identificando al denominador de la función como $u = x^3 + 6x^2 + 6x + 8$, vemos que $du = (3x^2 + 12x + 6)dx = 3(x^2 + 4x + 2)dx$, de modo que:

$$\int \frac{x^2+4x+2}{x^3+6x^2+6x+8} dx = \frac{1}{3}\int \frac{3(x^2+4x+2)}{x^3+6x^2+6x+8} dx \overset{u=x^3+6x^2+6x+8}{=\!=\!\longrightarrow\!=} \frac{1}{3}\int \frac{du}{u}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|u| + c = \frac{1}{3}\ln|x^3 + 6x^2 + 6x + 8| + c.$$

★

En todos los ejemplos anteriores, la identificación de la función $u = \psi(x)$ y de su diferencial $du = \psi'(x)dx$ (que normalmente hemos completado con alguna constante) ha sido más o menos fácil de ver. En algunos otros casos, hay que hacer un "pequeño truco" previo a tal identificación para poder resolver la integral. En los siguientes 3 ejemplos se muestran casos de éstos.

EJEMPLO 14.2.14. Calcule la integral $\int \frac{1}{e^x+3} dx$.

SOLUCIÓN. Si quisiéramos ver el denominador del integrando como $u = e^x + 3$, tendríamos $du = e^x dx$, y el factor e^x no aparece en el numerador del cociente. Esta manera de ver las cosas no nos conduce entonces a la solución del problema. Sin embargo, si multiplicamos primeramente numerador y denominador de $f(x) = \frac{1}{e^x+3}$ por la función e^{-x}, nos queda:

$$\int \frac{1}{e^x+3}dx = \int \frac{1}{e^x+3}\left(\frac{e^{-x}}{e^{-x}}\right)dx = \int \frac{e^{-x}dx}{1+3e^{-x}},$$

de tal modo que si hacemos $u = 1+3e^{-x}$ tendremos $du = -3e^{-x}dx$, y sólo nos hace falta un factor -3 en el numerador para que en él aparezca la diferencial del denominador. Se tiene entonces:

$$\int \frac{1}{e^x+3}dx = \int \frac{e^{-x}dx}{1+3e^{-x}} = -\frac{1}{3}\int \frac{-3e^{-x}dx}{1+3e^{-x}} \overset{u=1+3e^{-x}}{=\!=\!\longrightarrow\!=} -\frac{1}{3}\int \frac{du}{u}$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|u| + c = -\frac{1}{3}\ln|1+3e^{-x}| + c.$$

⋆

EJEMPLO 14.2.15. Calcule la integral $\int \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}dx$.

SOLUCIÓN. Multiplicando y dividiendo el integrando por $\operatorname{sen} x$, y usando que $\tan x = \frac{1}{\cot x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ y que $\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$, obtenemos:

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}dx = \int \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}\right)dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x \cos x}dx$$

$$= \int \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right)dx = \int \tan x \csc^2 x dx = \int \frac{\csc^2 x}{\cot x}dx.$$

Ahora ya vemos en el integrando a la función $\cot x$ cuya diferencial es $-\csc^2 x dx$. Haciendo entonces $u = \cot x$ nos queda:

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}dx = \int \frac{\csc^2 x}{\cot x}dx = -\int \frac{-\csc^2 x}{\cot x}dx \overset{u=\cot x}{=\!=\!\longrightarrow\!=} -\int \frac{du}{u}$$

$$= -\ln|u| + c = -\ln|\cot x| + c.$$

⋆

EJEMPLO 14.2.16. Calcule la integral $\int \sec x dx$.

SOLUCIÓN. El truco para resolver esta integral es una idea muy bien pensada que es poco probable que se le ocurra a un estudiante en un primer curso de cálculo. La intención de este ejemplo es, como en los dos anteriores, simplemente mostrar el tipo de artificios a los que se puede recurrir para emplear la técnica de sustitución. Tales artificios serán, poco a poco, más naturales (al menos esperamos que sean no tan artificiales) para el estudiante.

Multiplicando y dividiendo por $\sec x + \tan x$ obtenemos:

$$\int \sec x dx = \int \sec x\left(\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\right)dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}dx \overset{u=\sec x+\tan x}{=\!=\!\longrightarrow}$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|\sec x + \tan x| + c.$$

De manera análoga se obtiene que:

$$\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + c.$$

Estos resultados los usaremos ya como "fórmulas" en lo que resta del libro.



EJEMPLO 14.2.17. Calcule la integral $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x dx$, escribiendo ésta como

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x(\cos x dx)$$

y haciendo la sustitución $u = \operatorname{sen} x$.

SOLUCIÓN. Escribiendo $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$, se tiene:

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x dx = \int \operatorname{sen}^3 x(1 - \operatorname{sen}^2 x)\cos x dx \overset{u=\operatorname{sen} x}{=\!=\!\longrightarrow\!=} \int u^3(1-u^2)du$$

$$= \int (u^3 - u^5)du = \frac{1}{4}u^4 - \frac{1}{6}u^6 + c = \frac{1}{4}\operatorname{sen}^4 x - \frac{1}{6}\operatorname{sen}^6 x + c.$$

⋆

EJEMPLO 14.2.18. Calcule la integral del ejercicio anterior, transformando primeramente el integrando $f(x) = \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x$ con la identidad $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x \cos x$.

SOLUCIÓN. Se tiene:

$$f(x) = \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x = (\operatorname{sen} x \cos x)^3 = \left(\left(\frac{1}{2}\right)(2\operatorname{sen} x \cos x)\right)^3 = \left(\left(\frac{1}{2}\right)\operatorname{sen} 2x\right)^3$$

$$= \frac{1}{8}\operatorname{sen}^3 2x.$$

Entonces:

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x dx = \int \frac{1}{8}\operatorname{sen}^3 2x dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x \operatorname{sen} 2x dx = \frac{1}{8}\int (1 - \cos^2 2x)\operatorname{sen} 2x dx$$

$$= \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{2}\right)\int (1 - \cos^2 2x)(-\operatorname{sen} 2x)(2dx) \overset{u=\cos 2x}{=\!=\!\longrightarrow\!=} -\frac{1}{16}\int (1-u^2)du$$

$$= -\frac{1}{16}\left(\int du - \int u^2 du\right) = -\frac{1}{16}\left(u - \frac{1}{3}u^3\right) + c = -\frac{1}{16}\left(\cos 2x - \frac{1}{3}\cos^3 2x\right) + c.$$

Observe que la respuesta obtenida en el ejemplo anterior fue:

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x dx = \frac{1}{4}\operatorname{sen}^4 x - \frac{1}{6}\operatorname{sen}^6 x + c,$$

mientras que en el presente ejemplo hemos obtenido:

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x dx = -\frac{1}{16}\left(\cos 2x - \frac{1}{3}\cos^3 2x\right) + c.$$

Según el teorema 14.1.1., las dos funciones $g_1(x) = \frac{1}{4}\operatorname{sen}^4 x - \frac{1}{6}\operatorname{sen}^6 x$ y $g_2(x) = -\frac{1}{16}\left(\cos 2x - \frac{1}{3}\cos^3 2x\right)$ deben diferir solamente por una constante (pues ambas, al derivarlas, dan por resultado la misma función $f(x) = \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x$). Recordando la identidad $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$, tenemos que:

$$g_2(x) = -\frac{1}{16}\left(\cos 2x - \frac{1}{3}\cos^3 2x\right) = -\frac{1}{16}\left(1 - 2\operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{3}\left(1 - 2\operatorname{sen}^2 x\right)^3\right)$$

$$= -\frac{1}{16}\left(1 - 2\operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{3}\left(1 - 6\operatorname{sen}^2 x + 12\operatorname{sen}^4 x - 8\operatorname{sen}^6 x\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{16}\left(1 - 2\operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{3} + 2\operatorname{sen}^2 x - 4\operatorname{sen}^4 x + \frac{8}{3}\operatorname{sen}^6 x\right)$$

$$= -\frac{1}{16}\left(\frac{2}{3} - 4\operatorname{sen}^4 x + \frac{8}{3}\operatorname{sen}^6 x\right) = -\frac{1}{24} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}^4 x - \frac{1}{6}\operatorname{sen}^6 x = -\frac{1}{24} + g_1(x),$$

de donde se obtiene el resultado esperado, es decir, la función $g_2(x)$ no es más que la función $g_1(x)$ sumada a la constante $-\frac{1}{24}$.

★

EJERCICIOS (14.2)

En cada uno de los ejercicios 1 al 60, resuelva la integral indicada.

1. $\int \sqrt{3 + 7x}dx.$ **2.** $\int \sqrt{3x + 7}dx.$ **3.** $\int \sqrt[3]{1 - 10x}dx.$

4. $\int (2 + 5x)^4 dx.$ **5.** $\int x\sqrt{4x^2 + 3}dx.$ **6.** $\int x\sqrt[3]{3 - 8x^2}dx.$

7. $\int x(7+x^2)^5 dx.$ **8.** $\int x^3(2+3x^4)^4 dx.$

9. $\int (x+1)\sqrt{x^2+2x+8}dx.$ **10.** $\int (2x+3)\sqrt[3]{2x^2+6x+1}dx.$

11. $\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx.$ **12.** $\int \frac{3}{(7x+1)^3}dx.$ **13.** $\int \frac{x}{\sqrt{2+3x^2}}dx.$

14. $\int \frac{(x+2)^2}{\sqrt{x^3+6x^2+12x+4}}dx.$ **15.** $\int \frac{(x+2)^2}{x^3+6x^2+12x+4}dx.$

16. $\int \frac{x+1}{7(x+1)^2+4}dx.$ **17.** $\int \operatorname{sen}(20x-12)dx.$

18. $\int -3\cos(7x+1)dx.$ **19.** $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx.$

20. $\int \operatorname{sen}(4\operatorname{sen}x)\cos x dx.$ **21.** $\int \cos(3\operatorname{sen}x)\cos x dx.$ **22.** $\int \operatorname{sen}(5\cos x)\operatorname{sen}x dx.$

23. $\int x\cos(\cos x^2)\operatorname{sen}x^2 dx.$ **24.** $\int e^x\operatorname{sen}(4e^x+2)dx.$

25. $\int x\operatorname{sen}(11x^2-10)dx.$ **26.** $\int (x+2)\cos(x^2+4x+5)dx.$

27. $\int \sqrt[3]{8+3x^4}x^3 dx.$ **28.** $\int e^{3x}\cosh e^{3x}dx.$ **29.** $\int e^{4\tan x}\frac{dx}{\cos^2 x}.$

30. $\int (9x^2+9x+1)^{\frac{2}{5}}(2x+1)dx.$ **31.** $\int (\operatorname{sen}x+\cos x)^2 dx.$

32. $\int e^{\cos 3x}\operatorname{sen}3x dx.$ **33.** $\int e^{e^x+x}dx.$ **34.** $\int (2^x+3^x)^2 dx.$

35. $\int \sqrt{\operatorname{sen}^2 x+4}\operatorname{sen}x\cos x dx.$ **36.** $\int 2^{x^2}x dx.$

37. $\int 2^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}.$ **38.** $\int \tan^4 x\sec^2 x dx.$ **39.** $\int \frac{\operatorname{sen}2x}{\cos^2 x+4}dx.$

40. $\int \left(\frac{\tan^3 x}{\cos x}\right)^2 dx.$ **41.** $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx.$

42. $\int \frac{1}{(1+x^2)\arctan x}dx.$ **43.** $\int \frac{x}{(1+x^4)\arctan^3 x^2}dx.$

44. $\int \sqrt{\cos^2 \sqrt{x} + 10} \dfrac{\operatorname{sen} 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$ **45.** $\int \operatorname{sen}(\cos^2 \sqrt{x}) \dfrac{\operatorname{sen} 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$

46. $\int e^{e^{e^x}} e^{e^x + x} dx.$ **47.** $\int \dfrac{9e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1} dx.$ **48.** $\int \dfrac{1}{1 + e^{-x}} dx.$

49. $\int \dfrac{4}{5 + e^x} dx.$ **50.** $\int \sec x(\tan x + \sec x \tan x) dx.$

51. $\int \dfrac{5}{x \ln x} dx.$ **52.** $\int \dfrac{3}{x \ln^2 \sqrt{x}} dx.$ **53.** $\int \dfrac{1}{x \ln^5 x} dx.$

54. $\int \dfrac{4 \arctan^2 x + 2x^2 + 5x + 2}{1 + x^2} dx.$

55. $\int \dfrac{x^3}{x^8 + 1} dx.$ (Sugerencia: haga $u = x^4$.)

56. $\int \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x}} dx.$

57. $\int \tan^4 x dx.$ (Sugerencia: $\tan^4 x = \tan^2 x \tan^2 x = \tan^2 x(\sec^2 x - 1) = ...$)

58. $\int x \operatorname{senh} x^2 \cosh x^2 \operatorname{senh}(\cosh^2 x^2) dx.$

59. $\int \dfrac{x^2 \operatorname{senh} x^3}{\cosh^4 x^3} dx.$ **60.** $\int \dfrac{1}{\operatorname{senh} x \cosh x} dx.$

14.3 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

El problema de obtener la integral indefinida de una función $f(x)$ que involucra funciones trigonométricas no es nada sencillo. En algunos casos hay que recurrir a sustituciones complejas que conducen a su vez a integrales que hay que resolver con técnicas especializadas (que estudiaremos en los últimos dos capítulos del libro). Sin embargo, es muy común encontrarse con integrales de algunas funciones trigonométricas que se pueden resolver sin mucha dificultad. En esta sección nos ocuparemos de algunas de ellas. En todos los casos que veremos aquí, la idea es modificar el integrando usando identidades trigonométricas adecuadas

que nos permitan expresar la integral como suma de integrales sencillas de resolver (digamos, como las de la sección anterior). Las identidades trigonométricas que más usaremos son:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1,$$

$$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos 2x,$$

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x.$$

Combinando las dos primeras de estas identidades, obtenemos:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

y

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

las cuales son identidades que usaremos mucho en la resolución de algunas integrales de funciones trigonométricas.

Damos a continuación algunas recomendaciones de carácter general que nos indican cómo proceder ante una integral determinada con funciones trigonométricas. Advertimos que éstas no deben tomarse como reglas estrictas: será la experiencia en este tipo de cálculos la que nos indicará si alguna de tales reglas debe o no aplicarse en un caso determinado. Y esta experiencia, solamente el tiempo y el empeño de practicar con el cálculo de integrales nos la darán.

I) Una integral del tipo $\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x dx$, en donde n o m es un entero positivo impar, digamos $n = 2k + 1$, $k = 0, 1, \ldots$ se puede resolver usando la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, de la siguiente manera. Para fijar ideas supongamos que n es el entero positivo impar, $n = 2k + 1$. Entonces:

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x dx = \int \operatorname{sen}^{2k+1} x \cos^m x dx = \int \left(\operatorname{sen}^2 x\right)^k x \cos^m x dx$$

$$= \int \cos^m x \left(1 - \cos^2 x\right)^k \operatorname{sen} x dx.$$

Si en la última integral hacemos $u = \cos x$, tenemos $du = -\operatorname{sen} x dx$ y entonces:

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x dx = -\int \cos^m x \left(1 - \cos^2 x\right)^k (-\operatorname{sen} x dx) \overset{u=\cos x}{=\!=\!=} -\int u^m (1-u^2)^k du.$$

La última integral se resuelve desarrollando el binomio, realizando el producto indicado, y separando en varias integrales.

Estas mismas ideas se aplican en el caso de la integral $\int \cos^n x dx$.

EJEMPLO 14.3.1. Calcule la integral $\int \cos^2 x \operatorname{sen}^3 x dx$.
SOLUCIÓN. Siguiendo la recomendación planteada anteriormente, se tiene:

$$\int \cos^2 x \operatorname{sen}^3 x dx = \int \cos^2 x \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x dx = \int \cos^2 x(1 - \cos^2 x) \operatorname{sen} x dx$$

$u = \cos x$ $du = -\operatorname{sen} x$

$-\int u^2(1-u^2)\,du$

$$= -\int \cos^2 x(1 - \cos^2 x)(-\operatorname{sen} x dx) \overset{u=\cos x}{=\!=\!=} -\int u^2(1-u^2)du = \int u^4 du - \int u^2 du$$

$$= \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{3}u^3 + c = \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + c.$$

★

EJEMPLO 14.3.2. Calcule la integral $\int \cos^5 x dx$.
SOLUCIÓN. Se tiene:

$$\int \cos^5 x dx = \int \cos^4 x \cos x dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)^2 \cos x dx \overset{u=\operatorname{sen} x}{=\!=\!=} \int (1-u^2)^2 du$$

$$= \int (1 - 2u^2 + u^4) du = \int du - 2\int u^2 dx + \int u^4 du$$

$$= u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + c = \operatorname{sen} x - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + c.$$

★

II) Una integral del tipo $\int \operatorname{sen}^n x dx$ o $\int \cos^n x dx$, en donde n es un entero positivo par, digamos $n = 2k$, $k = 1, 2, ...$ se puede resolver usando la identidad $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, o bien $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$, respectivamente.

EJEMPLO 14.3.3. Calcule la integral $\int \cos^2 x dx$.
SOLUCIÓN. Usando que $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$, se tiene:

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(\int dx + \int \cos 2x dx\right) = \frac{1}{2}\left(x + \int \cos 2x dx\right).$$

La integral que hemos dejado indicada se resuelve fácilmente con las ideas expuestas en la sección anterior:

$$\int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x(2dx) \overset{u=2x}{=\!=\!=} \frac{1}{2}\int \cos u du = \frac{1}{2}\operatorname{sen} u + c = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + c.$$

Entonces:

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\left(x + \int \cos 2x dx\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right) + c.$$

★

EJEMPLO 14.3.4. Calcule la integral $\int \operatorname{sen}^4 x dx$.
SOLUCIÓN. Usando que $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, se tiene:

$$\int \operatorname{sen}^4 x dx = \int \left[\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right]^2 dx = \frac{1}{4}\int (1-2\cos 2x + \cos^2 2x) dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int dx - 2\int \cos 2x dx + \int \cos^2 2x dx\right) = \frac{1}{4}\left(x - 2\int \cos 2x dx + \int \cos^2 2x dx\right).$$

La primera integral que hemos dejado indicada es, como vimos en el ejemplo anterior $\int \cos 2x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$. La segunda integral es la del cuadrado de la función coseno, que resolvemos según recomendamos en este apartado con la identidad $\cos^2 2x = \frac{1}{2}(1+\cos 4x)$, obteniendo:

$$\int \cos^2 2x dx = \int \frac{1}{2}(1+\cos 4x) dx = \frac{1}{2}\left(\int dx + \int \cos 4x dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\int \cos 4x (4dx)\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x\right) + c.$$

Entonces:

$$\int \operatorname{sen}^4 x dx = \frac{1}{4}\left(x - 2\int \cos 2x dx + \int \cos^2 2x dx\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(x - 2\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right) + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x\right)\right) + c = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x - \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x\right) + c.$$

★

EJERCICIOS (14.3)

En los ejercicios 1 al 20, calcule la integral indicada.

1. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos x dx.$ **2.** $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x dx.$ **3.** $\int \operatorname{sen}^3 3x \cos^3 3x dx.$

4. $\int \operatorname{sen} 4x \cos^3 4x dx.$ **5.** $\int \operatorname{sen}^2 2x \cos^3 2x dx.$ **6.** $\int \operatorname{sen} 2x \cos x dx.$

7. $\int \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x dx.$ **8.** $\int \cos 2x \operatorname{sen} x dx.$ **9.** $\int \cos 2x \cos x dx.$

10. $\int \operatorname{sen} 2x \cos 2x dx.$ **11.** $\int \operatorname{sen}^2 2x \cos x dx.$ **12.** $\int \operatorname{sen}^2 3x dx.$

13. $\int \cos^4 2x dx.$ **14.** $\int \operatorname{sen}^2 3x \cos^2 3x dx.$ **15.** $\int \operatorname{sen}^4 2x \cos^4 2x dx.$

16. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x dx.$ **17.** $\int \operatorname{sen}^6 x dx.$ **18.** $\int \cos^6 x dx.$

19. $\int (2 - 3 \operatorname{sen} x)^2 dx.$ **20.** $\int \operatorname{sen}^3 2x \cos^2 3x dx.$

En los ejercicios 21 al 30, use las identidades trigonométricas:

$$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\operatorname{sen} \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

(establecidas en los ejercicios 20, 21 y 22, respectivamente, de la sección 8 del capítulo 1), para calcular la integral indicada.

21. $\int \operatorname{sen} 3x \cos 4x dx.$ **22.** $\int \operatorname{sen} 2x \cos 8x dx.$ **23.** $\int \operatorname{sen} 4x \operatorname{sen} 7x dx.$

24. $\int \cos 3x \cos 7x dx.$ **25.** $\int \operatorname{sen}(-2x) \operatorname{sen} 6x dx.$ **26.** $\int \cos 4x \cos(-8x) dx.$

27. $\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x dx.$ **28.** $\int \operatorname{sen} 3x \cos 4x \cos 6x dx.$

29. $\int \operatorname{sen} 4x \operatorname{sen} 6x \cos 5x dx.$ **30.** $\int \cos 3x \cos 7x \cos 9x dx.$

14.4 CAMBIO DE VARIABLE EN LA INTEGRAL INDEFINIDA

En algunas integrales $\int f(x)dx$ resulta conveniente (en ocasiones necesario) cambiar la variable x del integrando (y su diferencial dx), por una nueva variable t según una cierta función $x = g(t)$. En tal caso, sustituyendo la x del integrando por $g(t)$ y la dx por $g'(t)dt$, se tendría:

$$\int f(x)dx \overset{x=\psi(t)}{\longrightarrow} \int f(g(t))\, g'(t)dt.$$

La intención de estos cambios de variable es que la nueva integral $\int F(t)dt$ (en donde $F(t) = f(g(t))\, g'(t)$) sea más fácil de resolver que la integral original. En esta sección veremos solamente algunos casos sencillos en donde el integrando puede sugerir el tipo de función $x = g(t)$ con la cual cambiaremos la variable en la integral.

EJEMPLO 14.4.1. Calcular la integral $\int x\sqrt{2x+3}dx$, haciendo el cambio de variable $2x + 3 = t^2$.

SOLUCIÓN. La intención del cambio de variable sugerido es que en la nueva integral (con úes en el integrando, en lugar de equis) ya no aparezca la raíz cuadrada que envuelve a $2x + 3$. Tenemos entonces que:

$$2x + 3 = t^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(t^2 - 3) \Rightarrow dx = tdt.$$

Sustituyendo en la integral original nos queda:

$$\int x\sqrt{2x+3}dx = \int \frac{1}{2}(t^2 - 3)t\,(tdt) = \frac{1}{2}\int t^2(t^2 - 3)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int (t^4 - 3t^2)dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}t^5 - t^3\right) + c = \frac{1}{10}(2x+3)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}(2x+3)^{\frac{3}{2}} + c.$$

⋆

EJEMPLO 14.4.2. Calcular la integral $\int (x+1)^6 x^2 dx$, haciendo el cambio de variable $x + 1 = t$.

SOLUCIÓN. La integral dada se puede calcular directamente, desarrollando el binomio a la sexta, multiplicando por x^2 y separando en varias integrales (todas ellas del tipo kx^n). Sin embargo, con toda seguridad ahorraremos una buena cantidad de trabajo si atendemos al cambio de variable sugerido en el ejemplo. Se tiene:

$$x + 1 = t \Rightarrow x = t - 1 \Rightarrow dx = dt.$$

Sustituyendo en la integral tenemos:

$$\int (x+1)^6 x^2 dx = \int t^6(t-1)^2 dt = \int t^6(t^2 - 2t + 1)dt = \int (t^8 - 2t^7 + t^6)dt$$

$$= \frac{1}{9}t^9 - \frac{2}{8}t^8 + \frac{1}{7}t^7 + c = \frac{1}{9}(x+1)^9 - \frac{1}{4}(x+1)^8 + \frac{1}{7}(x+1)^7 + c.$$

⋆

EJEMPLO 14.4.3. Calcular la integral $\int \frac{x^3}{(x+3)^4}dx$, haciendo el cambio de variable $x + 3 = t$.

SOLUCIÓN. Se tiene:

$$x + 3 = t \Rightarrow x = t - 3 \Rightarrow dx = dt.$$

Sustituyendo en la integral tenemos:

$$\int \frac{x^3}{(x+3)^4}dx = \int \frac{(t-3)^3}{t^4}dt = \int \frac{t^3 - 9t^2 + 27t - 27}{t^4}dt$$

$$= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{9}{t^2} + \frac{27}{t^3} - \frac{27}{t^4}\right) dt = \int \left(\frac{1}{t} - 9t^{-2} + 27t^{-3} - 27t^{-4}\right) dt$$

$$= \ln|t| - 9\left(\frac{t^{-1}}{-1}\right) + 27\left(\frac{t^{-2}}{-2}\right) - 27\left(\frac{t^{-3}}{-3}\right) + c$$

$$= \ln|x+3| + \frac{9}{x+3} - \frac{27}{2(x+3)^2} + \frac{9}{(x+3)^3} + c.$$

⋆

EJEMPLO 14.4.4. Calcular la integral $\int \frac{3x^2+1}{\sqrt[3]{2x+5}}dx$, haciendo el cambio de variable $2x + 5 = t^3$.

SOLUCIÓN. Se tiene:

$$2x + 5 = t^3 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(t^3 - 5) \Rightarrow dx = \frac{3}{2}t^2dt.$$

Sustituyendo en la integral original, nos queda:

$$\int \frac{3x^2+1}{\sqrt[3]{2x+5}}dx = \int \frac{3\left(\frac{1}{2}(t^3-5)\right)^2 + 1}{t}\left(\frac{3}{2}t^2dt\right) = \frac{3}{2}\int \left(\frac{3}{4}(t^6 - 10t^3 + 25) + 1\right) tdt$$

$$= \frac{9}{8}\int t^7dt - \frac{45}{4}\int t^4dt + \frac{237}{8}\int tdt = \frac{9}{8}\left(\frac{1}{8}t^8\right) - \frac{45}{4}\left(\frac{1}{5}t^5\right) + \frac{237}{8}\left(\frac{1}{2}t^2\right) + c$$

$$= \frac{9}{64}(2x+5)^{\frac{8}{3}} - \frac{9}{4}(2x+5)^{\frac{5}{3}} + \frac{237}{16}(2x+5)^{\frac{2}{3}} + c.$$

Dejamos como ejercicio para el estudiante que simplifique este resultado y que se convenza de que puede escribirse como:

$$\int \frac{3x^2+1}{\sqrt[3]{2x+5}}dx = \frac{3}{64}(2x+5)^{\frac{2}{3}}(12x^2-36x+151)+c.$$

★

EJEMPLO 14.4.5. Calcule la integral $\int \sqrt{1-x^2}dx$, usando la sustitución $x = \operatorname{sen} t$, (con $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$).

SOLUCIÓN. Para los valores manejados de t, se tiene $\cos t > 0$. Sustituyendo x por $\operatorname{sen} t$ en el integrando $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, nos queda $\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t$. También: $dx = (\operatorname{sen} t)' dt = \cos t dt$. Entonces:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int (\cos t)(\cos t dt) = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1}{2}(1+\cos 2t)dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int dt + \int \cos 2t dt\right) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\int \cos 2t(2dt)\right) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right) + c.$$

Para regresar a la variable original x, recordamos que $\operatorname{sen} t = x$, de donde se obtiene directamente que $t = \operatorname{arcsen} x$. Por otra parte, como $\operatorname{sen} 2t = 2\operatorname{sen} t \cos t$, escribiendo $\cos t = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}$, vemos que $\operatorname{sen} 2t = 2\operatorname{sen} t\cos t = 2x\sqrt{1-x^2}$. Entonces:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right) + c = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen} x + x\sqrt{1-x^2}\right) + c.$$

★

EJEMPLO 14.4.6. Use el resultado del ejercicio anterior para calcular el área de un círculo de radio 1.

SOLUCIÓN. La función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ es continua y positiva en su dominio $[-1, 1]$, y su gráfica corresponde a la del semicírculo superior del círculo unitario con centro en el origen. Entonces la integral $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$ representará el área de tal semicírculo, y así, el doble de tal integral será el área A del círculo completo. Se tiene entonces:

$$A = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = \left(\operatorname{arcsen} x + x\sqrt{1-x^2}\right)_{-1}^{1}$$

$$= \operatorname{arcsen} 1 + (1)\sqrt{1-1^2} - \operatorname{arcsen}(-1) - (1)\sqrt{1-(-1)^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Este resultado es, como sabemos, el área de un círculo de radio $r = 1$ (que es $A = \pi r^2 = \pi(1)^2 = \pi$).

★

EJERCICIOS (14.4)

En los ejercicios 1 al 10, escriba la integral a la que se transforma la integral dada, después del cambio de variable sugerido. (La función f es una función continua dada.)

1. $\int f(x+2)dx$, haciendo $x+2=t$.

2. $\int f(4x+1)dx$, haciendo $4x+1=t$.

3. $\int xf(3x+1)dx$, haciendo $3x+1=t$.

4. $\int f(x^{-1})x^{-3}dx$, haciendo $x^{-1}=t$.

5. $\int f(x^3)x^5dx$, haciendo $x^3=t$.

6. $\int f\left(\sqrt{x+1}\right)dx$, haciendo $\sqrt{x+1}=t$.

7. $\int f\left(\sqrt[3]{2x+3}\right)dx$, haciendo $\sqrt[3]{2x+3}=t$.

8. $\int f(e^x+1)dx$, haciendo $e^x+1=t$.

9. $\int x^2f(1-x^2)dx$, haciendo $x=\operatorname{sen} t$.

10. $\int xf(4+x^2)dx$, haciendo $x=2\operatorname{senh} t$.

En los ejercicios 11 al 20, calcule la integral indicada usando el cambio de variable sugerido.

11. $\int x\sqrt{3x-1}dx$, haciendo $3x-1=t^2$.

12. $\int x^2\sqrt{x+2}dx$, haciendo $x+2=t^2$.

13. $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+2}dx$, haciendo $x+1=t^2$.

14. $\int \frac{x}{\sqrt{x+3}+4}dx$, haciendo $x+3=t^2$.

15. $\int \frac{2x}{(x+3)^4}dx$, haciendo $x+3=t$.

16. $\displaystyle\int \frac{x}{(5x+2)^3}dx$, haciendo $5x + 2 = t$.

17. $\displaystyle\int x^2(3x+7)^5dx$, haciendo $3x + 7 = t$.

18. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x}+4x}{\sqrt[3]{1+x}}dx$, haciendo $1 + x = t^6$.

19. $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}dx$, haciendo $x = \operatorname{senh} t$.

20. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{4+x^2}}dx$, haciendo $x = 2\operatorname{senh} t$.

14.5 CAMBIO DE VARIABLE EN LA INTEGRAL DEFINIDA

Para calcular una integral definida $\int_a^b f(x)dx$, necesitamos, según el TFC, obtener primeramente la integral indefinida $\int f(x)dx$. Puede ocurrir que para resolver esta última, tengamos que recurrir a un cambio de variable, como los comentados en la sección anterior, o algunos otros que veremos posteriormente. Así, podemos introducir una nueva variable u en la integral, resolver la nueva integral $\int F(u)du$, regresar luego a la variable original x, y, por último, regresar al problema original del cálculo de la integral definida. Esto, en general, no representa mucho problema y es, en realidad, como suelen resolverse este tipo de problemas. Sin embargo, en esta sección estudiaremos una alternativa que se nos presenta si en la integral debemos hacer un cambio de variable, y que consiste en hacer este cambio directamente en la integral definida, para obtener otra integral definida más fácil de resolver que la inicial. El teorema es el siguiente.

TEOREMA 14.5.1. (CAMBIO DE VARIABLE EN LA INTEGRAL DEFINIDA.) *Si $f(x)$ es una función continua, y $g(x)$ es una función derivable con derivada $g'(x)$ continua, entonces:*

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = \int_a^b f\left(g(x)\right)g'(x)dx.$$

Si le quitamos los límites de integración a las integrales de la fórmula del teorema anterior, el resultado se convierte en el ya conocido cambio de variable en la integral indefinida estudiado en la sección 14.4. Para ver la validez de este resultado, observemos que si F es una

antiderivada de f (es decir, si $F' = f$), entonces la integral del lado izquierdo de la expresión anterior es, según el TFC,

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = F(u)]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Por otra parte, la función $F(g(x))$ es una antiderivada del integrando que aparece en la integral del lado derecho del teorema de cambio de variable, pues:

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))\,g'(x) = f(g(x))\,g'(x).$$

Entonces, según el TFC tenemos que:

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)dx = F(g(x))]_a^b = F(g(b)) - F(g(a)),$$

de modo que se da la igualdad entre las integrales $\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$ y $\int_a^b f(g(x))\,g'(x)dx$, como se quería ver.

La manera de entender la fórmula del teorema es muy simple: supongamos que la integral definida por resolver es $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, y se quiere hacer el cambio $x = g(t)$. Esta variable se sustituye entonces en el integrando, tal y como lo hacíamos en la integral indefinida (cambiando dx por $g'(t)dt$). Los límites de integración se alteran observando que: en la integral por resolver, la variable x cambia de α a β; si $a = g^{-1}(\alpha)$ y $b = g^{-1}(\beta)$, entonces, mientras x varía de α a β, la nueva variable t lo hace de a a b, de modo que:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \overset{x=g(t)}{=\!=\!=} \int_{g^{-1}(\alpha)}^{g^{-1}(\beta)} f(g(t))\,g'(t)dt = \int_a^b f(g(t))\,g'(t)dt.$$

Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 14.5.1. Calcular la integral $\int_0^1 (x+1)^6 x^2 dx$, haciendo el cambio de variable $x + 1 = t$.

SOLUCIÓN. En el ejemplo 14.4.2, obtuvimos la integral indefinida correspondiente:

$$\int (x+1)^6 x^2 dx = \frac{1}{9}(x+1)^9 - \frac{1}{4}(x+1)^8 + \frac{1}{7}(x+1)^7 + c,$$

de modo que, aprovechando este resultado, podemos hacer el cálculo requerido como:

$$\int_0^1 (x+1)^6 x^2 dx = \left[\frac{1}{9}(x+1)^9 - \frac{1}{4}(x+1)^8 + \frac{1}{7}(x+1)^7\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{1}{9}(1+1)^9 - \frac{1}{4}(1+1)^8 + \frac{1}{7}(1+1)^7\right] - \left[\frac{1}{9}(0+1)^9 - \frac{1}{4}(0+1)^8 + \frac{1}{7}(0+1)^7\right]$$

$$= \left[\frac{2^9}{9} - \frac{2^8}{4} + \frac{2^7}{7}\right] - \left[\frac{1}{9} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7}\right] = \frac{2815}{252}.$$

Al hacer el cambio de variable en la integral definida dada, los cálculos se ven de la siguiente manera: como $x+1=t$, y la x está variando de 0 a 1, la t correspondiente variará de $t=0+1=1$ a $t=1+1=2$. Éstos serán los límites de integración en la nueva integral definida, de modo que:

$$\int_0^1 (x+1)^6 x^2 dx \overset{x+1=t}{=} \int_1^2 t^6(t-1)^2 dt = \int_1^2 t^6(t^2-2t+1)dt$$

$$= \int_1^2 \left(t^8 - 2t^7 + t^6\right) dt = \left[\frac{1}{9}t^9 - \frac{2}{8}t^8 + \frac{1}{7}t^7\right]_1^2$$

$$= \left[\frac{2^9}{9} - \frac{2^8}{4} + \frac{2^7}{7}\right] - \left[\frac{1}{9} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7}\right] = \frac{2815}{252}.$$

★

EJEMPLO 14.5.2. Calcular la integral $\int_1^e \frac{1}{x(3+\ln x)^2}dx$.

SOLUCIÓN. Identificando a $3+\ln x$ como una nueva variable u, tenemos: mientras x varía de 1 a e, la $u=3+\ln x$ varía de $u=3+\ln 1=3$ a $u=3+\ln e=4$. Entonces:

$$\int_1^e \frac{1}{x(3+\ln x)^2}dx \overset{3+\ln x=u}{\longrightarrow} \int_3^4 \frac{du}{u^2} = \left[-\frac{1}{u}\right]_3^4 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{12}.$$

★

EJEMPLO 14.5.3. Calcule la integral $\int_1^5 \frac{1}{2+\sqrt{x-1}}dx$.

SOLUCIÓN. Hacemos el cambio de variable $x-1=t^2$, o bien $t=\sqrt{x-1}$. Así:

$$x-1=t^2 \Rightarrow x=t^2+1 \Rightarrow dx=2tdt.$$

Mientras x varía de 1 a 5, la nueva variable t varía de $t=\sqrt{1-1}=0$ a $t=\sqrt{5-1}=2$. Sustituyendo en la integral se obtiene:

$$\int_1^5 \frac{1}{2+\sqrt{x-1}}dx = \int_0^2 \frac{1}{2+t}(2tdt) = 2\int_0^2 \frac{t}{2+t}dt.$$

Esta última integral la podemos resolver con un nuevo cambio de variable, a saber $2+t=z$. Así:

$$2+t=z \Rightarrow t=z-2 \Rightarrow dt=dz.$$

Mientras t varía de 0 a 2, la nueva variable z lo hace de $z=2+0=2$ a $z=2+2=4$. Entonces:

$$\int_1^5 \frac{1}{2+\sqrt{x-1}}dx = 2\int_0^2 \frac{t}{2+t}dt = 2\int_2^4 \frac{z-2}{z}dz = 2\int_2^4 \left(1-\frac{2}{z}\right)dz$$

$$= 2\int_2^4 dz - 4\int_2^4 \frac{1}{z}dz = 2\,[z]_2^4 - 4\,[\ln z]_2^4 = 2(4-2) - 4\,(\ln 4 - \ln 2) = 4 - 4\ln 2.$$

★

EJEMPLO 14.5.4. Calcular el área bajo la gráfica de la semiparábola $f(x) = \sqrt{4-x}$ entre $x = 1$ y $x = 2$.

SOLUCIÓN. Puesto que la función $f(x)$ dada es continua y positiva en el intervalo $[1, 2]$, el área por calcular es el valor de la integral $\int_1^2 f(x)dx$. Para calcular esta integral podemos identificar a $4 - x$ con u, de modo que $dx = -du$, y, mientras x varía de 1 a 2, la u varía de $u = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$, a $u = \sqrt{4-2} = \sqrt{2}$. Entonces:

$$\int_1^2 \sqrt{4-x}dx \overset{u=4-x}{=\!=\!=} \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} \sqrt{u}(-du) = -\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} = -\frac{2}{3}\left[\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\sqrt{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= -\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2} - 3\sqrt{3}\right) \approx 1.5785.$$

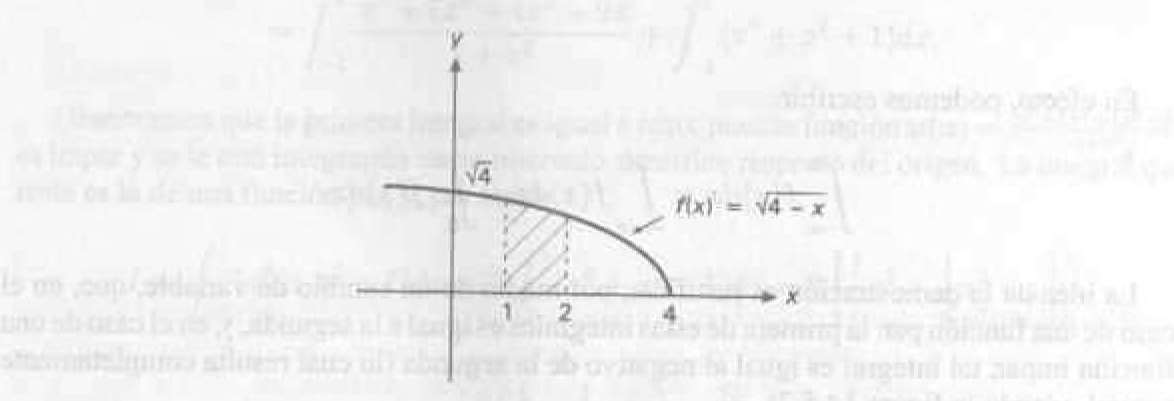


Figura 14.5.1. Ejemplo 14.5.4.

★

EJEMPLO 14.5.5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Demostrar que si f es par, entonces:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx,$$

y si f es impar, entonces:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

SOLUCIÓN. El resultado por demostrar tiene un contenido geométrico muy claro si lo

pensamos en términos de áreas: si la función es par, el área bajo la curva entre $-a$ y a es (por la simetría de la gráfica de la función respecto del eje y) el doble del área correspondiente entre 0 y a, mientras que si es impar, siendo la gráfica de $f(x)$ simétrica respecto del origen, el área bajo la curva en el primer cuadrante (o en el segundo), se anula con el área en el tercer cuadrante (o en el cuarto, respectivamente), dando entonces el área total (la integral de $-a$ a a) por resultado cero.

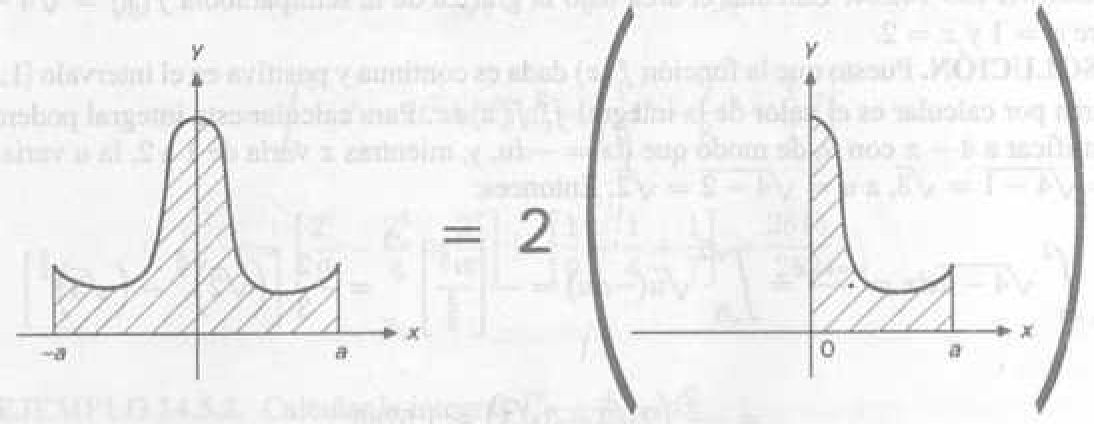


Figura 14.5.2. Interpretación geométrica del ejemplo 14.5.5.

En efecto, podemos escribir:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx.$$

La idea de la demostración es justificar, por medio de un cambio de variable, que, en el caso de una función par, la primera de estas integrales es igual a la segunda, y, en el caso de una función impar, tal integral es igual al negativo de la segunda (lo cual resulta completamente natural, viendo la figura 14.5.2).

En la primera de las integrales de la expresión anterior, hagamos el cambio de variable $u = -x$. Entonces, mientras x varía de $-a$ a 0, la nueva variable u varía de $u = -(-a) = a$ a $u = -(0) = 0$. Como $dx = -du$, se tiene entonces que:

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx \stackrel{u=-x}{=\!=\!=} \int_{a}^{0} f(-u)(-du) = -\int_{a}^{0} f(-u)du = \int_{0}^{a} f(-u)du.$$

Si f es par, entonces $f(-u) = f(u)$ y obtenemos:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(u)du + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx,$$

como se quería demostrar, mientras que si f es impar, entonces $f(-u) = -f(u)$ y obtenemos en este caso:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(u)du + \int_{0}^{a} f(x)dx = 0,$$

tal como tenía que ocurrir.

★

EJEMPLO 14.5.6. Calcule la integral $I = \int_{-1}^{1} \frac{x^8+x^7+x^6+7x^5+x^4+4x^3+2x^2+9x+1}{1+x^2}dx$.
SOLUCIÓN. Escribiendo:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{x^8+x^7+x^6+7x^5+x^4+4x^3+2x^2+9x+1}{1+x^2}dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\frac{x^7+7x^5+4x^3+9x}{1+x^2} + \frac{x^8+x^6+x^4+2x^2+1}{1+x^2} \right) dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{x^7+7x^5+4x^3+9x}{1+x^2} + \int_{-1}^{1} \frac{x^6(x^2+1)+(x^2+1)^2}{1+x^2}dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{x^7+7x^5+4x^3+9x}{1+x^2} + \int_{-1}^{1} (x^6+x^2+1)dx.$$

Observamos que la primera integral es igual a cero, pues la función $\varphi(x) = \frac{x^7+7x^5+4x^3+9x}{1+x^2}$ es impar y se le está integrando en un intervalo simétrico respecto del origen. La integral que resta es la de una función par, y, por tanto:

$$I = \int_{-1}^{1} (x^6+x^2+1)dx = 2\int_{0}^{1} (x^6+x^2+1)dx = 2\left[\frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{3}x^3 + x\right]_0^1$$

$$= 2\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3} + 1\right) = \frac{62}{21}.$$

★

EJEMPLO 14.5.7. Sea $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función continua. Demostrar que

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{sen} x)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx.$$

SOLUCIÓN. Si en la integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{sen} x)dx$ hacemos el cambio de variable $x = \frac{\pi}{2} - u$, tenemos que $dx = -du$, y, mientras x varía de 0 a $\frac{\pi}{2}$, la variable u lo hace de $u = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$ a $u = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$. Entonces:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{sen} x)dx \overset{u=\frac{\pi}{2}-x}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right)(-du) = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\cos u)\, du$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos u)du,$$

como se quería ver.

Una aplicación de este resultado: calculemos la integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x dx$. Tenemos:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x)\, dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x dx$$

(en donde hemos usado que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$, según lo que acabamos de demostrar). Entonces, despejando la integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x dx$ de la última expresión, obtenemos finalmente que:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x dx = \frac{\pi}{4},$$

resultado que puede comprobar el lector (incrédulo) calculando la integral con los métodos tradicionales.

★

EJEMPLO 14.5.8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Demostrar que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a + b - x)dx.$$

SOLUCIÓN. Se trata de un simple cambio de variable, que el mismo resultado sugiere: haga $x = a + b - u$. Entonces $dx = -du$ y, mientras x varía de a a b, la nueva variable lo hace de $u = a + b - a = b$ a $u = a + b - b = a$. Nos queda pues que:

$$\int_a^b f(x)dx \overset{x=a+b-u}{=\!=\!\longrightarrow\!=} \int_b^a f(a + b - u)\,(-du) = -\int_b^a f(a + b - u)\, du$$

$$= \int_a^b f(a + b - u)du,$$

como se quería demostrar. Si pensamos que la función $f(x)$ es no negativa, el contenido geométrico de la igualdad establecida en este ejemplo es muy interesante: la función $\varphi(x) = f(a + b - x)$ tiene una gráfica que es simétrica respecto de la recta $x = \frac{a+b}{2}$, con la gráfica de $f(x)$. Dejamos al lector que se convenza por sí mismo de este hecho (basta que se convenza de la igualdad $\varphi\left(\frac{a+b}{2} - y\right) = f\left(\frac{a+b}{2} + y\right)$). Así, lo que establece la igualdad demostrada en el ejemplo, es que el área bajo la curva de $f(x)$ entre a y b, es la misma que el área bajo la curva de $\varphi(x)$ entre a y b, hecho que resulta muy natural, si se observa la figura 14.5.3.

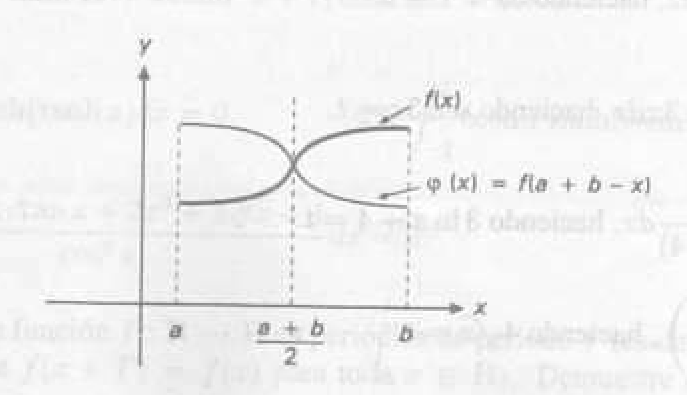


Figura 14.5.3. Interpretación geométrica de la igualdad $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$.

EJERCICIOS (14.5)

En los ejercicios 1 al 10, escriba la integral definida en que se transformaría la integral dada, si en ésta se realiza el cambio de variable indicado.

1. $\int_2^5 f(x+1)dx$, haciendo $x+1=z$.

2. $\int_0^4 f(x)dx$, haciendo $t=\sqrt{x}$.

3. $\int_1^5 f(3+x)dx$, haciendo $3+x=u$.

4. $\int_a^{a+h} f(x)dx$, haciendo $x=a+z$.

5. $\int_3^7 f\left(\frac{1}{x}\right)dx$, haciendo $\frac{1}{x}=t$.

6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{sen} x)dx$, haciendo $\operatorname{sen} x=u$.

7. $\int_{-2}^3 f(x)dx$, haciendo $x=4+2u$.

8. $\int_0^4 f(x)dx$, haciendo $x=\frac{1+3u}{2}$.

9. $\int_0^9 f(x^2)dx$, haciendo $x^2=t$.

10. $\int_1^8 f(x^3)dx$, haciendo $x^3=t+2$.

En los ejercicios 11 al 20, calcule la integral dada realizando la sustitución indicada.

11. $\int_0^1 \frac{3}{4+\sqrt{x}}dx$, haciendo $\sqrt{x}=t$.

12. $\int_2^4 \frac{x}{x+2}dx$, haciendo $x+2=t$.

13. $\displaystyle\int_2^5 \frac{x}{(3x+1)^2}dx$, haciendo $3x+1=t$.

14. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{4\,\text{sen}\,3x}\cos 3x dx$, haciendo $\text{sen}\,3x = t$.

15. $\displaystyle\int_1^8 \frac{1}{x(3\ln x+4)}dx$, haciendo $3\ln x + 4 = t$.

16. $\displaystyle\int_0^4 e^{4\sqrt{x}}\left(\frac{dx}{\sqrt{x}}\right)$, haciendo $4\sqrt{x}=t$.

17. $\displaystyle\int_1^5 \frac{2}{3+\sqrt{x-1}}dx$, haciendo $\sqrt{x-1}=t$.

18. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(4x+3)^3}dx$, haciendo $4x+3=t$.

19. $\displaystyle\int_1^3 \frac{3x+1}{7x+8}dx$, haciendo $7x+8=t$.

20. $\displaystyle\int_{-1}^7 \frac{4}{5+\sqrt{4x+9}}dx$, haciendo $\sqrt{4x+9}=t$.

21. Sea $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ una función continua par, y sea a un número positivo. Suponga que $\displaystyle\int_0^a f(x)dx = 4$. Calcule: a) $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx$, b) $\displaystyle\int_{-a}^a xf(x)dx$.

22. Sea $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ una función continua impar, y sea a un número positivo. Suponga que $\displaystyle\int_0^a f(x)dx = 3$. Calcule: a) $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx$, b) $\displaystyle\int_{-a}^a f^3(x)dx$.

En los ejercicios 23 al 30, justifique la igualdad dada (sin calcular la primera de las integrales en la igualdad).

23. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3+3x+1)\cos x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2.$

24. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^7+3x^5+7x+1}{1+x^2}dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}.$

25. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\arctan^3 3x + 8\arctan 5x + 2}{2+2x^2}dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}.$

26. $\displaystyle\int_{-1}^1 (x^5+7x^3+3x+1)\sqrt{1-x^2}dx = \pi.$

27. $\int_{-1}^{1}(7x^9 + 3x^2 \tanh 4x + x \operatorname{senh}^3 x + 1)\cosh x dx = e - e^{-1}$.

28. $\int_{-1}^{1} \operatorname{senh} x^2 \operatorname{senh}(\tanh x)dx = 0$. **29.** $\int_{-2}^{2} \cosh x \tanh(\operatorname{senh} x)dx = 0$.

30. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x + \arctan x + 2x^3 + 3\sqrt[3]{x} + 1}{\cos^2 x}dx = 2$.

31. Suponga que la función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es periódica de periodo T (es decir, para el número positivo T, se tiene $f(x + T) = f(x)$ para toda $x \in \mathbf{R}$). Demuestre que para cualquier número real a se tiene:

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx.$$

Interprete geométricamente este resultado, y verifíquelo con la función $f(x) = \operatorname{sen} x$.

32. Sean $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dos funciones continuas. Demuestre que:

$$\int_{0}^{1} f(x)g(1 - x)dx = \int_{0}^{1} g(x)f(1 - x)dx.$$

33. (LA FUNCIÓN LOGARITMO NATURAL.) En el capítulo 1 decíamos que una presentación "matemáticamente decente" de la función logaritmo natural requería de las ideas del cálculo. Ahora estamos en posibilidades de hacerla. En este ejercicio se presenta la definición rigurosa de esta función y se exploran, a partir de la definición dada, algunas de sus propiedades.

Se define la función logaritmo natural de x, $\ln : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, *como:*

$$\ln x = \int_{1}^{x} \frac{1}{t}dt.$$

Use lo estudiado en los tres capítulos anteriores para demostrar que:

a) $\ln 1 = 0$.

b) Para $0 < x < 1$, se tiene $\ln x < 0$.

c) Para $x > 1$, se tiene $\ln x > 0$.

d) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

e) En este inciso demostraremos que $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ para todos $x, y \in \mathbf{R}^+$. Escriba $\ln(xy) = \int_{1}^{xy} \frac{1}{t}dt = \int_{1}^{x} \frac{1}{t}dt + \int_{x}^{xy} \frac{1}{t}dt$. En la segunda integral haga el cambio de variable $t = xu$ (en donde u es la nueva variable) para obtener: $\ln(xy) = \int_{1}^{x} \frac{1}{t}dt + \int_{1}^{y} \frac{1}{u}du = \ln x + \ln y$, como se quería.

f) Use el resultado del inciso anterior y el hecho de que $\ln 1 = 0$ para demostrar que $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$ para todo $x \in \mathbf{R}^+$. (Sugerencia: $\ln 1 = \ln\left(x\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \ln x + \ln \frac{1}{x}$.)

g) Demuestre que $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$ para todo $x, y \in \mathbf{R}^+$.
h) Demuestre que $\ln x^n = n \ln x$ para todo $x \in \mathbf{R}^+$ y todo $n \in \mathbf{Z}$.
i) Demuestre que la fórmula del inciso anterior es válida para todo $n \in \mathbf{Q}$.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 14

EXAMEN TIPO (A)

1. Verifique que $\int \ln^3 x dx = x \ln^3 x - 3x \ln^2 x + 6x \ln x - 6x + c$.

2. Sea $f(x)$ una función derivable. Calcule $\int (xf'(x) + f(x))\, dx$. (Sugerencia: ¿Cómo es la derivada de la función $g(x) = xf(x)$?)

3. Calcule el área bajo la semiparábola $f(x) = \sqrt{5+2x}$ entre $x = 0$ y $x = 2$.

4. Calcule la integral $\int \frac{1}{x(\ln \ln x)(\ln x)} dx$.

5. Calcule la integral $\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx$.

6. Calcule la integral $\int \frac{(2+x)^2}{1+x^2} dx$.

7. Calcule la integral $\int \operatorname{sen}^2 3x \cos^2 3x dx$ de dos maneras distintas. Concilie los resultados obtenidos.

8. Calcule la integral $\int \frac{(3\arctan x + 2)^2}{1+x^2} dx$.

9. Calcule la integral $\int \sqrt[5]{3x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 12x + 9}(x^3 + x^2 + x + 1)dx$.

10. Calcule la integral $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{4\cos^2 x + 3\operatorname{sen}^2 x} dx$. (Sugerencia: Escriba el denominador en términos de $\operatorname{sen}^2 x$ y observe que $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^2 x) = \operatorname{sen} 2x$.)

EXAMEN TIPO (B)

1. Verifique que $\int x \arctan^2 x dx = \frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x - x \arctan x + \ln\sqrt{1+x^2} + c$.

2. Sea $f(x)$ una función no nula derivable. Calcule $\int \frac{f(x) - xf'(x)}{f^2(x)} dx$.

3. Calcule el área bajo la curva $f(x) = x^2\sqrt{9+7x^3}$ entre $x = 0$ y $x = 1$.

4. Calcule la integral $\displaystyle\int \frac{1}{x\,(\ln\ln^3\ln x)\,(\ln\ln x)\,(\ln x)}dx$.

5. Calcule la integral $\displaystyle\int \frac{(1+\arctan x)^2}{1+x^2}dx$.

6. Calcule la integral $\displaystyle\int \frac{3+x\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx$.

7. Calcule la integral $\displaystyle\int \operatorname{sen}^6 6x dx$.

8. Calcule la integral $\displaystyle\int x^3(4+3x^4)^{-2}dx$.

9. Calcule la integral $\displaystyle\int \sec^6 x dx$.

10. Calcule la integral $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen} x\cos^2 x}dx$.

NOTA HISTÓRICA: GAUSS, EL PRÍNCIPE DE LOS MATEMÁTICOS.

Si bien es cierto que la figura más relevante de la Matemática del siglo XVIII es L. Euler, la figura más importante de la Matemática del siglo XIX es, sin lugar a dudas, K. F. Gauss. Quedaría la duda si esta afirmación da solamente una verdad a medias, pues en realidad la figura de Gauss no solamente inunda como papel protagónico al siglo XIX, sino a la Matemática de todos los tiempos. Es Gauss, quizás, el genio matemático más dotado de todos cuantos se tiene noticia. Intuición y originalidad, la extraordinaria diversidad y profundidad de sus descubrimientos, las demostraciones de potencia casi sobrenatural, y la tenacidad en el trabajo intelectual, hicieron de Gauss un ser tan enigmático como abrumador, al que la ciencia le ha rendido justo tributo, llamándolo "el príncipe de los matemáticos". Karl Friedrich Gauss (1777-1855) nació en Brunswick, al norte de Alemania. Su excepcional capacidad para la ciencia numérica quedó patente desde muy temprana edad, y de hecho, ya maduro, llegaba a bromear diciendo que él había aprendido antes a contar que a hablar.



Su padre era jardinero y albañil, y se percató de la fenomenal capacidad de su hijo Karl desde que éste tenía tres años, cuando el pequeño lo corrigió en unas cuentas salariales. Una anécdota de la infancia de Gauss (que cierta o no, es lo suficientemente conocida para que usted también la conozca y la divulgue) exalta la enorme capacidad numérica del pequeño: estando en clases, seguramente aburrido por las enseñanzas elementales de su profesor, este último quiso

disciplinarlo con un trabajo adicional que consistía en sumar los números del 1 al 100; es decir, el niño debía hacer la suma 1+2+ . . . +100. Seguramente para cualquier mente humana normal en sus primeros cinco años de existencia, este problema podría representar varias decenas de minutos de trabajo. La gran sorpresa del profesor fue que en unos cuantos minutos el pequeño Karl se levantó de su asiento y le entregó la respuesta correcta. Seguramente el niño no había hecho la suma de manera exhaustiva, número por número. Reconoció inmediatamente la relación que explicamos en el capítulo 12 de la cual dedujimos que la suma de los primeros n números naturales es de $\frac{n(n+1)}{2}$. Así, la respuesta del pequeño Karl fue de $\frac{100(101)}{2} = 5050$. Este talento del pequeño Karl, que bien podía ser calificado de sobrenatural para el cálculo mental, actuó como un afortunado imán, atrayendo el interés de diversas personas influyentes de su comunidad. Así apareció la persona del Duque de Brunswick, quien decidió pagar la educación del pequeño genio, primero en el Colegio de Carolina en Brunswick (1792-1795) y más tarde en la Universidad de Göttingen (1796-1798).

El trabajo de Gauss dejó huella en muchas de las ramas de la Matemática actual, por ejemplo, en la Teoría de Números, en el Análisis Matemático, en la Teoría de Probabilidades y Estadística Matemática, y en el Álgebra, por mencionar solamente algunas en donde las contribuciones de Gauss fueron decisivas para el desarrollo que tomaron hasta nuestros días estas partes de la matemática. Así como sería casi imposible enlistar los descubrimientos matemáticos de Gauss, sería igualmente arriesgado de calificar de "más importantes" algunos de sus resultados sobre algunos otros de ellos (hay algunos de estes resultados que son, por decirlo así, más famosos que otros, porque sin mucha dificultad se puede entender su contenido; muchos otros son resultados más técnicos que solamente con algunos antecedentes es posible entender su contenido).

En el Colegio Carolina, Gauss completó su dominio de las lenguas clásicas y exploró las obras de Newton, Euler y Lagrange. Es en este periodo (teniendo Gauss catorce o quince años), cuando descubrió uno de los primeros importantes resultados debidos a él sobre los números primos, creó el popular "método de mínimos cuadrados", y concibió una distribución de probabilidades que hasta ahora es estudiada en todos los cursos de Probabilidad, con el nombre de "distribución normal" (o gaussiana). En su periodo universitario Gauss pasó primeramente por una etapa de incertidumbre, ya que su atracción por la filología se combinó con una desilusión por sus cursos de Matemática (que seguramente le parecían aburridos). No obstante, a los dieciocho años estableció un bellísimo resultado geométrico que le hizo decidir a favor de la Matemática para el resto de su vida: demostró que un polígono regular de n lados es construible con regla y compás si y sólo si n es el producto de una potencia de 2 y de distintos números primos de la forma $p_k = 2^{2^K} + 1$.

Con Gauss apareció, por primera vez en la historia, una demostración del célebre Teorema Fundamental del Álgebra (en su tesis doctoral, en 1799). Este teorema afirma la existencia de una raíz (en general, compleja) para cualquier polinomio de coeficientes reales o complejos. Otro de los aspectos sobresalientes en el desarrollo general de la Matemática iniciado magistralmente por Gauss, fue el de las demostraciones de teoremas de existencia (como los teoremas del valor medio que hemos estudiado en este libro, en donde la parte fundamental de la tesis del teorema establece que "algo existe" —un número o una función— con ciertas propiedades), crucial desde entonces en Matemática pura. Si fue cierto o no que la mamá de Gauss se puso triste cuando le contestaron negativamente a la pregunta sobre si su hijo era el mejor matemático de Alemania, y que le ofrecieron la respuesta correcta sobre el lugar de su hijo como matemático, diciéndole que él era el mejor matemático del mundo, queda como una anécdota irrelevante para lo que en realidad es la figura de Gauss dentro de la Matemática: él es, y seguirá siendo, el príncipe de los matemáticos.

CAPÍTULO 15
APLICACIONES I: PROBLEMAS CON ECUACIONES DIFERENCIALES

"El Cálculo es así una puerta abierta milagrosamente; y aún las teorías físicas más complejas y profundas, llevan un rastro de sus más simples ecuaciones diferenciales y una huella de su arquitectura global."

David Berlinski

En este capítulo comenzaremos a ver las aplicaciones que tienen los conceptos estudiados en los capítulos previos, en problemas prácticos de física, química y biología. En muchos problemas conocemos la manera de cómo varía una cierta cantidad respecto de otra (esta última es muy comúnmente el tiempo). Por ejemplo, en algún problema sabemos cómo varía con el tiempo la cantidad de un cierto contaminante en un tanque, o bien cómo varía con el tiempo la cantidad de bacterias en un cierto cultivo, o cómo varía con el tiempo la temperatura de un cuerpo caliente que está en un medio frío, y el objetivo del problema es encontrar, en cada caso (respectivamente), la cantidad de sal en el tanque en un tiempo dado, la cantidad de bacterias en el cultivo en un tiempo dado, y la temperatura del cuerpo que se está enfriando en un tiempo dado. Por la experiencia del curso de cálculo diferencial, todo lo que suene a "cambio (instantáneo) de una cantidad y respecto de otra x" nos indica la presencia de una derivada $\frac{dy}{dx}$. Esta derivada, como decíamos anteriormente, la conocemos en los problemas mencionados, y lo que queremos hacer es conocer la función específica que describe la relación de y con x. En abstracto tenemos entonces un problema en el que se conoce la derivada de una función, y se quiere conocer la función. Este tema ha aparecido muchas veces en los dos capítulos anteriores. Es hora de que lo veamos funcionar entonces en problemas prácticos.

15.1 ECUACIONES DIFERENCIALES DE VARIABLES SEPARABLES

El tipo de problemas que estudiaremos en esta sección, nos conducirán siempre a plantear ecuaciones en las que está involucrada una cierta función incógnita $y = f(x)$ (en muchas de las cuales la variable x es el tiempo, como las funciones que aparecieron en el capítulo 10), y su derivada y'. Por ejemplo, en la expresión $y' + y = 0$, se encuentra involucrada una función y y su derivada y'. A este tipo de expresiones matemáticas se les llama **ecuaciones diferenciales (de primer orden).** El objetivo que se persigue en el estudio de estas ecuaciones es **resolverlas,** es decir, encontrar la función $y = f(x)$ que las satisfaga (en el mismo sentido en el que la solución $x = 1$ satisface la ecuación algebraica $x^2 + 3x - 4 = 0$, pues, sustituyendo $x = 1$ en la ecuación, queda la identidad $(1)^2 + 3(1) - 4 \equiv 0$). Por ejemplo, si en la ecuación $y' + y = 0$ sustituimos la función $y = e^{-x}$, cuya derivada es $y' = -e^{-x}$, tenemos $y' + y = -e^{-x} + e^{-x} = 0$, expresión que es una identidad. Decimos entonces que la función $y = e^{-x}$ es una **solución** de la ecuación diferencial $y' + y = 0$. En general, una solución de una ecuación diferencial es una función $y = f(x)$ que satisface a la ecuación (esta función puede estar dada en forma implícita), en el sentido de que sustituyendo esta función en la ecuación, reduce a esta última a una identidad.

EJEMPLO 15.1.1. Verifique que la función $y = \frac{1}{x}$ es solución de la ecuación $y' + \frac{y}{x} = 0$.

SOLUCIÓN. La derivada de $y = \frac{1}{x}$ es $y' = -\frac{1}{x^2}$. Sustituyendo en la ecuación diferencial dada nos queda:

$$y' + \frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2} + \frac{\frac{1}{x}}{x} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = 0$$

expresión que es una identidad.

★

EJEMPLO 15.1.2. Verifique que la función $y = \frac{2}{e^x + 2e^{3x}}$ es solución de la ecuación $y' + 3y = e^x y^2$.

SOLUCIÓN. La derivada de $y = \frac{2}{e^x + 2e^{3x}}$ es $y' = -\frac{2}{(e^x + 2e^{3x})^2}\left(e^x + 6e^{3x}\right)$. Sustituyendo en la ecuación diferencial dada nos queda:

$$y' + 3y = -\frac{2}{(e^x + 2e^{3x})^2}\left(e^x + 6e^{3x}\right) + 3\left(\frac{2}{e^x + 2e^{3x}}\right)$$

$$= \frac{-2\left(e^x + 6e^{3x}\right) + 6\left(e^x + 2e^{3x}\right)}{(e^x + 2e^{3x})^2} = \frac{-2e^x - 12e^{3x} + 6e^x + 12e^{3x}}{(e^x + 2e^{3x})^2} = \frac{4e^x}{(e^x + 2e^{3x})^2}$$

$$= e^x\left(\frac{2}{e^x + 2e^{3x}}\right)^2 = e^x y^2.$$

Es decir, con la función $y = \frac{2}{e^x+2e^{3x}}$ la ecuación $y' + 3y = e^x y^2$ se convierte en una identidad.

★

Resolver una ecuación diferencial significa encontrar la función que la satisface. Si en la ecuación aparece la función incógnita $y = f(x)$ derivada, es natural que para poder despejarla tengamos que hacer en algún momento de nuestro procedimiento, una integración. Las ecuaciones diferenciales a las que nos enfrentaremos en esta sección son **ecuaciones de variables separables.** Esto significa que si vemos a la derivada y' de la ecuación como un cociente de diferenciales (la diferencial dy de la función y entre la diferencial dx de su variable), es decir, si escribimos $y' = \frac{dy}{dx}$, es posible entonces "juntar las yes de la ecuación con la diferencial dy y las equis con la diferencial dx" (a este proceso se le llama "separación de variables"). Una vez hecho esto, todo lo que tenemos que hacer es integrar término a término la expresión obtenida, y despejar (cuando sea posible) la y en términos de x. Ésta será la solución buscada.

Tomemos el ejemplo inicial de la ecuación $y' + y = 0$. Esta ecuación la podemos escribir como:

$$\frac{dy}{dx} = -y.$$

Separando las variables obtenemos:

$$\frac{dy}{y} = -dx.$$

Integrando:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int dx.$$

De donde:

$$\ln|y| = -x + c.$$

Despejando la y en términos de x :

$$y = e^{-x+c}.$$

La constante c que apareció anteriormente es la constante de integración de las integrales indefinidas que realizamos. Observe entonces que todas las funciones del tipo $y = e^{-x+c}$, en donde c es una **constante arbitraria,** son soluciones de la ecuación $y' + y = 0$. Todas estas funciones $y = e^{-x+c}$ constituyen la **solución general** de la ecuación diferencial $y' + y = 0$.

Un ejemplo más: nos preguntamos por las funciones y que coinciden con su derivada. Es decir, funciones y tales que $y = y'$. Sabemos que la función exponencial $y = e^x$ satisface tal requerimiento, pues $(e^x)' = e^x$. Veremos, resolviendo la ecuación, que en realidad todas las funciones con tal propiedad (que son iguales a su derivada) son, esencialmente (a menos de una constante), la función exponencial (son múltiplos de ella). En efecto, la ecuación $y' = y$

es una ecuación diferencial de primer orden de variables separables. Separando las variables obtenemos:

$$\frac{dy}{y} = dx.$$

Integrando:

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx$$

de donde se obtiene $\ln|y| = x + c$, o bien, $y = e^{x+c} = e^c e^x = ce^x$, en donde hemos escrito con la misma letra c a la constante e^c (siendo c una constante arbitraria, e^c también lo es). Así pues, la solución general de la ecuación diferencial $y' = y$ es $y = ce^x$, lo cual nos dice que los múltiplos de la función exponencial e^x son los que coinciden con su derivada.

(NOTA: resulta entonces que la función exponencial $f(x) = e^x$ posee una bonita propiedad, a saber, su derivada y su integral es ella misma. Véase final del capítulo.)

En general, las ecuaciones diferenciales (de primer orden) de variables separables son ecuaciones del tipo:

$$y' = \varphi(x)\psi(y)$$

o bien:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x)\psi(y).$$

Separando las variables se obtiene:

$$\frac{dy}{\psi(y)} = \varphi(x)dx.$$

Integrando:

$$\int \frac{dy}{\psi(y)} = \int \varphi(x)dx + c.$$

Esta última expresión constituye la solución general de la ecuación $y' = \varphi(x)\psi(y)$. Geométricamente, ésta es la expresión de una **familia (a un parámetro) de curvas en el plano.** Si además fijamos una **condición inicial** $y(x_0) = y_0$, es decir, si damos el punto del plano $p = (x_0, y_0)$, es posible determinar el valor de c que haga que la solución de la ecuación cumpla con la condición impuesta. Geométricamente esto significa que del conjunto de curvas que constituyen la solución general, nos quedamos con la que pasa por el punto $p = (x_0, y_0)$ dado. Esta curva constituye una **solución particular** de la ecuación (que cumple con la condición inicial $y(x_0) = y_0$).

EJEMPLO 15.1.3. Hallar la solución general de la ecuación $y' = -xy^4$.

SOLUCIÓN. Separando las variables nos queda:

$$\frac{dy}{y^4} = -xdx.$$

Integrando:

$$\int \frac{dy}{y^4} = -\int x dx + c.$$

De donde:

$$-\frac{1}{3y^3} = -\frac{1}{2}x^2 + c$$

o bien, despejando y:

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{3\left(\frac{1}{2}x^2 - c\right)}}.$$

Ésta es la solución general procurada.

EJEMPLO 15.1.4. Hallar la solución particular de la ecuación $y' = -\frac{x}{y}$ que satisfaga la condición inicial $y(1) = 2$.

SOLUCIÓN. Separando las variables de la ecuación dada nos queda:

$$ydy = -xdx.$$

Integrando ambos miembros de esta expresión obtenemos:

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + c.$$

Ésta es la solución general de la ecuación diferencial $y' = -\frac{x}{y}$. Observe que las funciones $y = f(x)$ que hemos obtenido como soluciones de la ecuación diferencial, están dadas implícitamente.

Si vemos escrita la solución general como:

$$x^2 + y^2 = 2c$$

vemos que, para cada valor de $c > 0$, esta ecuación representa un círculo con centro en el origen. Así, la solución general de la ecuación representa geométricamente una familia de círculos concéntricos con centro en el origen de coordenadas. La condición inicial dada $y(1) = 2$ nos está indicando que de esos círculos debemos escoger aquél para el cual se cumple que cuando $x = 1$, se tiene $y = 2$. Es decir, el círculo que pasa por el punto $(1, 2)$. Sustituyendo estos valores en la expresión de la solución general, obtenemos:

$$(1)^2 + (2)^2 = 2c \Rightarrow c = \frac{5}{2}.$$

Entonces, con este valor de c tenemos el círculo

$$x^2 + y^2 = 5$$

que es la solución particular procurada.

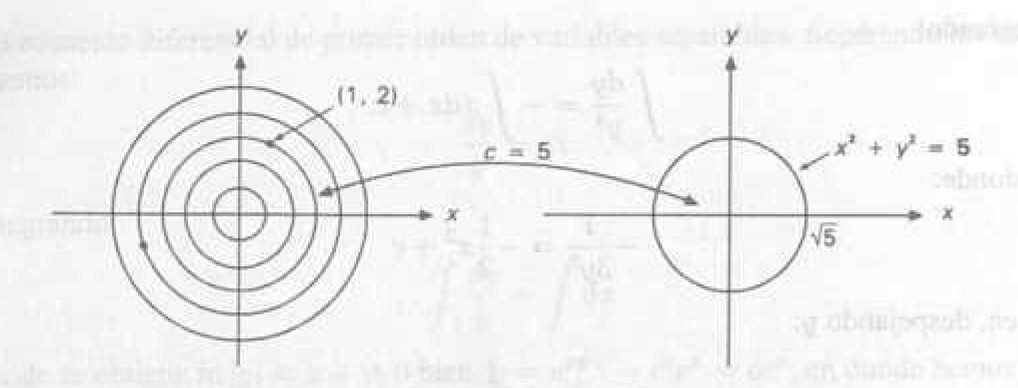


Figura 15.1.1. Solución general y solución particular del ejemplo 15.1.4.

★

EJEMPLO 15.1.5. Obtener la solución general de la ecuación diferencial $y' + 4y = 20$, y verificar que la solución obtenida efectivamente satisface a la ecuación.

SOLUCIÓN. Escribamos la ecuación como $y' = 4(5 - y)$. Separando las variables nos queda:

$$\frac{dy}{5 - y} = 4dx.$$

Integrando ambos miembros de la ecuación anterior obtenemos:

$$-\ln|5 - y| = 4x + c$$

de donde:

$$\ln|5 - y| = -4x - c \Rightarrow 5 - y = e^{-4x-c} \Rightarrow y = 5 - e^{-c}e^{-4x}.$$

Como c es una constante, e^{-c} es también una constante que podremos llamar de nuevo c. Entonces la solución general de la ecuación diferencial $y' + 4y = 20$ es:

$$y = 5 - ce^{-4x}.$$

Verifiquemos que esta función efectivamente satisface a la ecuación. La derivada de la función anterior es $y' = -ce^{-4x}(-4) = 4ce^{-4x}$. Sustituyendo en $y' + 4y$ tenemos:

$$y' + 4y = 4ce^{-4x} + 4\left(5 - ce^{-4x}\right) = 4ce^{-4x} + 20 - 4ce^{-4x} = 20.$$

Es decir, con la función $y = 5 - ce^{-4x}$ la ecuación $y' + 4y = 20$ se convierte en una identidad. Esto era lo que queríamos comprobar.

★

EJEMPLO 15.1.6. Obtener la solución particular de la ecuación diferencial $y' + 4 = 2x$ que satisfaga la condición inicial $y(0) = 3$.

SOLUCIÓN. Escribiendo la ecuación dada como $y' = 2x - 4$, separando variables e integrando, obtenemos:

$$\int dy = \int (2x - 4)dx + c.$$

Es decir:

$$y = x^2 - 4x + c.$$

Ésta es la solución general de la ecuación. Observe que la podemos escribir como $y = (x-2)^2 + c$ (esta última c no es la misma que la anterior, pero al fin y al cabo es una constante), expresión que corresponde a una familia de parábolas que abren hacia arriba y que tienen su vértice sobre la recta $x = 2$ (¿por qué?) De estas parábolas procuramos aquella que pase por el punto $(0, 3)$. Entonces:

$$3 = (0)^2 - 4(0) + c \Rightarrow c = 3.$$

Así, la solución particular procurada es:

$$y = x^2 - 4x + 3.$$

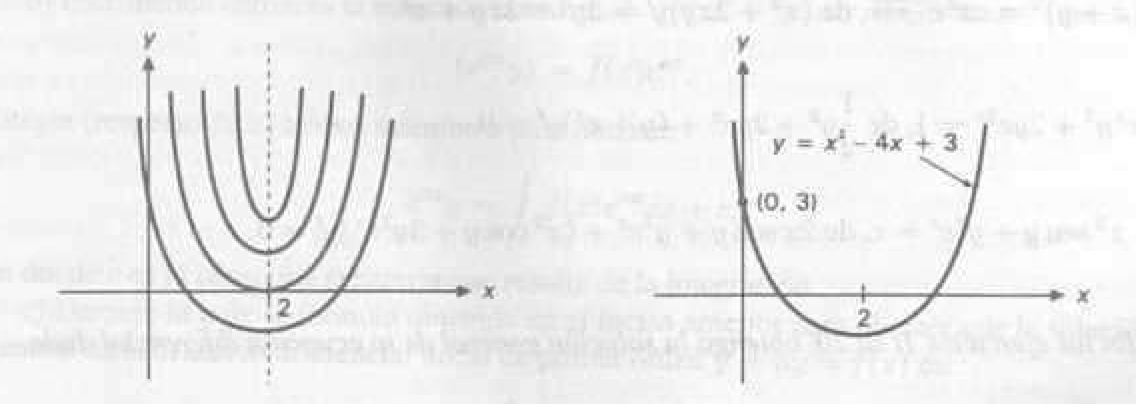


Figura 15.1.2. Solución general y particular de la ecuación diferencial del ejemplo 15.1.6.

*

EJERCICIOS (15.1)

En los ejercicios 1 al 10, verifique que la función $y = f(x)$ dada (explícita en los ejercicios 1 al 6, implícita en los ejercicios 7 al 10), es solución de la ecuación diferencial indicada.

1. $y = \sqrt[3]{c + 3x - 3x^2}$, de $y^2 y' = 1 - 2x$.

2. $y = 2x - 1$, de $y' + 2y = 4x$.

3. $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$, de $x^2 y' + (1 - 2x)y = 0$.

4. $y = (x + 3)(1 + x^2)$, de $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$.

5. $y = 3e^{-\operatorname{sen} x}$, de $y' + y\cos x = 0$.

6. $y = \dfrac{1 + x}{1 + x^2}$, de $y' + \dfrac{2x}{1 + x^2}y = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

7. $x^2 + y^2 = cy$, de $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$.

8. $(x + y)^2 = cx^3 e^{-\frac{x}{x+y}}$, de $(x^2 + 2xy)y' = 3y^2 + 3xy + x^2$.

9. $e^x y^2 + 2ye^{2x} = 1$, de $\dfrac{1}{2}y^2 + 2ye^x + (y + e^x)y' = 0$.

10. $x^2 \operatorname{sen} y + y^3 e^x = c$, de $2x \operatorname{sen} y + y^3 e^x + (x^2 \cos y + 3y^2 e^x)y' = 0$.

En los ejercicios 11 al 20, obtenga la solución general de la ecuación diferencial dada.

11. $y' = 2y$.

12. $y' = 3x$.

13. $y' = xy$.

14. $(1 + 4e^x)y' = e^x y^2$.

15. $yy' = e^{4x}$.

16. $y' + (\operatorname{sen} x)y = 0$.

17. $(\operatorname{sen} x)y' + y = 0$.

18. $y' = y\sqrt{4 - 3x}$.

19. $(x + 2)^3 y' + x(y + 1) = 0$.

20. $(x + 1)(y^2 + 1)y' + x^2 y = 0$.

En los ejercicios 21 al 30, obtenga las soluciones particulares de las ecuaciones dadas, que satisfagan la condición inicial indicada.

21. $y' = 6y$, $y(1) = 1$.

22. $y' = 3xy$, $y(2) = 3$.

23. $y' = x^2 y^3$, $y(1) = -1$.

24. $xyy' + 3 = 0,\ y(2) = 1.$

25. $(x+2)yy' + x = 0,\ y(-2) = 3.$

26. $\sqrt{4x-1}y' + x = 0,\ y(1) = 1.$

27. $(x+1)^4 y' + 4x = 0,\ y(2) = 2.$

28. $y' = y\sqrt{9x+2},\ y(0) = 3.$

29. $y' = (x+1)(y+2),\ y(0) = 0.$

30. $y' = (2x+3)^5(y-1)^4,\ y(4) = 1.$

31. (ECUACIONES LINEALES.) En este ejercicio consideraremos un tipo especial de ecuaciones diferenciales, llamadas **ecuaciones lineales** (de primer orden), las cuales son de la forma:

$$y' + ay = f(x)$$

en donde a es una constante dada, $f(x)$ es una función dada, y $y = y(x)$ es la función incógnita de la ecuación. Observe que esta ecuación no es, en general, de variables separables. En los siguientes incisos se presenta un método para obtener la solución general de la ecuación.

a) Multiplique toda la ecuación por e^{ax} para obtener:

$$e^{ax}y' + ae^{ax}y = f(x)e^{ax}.$$

Verifique que el primer miembro de la ecuación es la derivada del producto $e^{ax}y$.

b) Escribiendo entonces la ecuación como:

$$(e^{ax}y)' = f(x)e^{ax},$$

integre (respecto de x) ambos miembros para obtener:

$$e^{ax}y = \int f(x)e^{ax}dx + c,$$

en donde c es la constante arbitraria que resulta de la integración.

c) Despeje la y de la fórmula obtenida en el inciso anterior para obtener que la solución general de la ecuación diferencial lineal de primer orden $y' + ay = f(x)$ es:

$$y = e^{-ax}\int f(x)e^{ax}dx + ce^{-ax}.$$

32. Considere la ecuación $y' + 3y = 4$.

a) Resuelva esta ecuación viéndola como una ecuación diferencial de variables separables.

b) Resuelva esta ecuación viéndola como una ecuación lineal de primer orden (usando las ideas del ejercicio anterior).

En los ejercicios 33 a 40 obtenga la solución general de la ecuación lineal dada.

33. $y' + 2y = e^x.$

34. $y' - 5y = 4e^{2x}.$

35. $y' + 8y = -e^{-x}.$

36. $2y' - 5y = 3e^{5x}.$

37. $4y' + 3y = 2e^{0.1x}.$

38. $e^{2x}y' - e^{2x}y = 4.$

39. $y' + 5y = 6e^{-3x}$. **40.** $y' + 0.7y = 0.2e^{-0.3x}$.

41. Obtenga la solución particular de la ecuación $y' + 5y = e^{x}$ que satisfaga la condición inicial $y(0) = 1$.

42. Obtenga la solución particular de la ecuación $4y' - 2y = 5e^{-3x}$ que satisfaga la condición inicial $y(0) = -2$.

15.2 PROBLEMAS DE MOVIMIENTO DE CUERPOS

En el capítulo 10, aprendimos que dada la ley del movimiento rectilíneo de un cuerpo $x = f(t)$ (es decir, la función que nos da la posición x al tiempo $t \geq 0$), su derivada $x' = f'(t)$ nos daba la velocidad v del cuerpo en el instante t, y su segunda derivada $x'' = f''(t)$ nos daba su aceleración a en el instante t. Consideraremos ahora el problema inverso: supongamos que del movimiento rectilíneo de un cuerpo sabemos su aceleración $a = g(t)$ en cada instante $t \geq 0$, y queremos determinar la velocidad instantánea de su movimiento. Es decir, conocemos la derivada $a = \frac{dv}{dt} = g(t)$ y queremos determinar v. Éste es justamente el problema que planteamos en abstracto en la sección anterior: tenemos una ecuación diferencial $\frac{dv}{dt} = g(t)$ de la que queremos conocer la función v. Más aún, habiendo conocido ya esta función velocidad $v = h(t)$, queremos ahora determinar la ley del movimiento del cuerpo. Como $v = \frac{dx}{dt}$, tenemos entonces la ecuación diferencial $v = \frac{dx}{dt} = h(t)$ de la cual queremos obtener la función $x = f(t)$.

Un ejemplo muy ilustrativo de las situaciones planteadas anteriormente es el siguiente: supongamos que lanzamos un cuerpo verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_0. Queremos describir la velocidad y la posición del cuerpo (esta última medida respecto del piso) mientras éste se encuentra en el aire (subirá hasta alcanzar una cierta altura máxima, y luego caerá al piso).

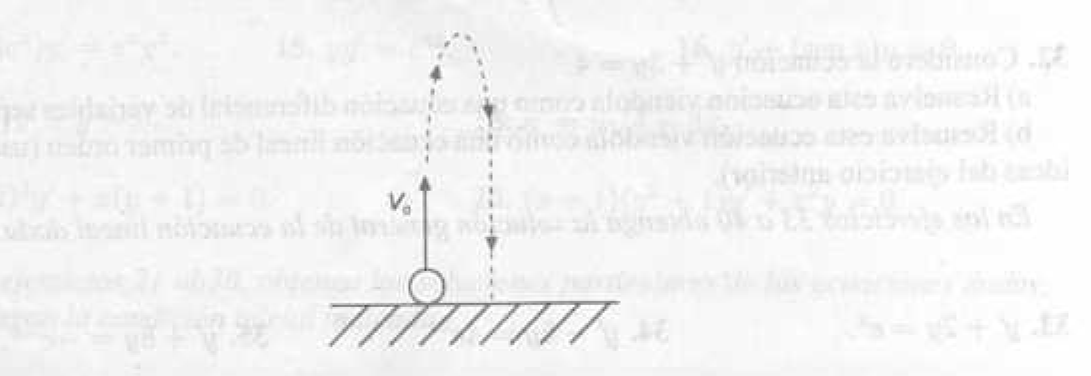


Figura 15.2.1. Un cuerpo que se lanza verticalmente hacia arriba.

Supongamos que la resistencia que ofrece el aire al movimiento del cuerpo es despreciable, de modo que en su movimiento solamente actuará la fuerza provocada por la aceleración de la gravedad. Como sabemos, esta fuerza es conocida como **peso** del cuerpo (comúnmente denotado por ω) y es igual al producto de su masa m por la aceleración de la gravedad g (que es igual, en el sistema de unidades MKS, a 9.81 m/s²). Así, en un instante dado $t > 0$, la segunda ley de Newton, nos dice que la fuerza $F = ma$ (en donde $a = \frac{dv}{dt}$ es la aceleración que lleva el cuerpo) que está actuando sobre el cuerpo en movimiento es igual a su peso $\omega = mg$. Tomamos la convención de que la dirección de movimiento del cuerpo de subida es la dirección positiva. Entonces, como F y ω son fuerzas en direcciones distintas (la fuerza F va en la dirección del movimiento del cuerpo, mientras que su peso ω apunta hacia la Tierra), tenemos la ecuación $F = -\omega$, es decir, $m\frac{dv}{dt} = -mg$, o bien, cancelando m de ambos miembros, nos queda:

$$\frac{dv}{dt} = -g.$$

Ésta es la ecuación diferencial del movimiento del cuerpo. Además, sabemos que a $t = 0$ (en el momento del lanzamiento), la velocidad del cuerpo era de v_0. Ésta es la condición inicial del problema: procuramos la función velocidad $v = h(t)$ que cumpla con la condición inicial $h(0) = v_0$.

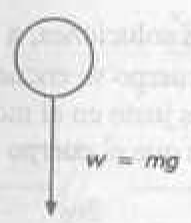


Figura 15.2.2. En un instante cualquiera, la única fuerza que actúa en el cuerpo es su peso.

Separando las variables de la ecuación $\frac{dv}{dt} = -g$, obtenemos $dv = -gdt$. Integrando ambos miembros de esta última expresión, se obtiene $v = -gt + c$. Como a $t = 0$ se tiene $v = v_0$, nos queda que $v_0 = -g(0) + c$, de donde $c = v_0$. Así, la función $v = h(t)$ que nos da la velocidad del cuerpo en cualquier instante $t \geq 0$ es:

$$v = v_0 - gt. \tag{1}$$

Si quisiéramos determinar la posición $x = f(t)$ del cuerpo en un instante $t \geq 0$, recordamos que $v = \frac{dx}{dt}$, obteniendo así la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 - gt.$$

Separando variables en esta ecuación nos queda:

$$dx = (v_0 - gt)\,dt.$$

Integrando:

$$\int dx = \int (v_0 - gt)\,dt$$

de donde:

$$x = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + c.$$

Como la distancia x recorrida por el cuerpo la estamos midiendo respecto del piso, se tiene que en el momento inicial $t = 0$, la distancia x es cero. Entonces:

$$0 = v_0(0) - \frac{1}{2}g(0)^2 + c \Rightarrow c = 0.$$

Así, la función $x = f(t)$ (la ley de movimiento del cuerpo) es:

$$x = v_0 t - \tfrac{1}{2}gt^2. \tag{2}$$

Escribiendo esta última expresión como:

$$x = t\left(v_0 - \frac{1}{2}gt\right)$$

vemos que la ecuación $x = 0$ tiene dos soluciones, a saber: $t_1 = 0$ y $t_2 = \frac{2v_0}{g}$. Éstos son dos valores del tiempo t en los que el cuerpo se encuentra en el piso (en donde $x = 0$). El primero de ellos, que ocurre a $t_1 = 0$, es justo en el momento del lanzamiento. Es claro que el otro $t_2 = \frac{2v_0}{g}$ debe ser el momento en que el cuerpo regresa al piso. Así, al tiempo:

$$t = \frac{2v_0}{g}$$

se le llama **tiempo total de vuelo del cuerpo.** De la ecuación de la velocidad $v = v_0 - gt$, vemos que ésta es igual a cero cuando $v_0 - gt = 0$, es decir, cuando $t = \frac{v_0}{g}$, siendo positiva para $0 < t < \frac{v_0}{g}$ y negativa para $\frac{v_0}{g} < t < \frac{2v_0}{g}$. De aquí se puede concluir que durante los primeros $\frac{v_0}{g}$ segundos de movimiento del cuerpo, éste va subiendo (con velocidad positiva) y llega a ser cero en el instante $t = \frac{v_0}{g}$ (que es justamente la mitad del tiempo total de vuelo, justo el instante en que llega al punto máximo de la altura alcanzada, en donde se detiene para comenzar su descenso), y luego, después de este instante, la velocidad es negativa, lo cual nos indica el movimiento de bajada del cuerpo. El valor de la distancia x (que estamos midiendo respecto del piso) para $t = \frac{v_0}{g}$ nos dará entonces la **altura máxima alcanzada por el cuerpo**. Ésta es:

$$x_{\text{máx}} = \left[v_0 t - \frac{1}{2}gt^2\right]_{t=\frac{v_0}{g}} = (v_0)\left(\frac{v_0}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2}\left(\frac{v_0^2}{g}\right) = \frac{v_0^2}{2g}.$$

En resumen: en el movimiento de un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad v_0, la velocidad v que lleva el cuerpo en un instante cualquiera $t \geq 0$ es:

$$v = v_0 - gt$$

y la posición x del cuerpo, medida respecto del piso, en un instante cualquiera $t \geq 0$ es:

$$x = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

El tiempo total que el cuerpo dura en el aire es:

$$t = \frac{2v_0}{g}.$$

La velocidad es positiva para $0 < t < \frac{v_0}{g}$, tiempo durante el cual el cuerpo va subiendo, negativa para $\frac{v_0}{g} < t < \frac{2v_0}{g}$, tiempo durante el cual el cuerpo viene bajando, y cero en $t = \frac{v_0}{g}$.

La altura máxima alcanzada por el cuerpo es:

$$x_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Gráficamente estos resultados se muestran en la figura 15.2.3.

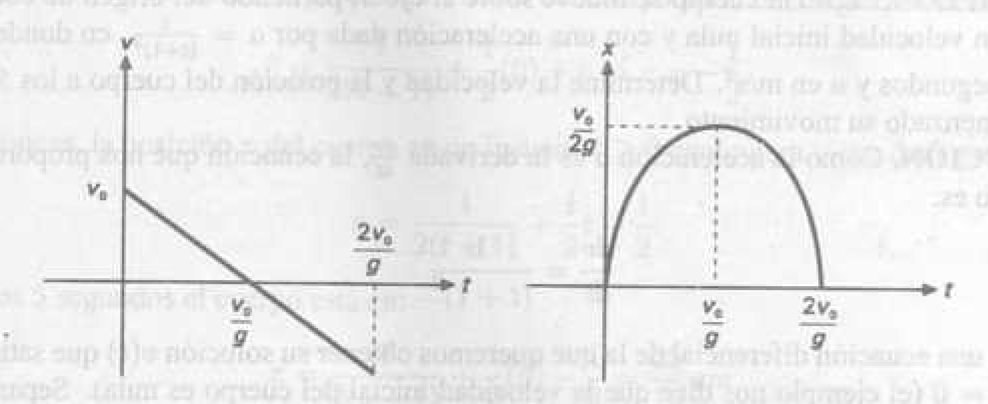


Figura 15.2.3. Velocidad y posición de un cuerpo que es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad v_0.

EJEMPLO 15.2.1. Un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial $v_0 = 15$ m/s. Determine la altura máxima alcanzada por el cuerpo, y el tiempo en el que éste regresará al piso.

SOLUCIÓN. Según las fórmulas obtenidas anteriormente, la altura máxima alcanzada es de:

$$x_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{(15)^2}{2(9.81)} \approx 11.468 \text{ m}.$$

y el tiempo total de vuelo es de:

$$t = \frac{2v_0}{g} = \frac{2(15)}{9.81} \approx 3.058 \text{ s.}$$

★

EJEMPLO 15.2.2. Un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba con una cierta velocidad inicial v_0. Si al cabo de 4.12 s el cuerpo regresa al piso, determine la velocidad inicial con la que el cuerpo fue lanzado, así como la altura máxima que alcanzó.

SOLUCIÓN. El tiempo total de vuelo del cuerpo, que se calcula como $t = \frac{2v_0}{g}$, fue de 4.12 s. Entonces $4.12 = \frac{2v_0}{g}$, de donde la velocidad inicial fue de

$$v_0 = \frac{4.12g}{2} \approx 20.2086 \text{ m/s.}$$

La altura máxima que el cuerpo alcanzó fue de:

$$x_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{(20.2086)^2}{2(9.81)} \approx 20.815 \text{ m.}$$

★

EJEMPLO 15.2.3. Un cuerpo se mueve sobre el eje x, partiendo del origen de coordenadas, con velocidad inicial nula y con una aceleración dada por $a = \frac{1}{(t+1)^3}$, en donde t se mide en segundos y a en m/s^2. Determine la velocidad y la posición del cuerpo a los 5 s de haber comenzado su movimiento.

SOLUCIÓN. Como la aceleración a es la derivada $\frac{dv}{dt}$, la ecuación que nos proporciona el ejemplo es:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{(t+1)^3}$$

la cual es una ecuación diferencial de la que queremos obtener su solución $v(t)$ que satisface que $v(0) = 0$ (el ejemplo nos dice que la velocidad inicial del cuerpo es nula). Separando variables e integrando nos queda:

$$\int dv = \int \frac{1}{(t+1)^3} dt + c.$$

O sea:

$$v = -\frac{1}{2(t+1)^2} + c.$$

Como a $t = 0$ tenemos $v = 0$, calculamos el valor de c como:

$$0 = -\frac{1}{2(0+1)^2} + c \Rightarrow c = \frac{1}{2}.$$

Entonces, la velocidad del cuerpo en un instante cualquiera $t \geq 0$ es:

$$v = -\frac{1}{2(t+1)^2} + \frac{1}{2}.$$

A los $t = 5$ s, la velocidad del cuerpo es de:

$$v = -\frac{1}{2(5+1)^2} + \frac{1}{2} = \frac{35}{72} \text{ cm/s.}$$

Como $v = \frac{dx}{dt}$, de la expresión obtenida para la velocidad del cuerpo nos queda que:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2(t+1)^2} + \frac{1}{2}.$$

Separando variables e integrando:

$$\int dx = \int \left(-\frac{1}{2(t+1)^2} + \frac{1}{2} \right) dt + c.$$

O sea:

$$x = \frac{1}{2(t+1)} + \frac{1}{2}t + c.$$

Como a $t = 0$ se tiene $x = 0$ (el movimiento del cuerpo parte del origen) se tiene:

$$0 = \frac{1}{2(0+1)} + \frac{1}{2}(0) + c \Rightarrow c = -\frac{1}{2}.$$

Entonces, la posición x del cuerpo en un instante $t \geq 0$ cualquiera viene dada por:

$$x = \frac{1}{2(t+1)} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}.$$

A los 5 segundos el cuerpo está en:

$$x = \frac{1}{2(5+1)} + \frac{1}{2}(5) - \frac{1}{2} = \frac{25}{12} \text{ cm.}$$

En resumen, a los 5 segundos de haber comenzado su movimiento, el cuerpo se encuentra en $x = \frac{25}{12}$ cm (a $\frac{25}{12}$ centímetros a la derecha del origen), moviéndose a la derecha con una rapidez de $\frac{35}{72}$ cm/s.

⋆

EJEMPLO 15.2.4. Un cuerpo de masa $m = 1$ kg se deja caer (con velocidad inicial nula) desde una cierta altura (grande). Suponga que la resistencia que ofrece el medio al movimiento de caída del cuerpo es $0.1v$ (Newtons), en donde v es la velocidad instantánea del cuerpo. Determine la velocidad que lleva el cuerpo a los 10 segundos de haber comenzado a caer.

SOLUCIÓN. Como en el ejemplo anterior, tomamos (al tiempo $t = 0$) el punto de donde se deja caer el cuerpo, como punto de referencia, y medimos las magnitudes (aceleración,

fuerza, velocidad, etcétera) como positivas en la dirección del movimiento del cuerpo. La fuerza F que actúa en el movimiento es igual a la suma del peso $\omega = mg$ más la fuerza de resistencia del medio. Esta última es negativa, pues apunta en la dirección contraria al movimiento. Siendo $F = m\frac{dv}{dt}$ (segunda ley de Newton), tenemos que:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - 0.1v.$$

Como la masa del cuerpo es de 1 kg, la ecuación diferencial que relaciona la velocidad instantánea v del cuerpo con el tiempo t queda como:

$$\frac{dv}{dt} = g - 0.1v.$$

Separando variables e integrando obtenemos:

$$\int \frac{dv}{g - 0.1v} = \int dt + c$$

de donde:

$$-\frac{1}{0.1}\ln|g - 0.1v| = t + c.$$

Como a $t = 0$ se tiene $v = 0$, la constante c debe valer $c = -10\ln g$ (¿por qué?) Entonces:

$$-10\ln|g - 0.1v| = t - 10\ln g.$$

Despejando v se obtiene:

$$-10\ln|g - 0.1v| = t - 10\ln g \Rightarrow \ln\left|1 - \frac{v}{10g}\right| = -\frac{t}{10}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{v}{10g} = e^{-\frac{t}{10}} \Rightarrow \frac{v}{10g} = 1 - e^{-\frac{t}{10}}$$

de donde finalmente se obtiene que:

$$v = 10g\left(1 - e^{-\frac{t}{10}}\right).$$

Ésta es la expresión que nos da la velocidad v del cuerpo a una tiempo $t \geq 0$ cualquiera. A los 10 segundos, la velocidad del cuerpo era de:

$$v = 10g\left(1 - e^{-\frac{10}{10}}\right) = 10g\left(1 - e^{-1}\right) = 62.011 \text{ m/s}.$$

★

EJEMPLO 15.2.5. Determine la distancia recorrida x del cuerpo del ejemplo anterior, a los 10 segundos de haber comenzado a caer.

SOLUCIÓN. Se obtuvo en el ejercicio anterior que la velocidad instantánea del cuerpo al tiempo $t \geq 0$ era:

$$v = 10g\left(1 - e^{-\frac{t}{10}}\right).$$

Como $v = \frac{dx}{dt}$, la expresión anterior se convierte en:

$$\frac{dx}{dt} = 10g\left(1 - e^{-\frac{t}{10}}\right).$$

Separando variables e integrando se obtiene:

$$\int dx = \int 10g\left(1 - e^{-\frac{t}{10}}\right) dt + c.$$

Hagamos la integral del lado derecho de la expresión anterior:

$$\int 10g\left(1 - e^{-\frac{t}{10}}\right) dt = 10g\int\left(1 - e^{-\frac{t}{10}}\right) dt = 10g\left[\int dt - \int e^{-\frac{t}{10}} dt\right]$$

$$= 10g\left[t + 10e^{-\frac{t}{10}}\right].$$

Entonces se obtiene que:

$$x = 10g\left[t + 10e^{-\frac{t}{10}}\right] + c.$$

Como a $t = 0$ se tiene $x = 0$, el valor de c en la expresión anterior es $c = -100g$. Así, la función que da la distancia recorrida x por el cuerpo en un instante $t \geq 0$ cualquiera es:

$$x = 10g\left[t + 10e^{-\frac{t}{10}}\right] - 100g.$$

A los 10 segundos de haber comenzado la caída, el cuerpo llevaba recorridos:

$$x = 10g\left[10 + 10e^{-\frac{10}{10}}\right] - 100g = 360.89 \text{ m}.$$

★

EJERCICIOS (15.2)

Cada uno de los ejercicios 1 al 10 se refiere a un cuerpo que se mueve sobre el eje x partiendo (a $t = 0$) de la posición $x = x_0$, con una velocidad inicial v_0 (t medido en segundos y x en metros). Conociendo la aceleración a del cuerpo en un instante $t \geq 0$ cualquiera, determine la velocidad y la posición del cuerpo en cualquier instante $t \geq 0$.

1. $a = -4$, $x_0 = 8$, $v_0 = 3$.

2. $a = 3t$, $x_0 = 1$, $v_0 = 0$.

3. $a = (2t + 1)^3$, $x_0 = 2$, $v_0 = 1$.

4. $a = -\dfrac{2}{\sqrt{4t + 9}}$, $x_0 = 0$, $v_0 = 0$.

5. $a = 3t + 7, x_0 = 0, v_0 = 0.$

6. $a = e^{-t+4}, x_0 = 0, v_0 = 0.$

7. $a = \dfrac{2}{(3t+11)^2}, x_0 = 0, v_0 = -5.$

8. $a = \cos(4t + 1), x_0 = 0, v_0 = 0.$

9. $a = -3 \operatorname{sen} 2t, x_0 = 0, v_0 = 0.$

10. $a = e^{-5t+1}, x_0 = 0, v_0 = 0.$

11. De una altura de 200 m se deja caer un objeto. A los 3 segundos, de un punto que está en el piso, exactamente por debajo de donde se dejó caer el objeto mencionado, se lanza una pelota verticalmente hacia arriba. Determine la velocidad inicial con la que habrá que lanzar la pelota para que ésta se encuentre con el objeto que viene cayendo, justamente a los 100 m.

12. Si se deja caer un objeto desde la parte más alta de un edificio, y éste llega al piso con una velocidad de 50 m/s, ¿cuál es la altura del edificio?

13. El conductor de un automóvil que viajaba a una velocidad de 120 km/h tiene que frenar repentinamente y aplica los frenos a fondo, produciendo una aceleración negativa de 15 m/s^2. ¿Cuántos metros recorrerá el coche (derrapando) antes de detenerse?

14. Un automóvil que viajaba a 110 km/h frena repentinamente y logra detenerse hasta los 20 m. Suponiendo que los frenos producen una aceleración (negativa) constante, calcule el valor de ésta.

15. En un cierto planeta (en el que la aceleración debida a la gravedad es distinta a la de la Tierra) se deja caer un objeto de una altura de 3 m y éste llega al piso después de 5 s. ¿Cuánto tardará en caer de una altura de 9 m?

15.3 PROBLEMAS DE MEZCLAS EN TANQUES

Consideremos un tanque que contiene V litros de líquido en el que están disueltos x_0 gramos de una cierta sustancia C (por ejemplo, sal disuelta en agua). En el instante $t = 0$ (minutos), comienza a fluir al tanque, a una razón de a litros cada minuto, una solución con una concentración de b gramos de C por cada litro de solución. La mezcla bien agitada (lo cual significa que tan pronto como llega el líquido al tanque, queda inmediatamente incorporado a la solución) sale del tanque a una rapidez de a litros cada minuto (de modo que el volumen V del tanque se conserva sin variación: el flujo que entra es igual al flujo que sale).

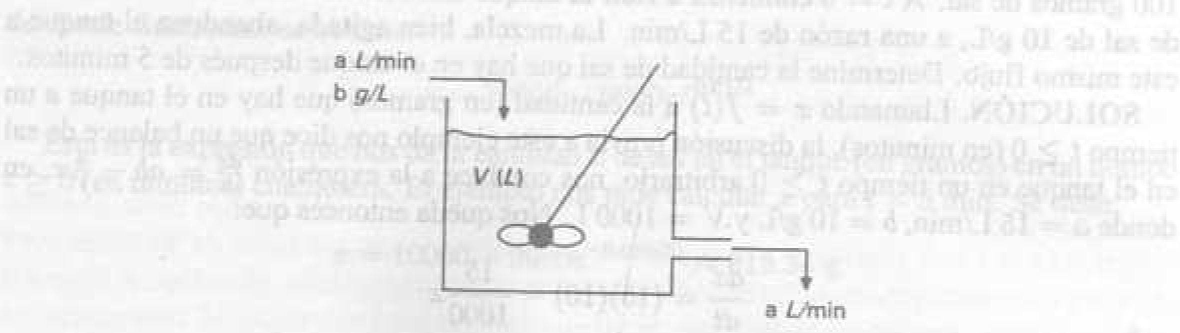


Figura 15.3.1. El problema de un tanque con una solución que lleva disuelta una sustancia C.

Se quiere determinar la cantidad x de C que hay en el tanque en un tiempo cualquiera $t \geq 0$. Si escribimos $x = f(t)$, observe que sabemos que $f(0) = x_0$ = cantidad inicial de C que hay en el tanque.

Para resolver este problema, haremos un "balance" de la cantidad de sal en el tanque en un instante cualquiera $t \geq 0$. Usaremos la simple idea de:

$$\left\{\begin{array}{c}\textbf{Variación} \text{ de la} \\ \text{cantidad de C que} \\ \text{hay en el tanque} \\ \text{a un tiempo } t \geq 0 \\ \text{(medida en g/min)}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{Cantidad (en} \\ \text{g/min) de C} \\ \text{que } \textbf{entra} \\ \text{al tanque}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{c}\text{Cantidad (en} \\ \text{g/min) de C} \\ \text{que } \textbf{sale} \\ \text{del tanque}\end{array}\right\}$$

Recordemos que la derivada $\frac{dx}{dt}$ mide justamente la rapidez de variación de x (la cantidad de C en el tanque) al tiempo t. Éste es justamente el lado izquierdo de la expresión anterior. Por otra parte, la cantidad de C que está entrando al tanque la podemos medir como:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Cantidad (en g/L) de} \\ \text{C que entra al tanque}\end{array}\right\} = \left(a\,\frac{\text{litros}}{\text{minuto}}\right)\left(b\,\frac{\text{gramos}}{\text{litro}}\right) = ab \text{ g/min.}$$

De manera análoga, en el flujo de salida, que es de a litros por minuto (igual al de entrada), se encuentran disueltos (en el instante t) x gramos de C en V litros de solución. Así que:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Cantidad (en g/L) de} \\ \text{C que sale del tanque}\end{array}\right\} = \left(a\,\frac{\text{litros}}{\text{minuto}}\right)\left(\frac{x \text{ gramos}}{V \text{ litros}}\right) = \frac{a}{V}x \text{ g/min.}$$

Entonces, el balance de C en el tanque en un tiempo arbitrario t nos queda como:

$$\frac{dx}{dt} = ab - \frac{a}{V}x$$

la cual es una ecuación diferencial de variables separables, de la que nos interesa conocer la solución $x = f(t)$ que satisface que a $t = 0$ se tiene $x = x_0$.

EJEMPLO 15.3.1. En un tanque se encuentran 1000 litros de agua que llevan disueltos 100 gramos de sal. A $t = 0$ comienza a fluir al tanque una solución con una concentración de sal de 10 g/L, a una razón de 15 L/min. La mezcla, bien agitada, abandona el tanque a este mismo flujo. Determine la cantidad de sal que hay en el tanque después de 5 minutos.

SOLUCIÓN. Llamando $x = f(t)$ a la cantidad (en gramos) que hay en el tanque a un tiempo $t \geq 0$ (en minutos), la discusión previa a este ejemplo nos dice que un balance de sal en el tanque en un tiempo $t \geq 0$ arbitrario, nos conduce a la expresión $\frac{dx}{dt} = ab - \frac{a}{V}x$, en donde $a = 15$ L/min, $b = 10$ g/L y $V = 1000$ L. Nos queda entonces que:

$$\frac{dx}{dt} = (15)(10) - \frac{15}{1000}x$$

o bien:

$$\frac{dx}{dt} = 150 - 0.015x.$$

Separando variables e integrando, obtenemos:

$$\int \frac{dx}{150 - 0.015x} = \int dt + c.$$

La integral del lado izquierdo la podemos hacer identificando como u al denominador $u = 150 - 0.015x$, cuya diferencial es $du = -0.015dx$. Falta entonces el factor constante -0.015 en el numerador de la integral, para que ésta se vea como $\int \frac{du}{u}$. Multiplicando y dividiendo por este factor, la expresión anterior se ve como:

$$-\frac{1}{0.015}\int \frac{-0.015dx}{150 - 0.015x} = t + c$$

de donde:

$$-\frac{1}{0.015}\ln|150 - 0.015x| = t + c.$$

Como a $t = 0$ tenemos $x = 100$ (la cantidad en gramos de sal que hay inicialmente en el tanque), podemos calcular el valor de c como:

$$-\frac{1}{0.015}\ln|150 - 0.015(100)| = 0 + c \Rightarrow c = -\frac{1}{0.015}\ln 148.5.$$

Entonces la expresión que relaciona x con t nos queda como:

$$-\frac{1}{0.015}\ln|150 - 0.015x| = t - \frac{1}{0.015}\ln 148.5.$$

De esta expresión podemos despejar x (para obtener la función $x = f(t)$). Algunos de los pasos de este despeje son:

$$-\frac{1}{0.015}\ln|150 - 0.015x| = t - \frac{1}{0.015}\ln 148.5 \Rightarrow \ln|150 - 0.015x| = -0.015t + \ln 148.5$$

$$\Rightarrow 150 - 0.015x = e^{-0.015t+\ln 148.5} \Rightarrow 0.015x = 150 - 148.5e^{-0.015t}$$

de donde finalmente se obtiene:

$$x = 10000 - 9900e^{-0.015t}.$$

Ésta es la expresión que nos da la cantidad x de sal en el tanque (en gramos) en un tiempo $t \geq 0$ (en minutos) cualquiera. El ejemplo nos pide calcular x para $t = 5$ min. Se tiene:

$$x = 10000 - 9900e^{-0.015(5)} \approx 815.34 \text{ g}.$$

★

EJEMPLO 15.3.2. En una compañía refresquera se tiene un tanque en el que se encuentran 5000 litros de agua que llevan disueltos 1250 gramos de un cierto contaminante M. Es decir, en el tanque se encuentra agua con una concentración de $\frac{1250}{5000} = 0.25$ g/L de M. Para poder usar el agua de ese tanque en la elaboración de refrescos, es necesario tenerla con una concentración máxima del contaminante de 0.1 g/L. Para lograr esta concentración, se conecta un flujo de agua pura (agua libre del contaminante) al tanque, a una razón de 50 L/min, y la mezcla, bien agitada, abandona el tanque a esta misma razón. Determine el tiempo necesario para que la concentración del contaminante en el tanque llegue a las especificaciones requeridas por la compañía.

SOLUCIÓN. Llamando x a la cantidad de M en el tanque al tiempo $t \geq 0$, la expresión del balance de M en el tanque $\frac{dx}{dt} = ab - \frac{a}{V}x$, con los datos del ejemplo $a = 50$ L/min, $b = 0$ g/L (pues al tanque está entrando agua libre de M) y $V = 5000$ L se convierte en:

$$\frac{dx}{dt} = -0.01x.$$

Separando variables e integrando nos queda:

$$\int \frac{dx}{x} = -0.01 \int dt + c$$

o bien:

$$\ln |x| = -0.01t + c.$$

Como a $t = 0$ tenemos $x = 1250$ (cantidad inicial de M en el tanque), la constante c la podemos calcular como:

$$\ln 1250 = -0.01(0) + c \Rightarrow c = \ln 1250.$$

Entonces, la expresión que relaciona x con t es:

$$\ln |x| = -0.01t + \ln 1250.$$

Queremos que la concentración de M en el tanque llegue a 0.1 g/L. Es decir, queremos que en los 5000 litros de agua que hay en el tanque, haya $(5000)(0.1) = 500$ g de M. Así

pues, se quiere calcular el valor de t para el cual $x = 500$. De la última expresión tenemos:

$$\ln 500 = -0.01t + \ln 1250 \Rightarrow t = 100 \ln \frac{5}{2} \approx 91.629 \text{ min.}$$

Así es que son necesarios 91.629 minutos para poder tener el agua del tanque con las especificaciones de la concentración de 0.1 g/L del contaminante M.

EJEMPLO 15.3.3. Un tanque contiene inicialmente 1000 L de agua que lleva disueltos 3 kg de sal. A $t = 0$ comienza a fluir hacia dentro del tanque, a una razón de 80 L/min, una salmuera con una concentración de 0.1 kg/L. La mezcla, bien agitada, abandona el tanque a la misma razón. Determine la cantidad de sal en el tanque a un tiempo $t \geq 0$ cualquiera.

SOLUCIÓN. Según lo discutido en la sección 3 de este capítulo, si x es la cantidad (en kilogramos) de sal en el tanque al tiempo t (en minutos), la ecuación diferencial que modela la variación de x con t es:

$$\frac{dx}{dt} = ab - \frac{a}{V}x$$

en donde a es el flujo de entrada (igual al de salida, que en nuestro ejercicio es de 80 L/min), b es la concentración de sal en el flujo de entrada (que en nuestro ejercicio es de 0.1 kg/L), y V es el volumen del tanque (igual a 1000 L). La ecuación anterior se convierte entonces en:

$$\frac{dx}{dt} = 8 - 0.08x.$$

Separando variables e integrando nos queda:

$$\int \frac{dx}{8 - 0.08x} = \int dt + c.$$

O sea:

$$-\frac{1}{0.08} \ln |8 - 0.08x| = t + c.$$

Como a $t = 0$ hay $x = 3$ kg de sal en el tanque, tenemos que:

$$-\frac{1}{0.08} \ln |8 - 0.08(3)| = 0 + c \Rightarrow c = -\frac{1}{0.08} \ln 7.76.$$

Entonces:

$$-\frac{1}{0.08} \ln |8 - 0.08x| = t - \frac{1}{0.08} \ln 7.76.$$

Despejemos x en términos de t. Algunos pasos de este despeje son:

$$-\frac{1}{0.08} \ln |8 - 0.08x| = t - \frac{1}{0.08} \ln 7.76 \Rightarrow \ln \left| \frac{8 - 0.08x}{7.76} \right| = -0.08t$$

$$\Rightarrow 8 - 0.08x = 7.76e^{-0.08t} \Rightarrow x = \frac{1}{0.08} \left(8 - 7.76e^{-0.08t} \right).$$

Así, la función:

$$x = 12.5\left(8 - 7.76e^{-0.08t}\right)$$

nos da la cantidad x de kg de sal en el tanque al tiempo $t \geq 0$. El aspecto geométrico de esta función se muestra en la figura siguiente.

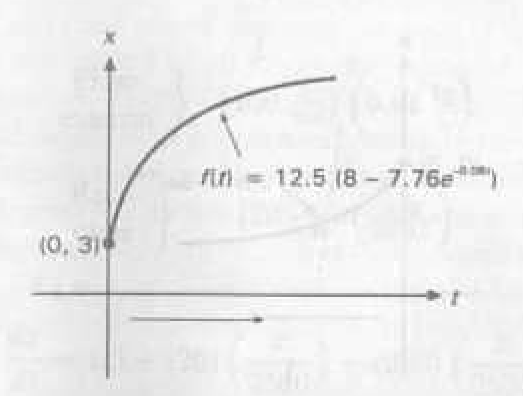


Figura 15.3.2. Cantidad x de sal que hay en el tanque del ejemplo 15.3.3 al tiempo $t \geq 0$.

★

EJEMPLO 15.3.4. Suponga que al tanque del ejemplo anterior le entra agua pura (todos los demás datos se mantienen iguales). Determine x en función de t.

SOLUCIÓN. El mismo planteamiento del ejercicio anterior, con $b = 0$ (concentración de sal en el flujo de entrada) nos conduce a la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = -0.08x.$$

Separando variables e integrando nos queda:

$$\int \frac{dx}{x} = -0.08 \int dt + c.$$

O sea:

$$\ln|x| = -0.08t + c.$$

Como a $t = 0$ hay $x = 3$ kg de sal en el tanque, tenemos que:

$$\ln 3 = 0 + c \Rightarrow c = \ln 3.$$

Entonces:

$$\ln|x| = -0.08t + \ln 3.$$

Despejemos x en términos de t. Nos queda:

$$\ln|x| = -0.08t + \ln 3 \Rightarrow \ln\left|\frac{x}{3}\right| = -0.08t \Rightarrow x = 3e^{-0.08t}.$$

Así, la función:

$$x = 3e^{-0.08t}$$

nos da la cantidad x de kilogramos de sal en el tanque después de t min. El aspecto geométrico de esta función se muestra en la figura 15.3.3.

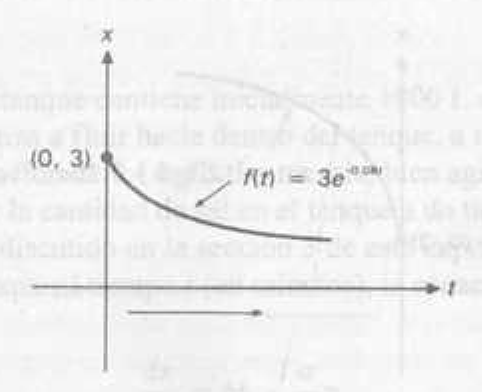


Figura 15.3.3. Cantidad x de sal que hay en el tanque del ejemplo 15.3.4 al tiempo $t \geq 0$.

EJEMPLO 15.3.5. Considere un tanque con 2500 L de agua que lleva disueltos 4.8 kg de sal. A $t = 0$ empieza a entrar al tanque una solución salina con una concentración de 0.01 kg/L, a una razón de 150 L cada minuto. La mezcla, bien agitada, tiene un flujo de salida de 200 L/min, de los cuales 50 L/min son reciclados al interior del tanque. Determine la cantidad de sal que hay en el tanque después de 10 min de haber comenzado el proceso.

SOLUCIÓN. Esquemáticamente se tiene la siguiente situación:

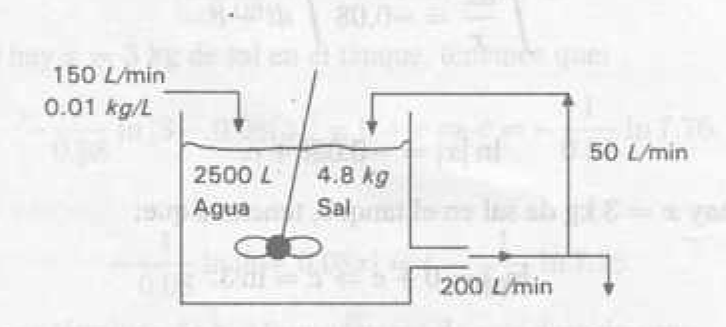


Figura 15.3.4. Tanque del ejemplo 15.3.5.

Llamemos x a la cantidad (en kg) que hay en el tanque al tiempo $t \geq 0$ (en min). El tanque ahora tiene dos entradas: una de una salmuera a una concentración de 0.01 kg/L, a una razón de 150 L/min, y otra del flujo de salida de 50 L/min. Así, en total al tanque está entrando un

flujo de 200 L/min, el cual es igual al flujo de salida, por lo que el volumen V de 2500 L en el tanque se mantiene constante. Entonces el balance de la variación de la cantidad de sal en el tanque (en g/min) se ve ahora como:

$$\underset{\downarrow}{\text{Variación de } x \text{ con respecto de } t} \quad = \quad \underset{\downarrow}{\text{Entradas}} \quad - \quad \underset{\downarrow}{\text{Salidas}}$$

$$\frac{dx}{dt} = \begin{rcases} \text{Flujo externo} \end{rcases} \left(150\,\tfrac{\text{L}}{\text{min}}\right)\left(0.01\,\tfrac{\text{kg}}{\text{L}}\right) + \begin{rcases} \text{Reciclaje} \end{rcases} \left(20\,\tfrac{\text{L}}{\text{min}}\right)\left(\tfrac{x\,\text{kg}}{2500\,\text{L}}\right) - \left(200\,\tfrac{\text{L}}{\text{min}}\right)\left(\tfrac{x\,\text{kg}}{2500\,\text{L}}\right)$$

Es decir:

$$\frac{dx}{dt} = 1.5 + (20)\left(\frac{x}{2500}\right) - (200)\left(\frac{x}{2500}\right)$$

o bien:

$$\frac{dx}{dt} = 1.5 - 0.072x.$$

Separando variables e integrando:

$$\int \frac{dx}{1.5 - 0.072x} = \int dt + c$$

de donde:

$$-\frac{1}{0.072}\ln|1.5 - 0.072x| = t + c.$$

Como a $t = 0$ teníamos $x = 4.8$ kg de sal en el tanque, calculamos el valor de c :

$$-\frac{1}{0.072}\ln|1.5 - 0.072(4.8)| = 0 + c \Rightarrow c = -\frac{1}{0.072}\ln 1.1544.$$

Entonces la expresión que relaciona x con t es:

$$-\frac{1}{0.072}\ln|1.5 - 0.072x| = t - \frac{1}{0.072}\ln 1.1544.$$

Despejando x se obtiene:

$$x = 20.8334 - 16.0334e^{-0.072t}.$$

Cuando $t = 10$ min, la cantidad de sal en el tanque es de:

$$x = 20.8334 - 16.0334e^{-0.072(10)} = 13.029 \text{ kg}.$$

★

EJERCICIOS (15.3)

1. En un tanque hay 1500 litros de agua pura. A $t = 0$ comienza a fluir al tanque, a una razón de 30 litros por minutos, una salmuera con una concentración de sal de 85 g/L. La mezcla, bien agitada, abandona el tanque a la misma razón. Determine la cantidad de sal que habrá en el tanque después de media hora.

2. En un tanque hay 3500 litros de agua que llevan disueltos 1780 gramos de sal. A $t = 0$ comienza a fluir al tanque, a una razón de 50 L/min, una solución salina con una concentración de sal de 120 g/L. La mezcla, bien agitada, abandona el tanque a la misma razón de 50 L/min. Determine el momento en el que en el tanque hay 20 kg de sal.

3. En un tanque hay 1700 litros de agua que llevan disueltos 800 gramos de sal. A $t = 0$ comienza a fluir al tanque, a una razón de 75 L/min, agua pura. La mezcla, bien agitada, abandona el tanque a la misma razón de 75 L/min. ¿En qué momento hay en el tanque solamente 100 gramos de sal?

4. En un tanque hay 3500 litros de agua contaminada con un compuesto C. La concentración inicial de C en el tanque es de 1 gramo por litro de solución. A $t = 0$ comienza a fluir al tanque agua pura a una razón de 100 L/min y la mezcla, bien agitada, sale del tanque a la misma razón. Determine el momento en el que la concentración del contaminante en el tanque sea de 0.01 g/L.

5. En un tanque hay 2000 litros de agua pura. A $t = 0$ comienza a fluir al tanque, a una razón de 50 litros cada minuto, una solución salina conteniendo 110 gramos de sal por litro de solución. Durante 10 minutos no hay salida del líquido del tanque. Para $t \geq 10$, comienza a salir del tanque la mezcla bien agitada, a la misma razón de 50 L/min. Determine la concentración de sal en el tanque después de media hora.

6. Considere el tanque del ejemplo anterior. Suponga que a los 20 minutos se para el flujo de entrada de la salmuera al tanque, y sólo se permite el desalojo de la solución (a la misma razón de 50 L/min). Determine la cantidad de sal que hay en el tanque después de media hora.

7. Considere el ejemplo 15.3.2. Suponga que el flujo de entrada (de agua pura) al tanque es de 180 L/min (igual al flujo de salida de la mezcla). Determine entonces el tiempo que se requiere para tener el agua del tanque a las especificaciones requeridas de la concentración del contaminante M.

8. En un tanque hay inicialmente 2800 litros de agua que lleva disueltos 10 kg de sal. A $t = 0$ comienza a fluir al tanque una solución salina, con una concentración de 5 gramos de sal por litro de solución, a una razón de 130 L/min. El flujo de salida de la mezcla bien agitada es de 150 L/min, de los cuales 20 L/min se reciclan al interior del tanque. Determine la cantidad de sal que hay en el tanque a los 20 minutos.

9. En este ejercicio se considera un problema de mezclas en tanques en el que la concentración (de la sal) en el flujo de entrada es variable. La ecuación diferencial que resulta de modelar esta situación es una ecuación lineal de primer orden de las estudiadas en el ejercicio 31 de la primera sección de este capítulo. Considere un tanque de 1000 litros de capacidad conteniendo inicialmente agua pura. Al tiempo $t = 0$ (t en minutos) comienza a entrar al tanque un flujo de 100 L/min de una salmuera cuya concentración de sal es variable y viene dada por $f(t) = e^{-t}$ g/L. La mezcla, bien agitada, sale del tanque a la misma razón

de 100 L/min. Llamando $x = x(t)$ a la cantidad (en gramos) de sal en el tanque al tiempo t, demuestre que esta función satisface la ecuación diferencial:

$$x' + 0.1x = 100e^{-t}.$$

Resuelva la ecuación anterior para obtener que su solución general es:

$$x = -\frac{1000}{9}e^{-t} + ce^{-0.1t}.$$

Imponga la condición inicial $x(0) = 0$ (en el tanque había inicialmente agua pura) para obtener que la cantidad de sal en el tanque al tiempo t es:

$$x = \frac{1000}{9}\left(e^{-0.1t} - e^{-t}\right).$$

10. Demuestre que la cantidad de sal en el tanque del ejercicio anterior crece durante los primeros $\frac{10 \ln 10}{9}$ minutos, y después comienza a decrecer. ¿Cuál es la cantidad de sal que habrá en el tanque después de un tiempo muy grande?

11. Suponga que el tanque del ejercicio 9 tenía inicialmente 250 g de sal. Calcule la cantidad de sal que habrá en el tanque después de 15 minutos.

12. Suponga que la concentración del flujo de entrada al tanque del ejercicio 9 es de $0.2e^{-0.3t}$ g/L y que el tanque contenía inicialmente 100 g de sal. Determine la cantidad de sal que habrá en el tanque al tiempo $t \geq 0$.

13. Se tiene un tanque que contiene 1000 L de agua pura. Al tiempo $t = 0$ comienza a fluir dentro del tanque, a una razón de 150 L/min, una salmuera con una concentración de sal de 20 g/L. La mezcla, bien agitada, sale del tanque a la misma razón, y entra a un segundo tanque que tenía inicialmente también 1000 L de agua pura. De este segundo tanque, la mezcla bien agitada, sale a la misma razón de 150 L/min. Llame $x = x(t)$ a la cantidad de sal (en gramos) que hay en el primer tanque al tiempo t (en minutos), y $y = y(t)$ a la cantidad de sal (en gramos) que hay en el segundo tanque al tiempo t.

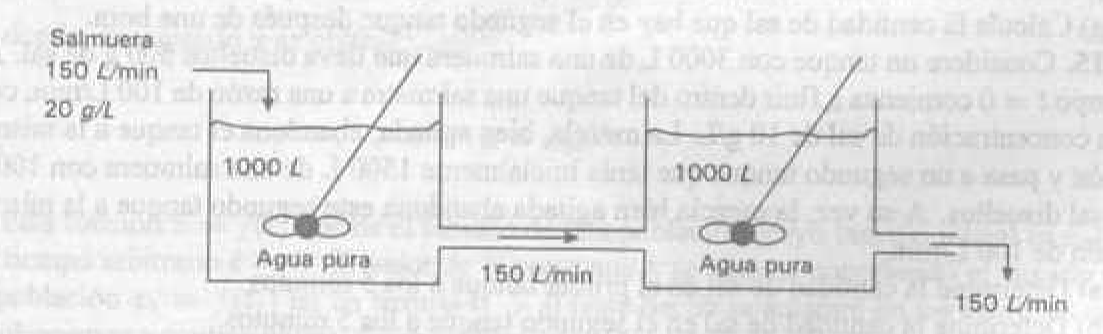


Figura 15.3.5. Tanques del ejercicio 13.

a) Demuestre que la función $x = x(t)$ satisface la ecuación diferencial:

$$x' + 0.15x = 3000,$$

con la condición inicial $x(0) = 0$.

b) Resuelva la ecuación del inciso anterior para obtener que la cantidad (en gramos) $x = x(t)$ de sal en el primer tanque a los t minutos es de:

$$x = 20000(1 - e^{-0.15t}).$$

c) Demuestre que la función $y = y(t)$ satisface la ecuación diferencial:

$$y' + 0.15y = 0.15x,$$

con la condición inicial $y(0) = 0$, en donde x es la función obtenida en el inciso anterior. Observe que ésta es una ecuación diferencial lineal de las estudiadas en el ejercicio 31 de la primera sección de este capítulo.

d) Resuelva la ecuación obtenida en el inciso anterior para obtener que la cantidad (en gramos) de sal que hay en el segundo tanque al tiempo t (en minutos) es de:

$$y = 20000 - 1000e^{-\frac{3t}{20}}(3t + 20).$$

14. Considere un tanque con 1500 L de una salmuera que lleva disueltos 2000 g de sal. Al tiempo $t = 0$ comienza a fluir dentro del tanque agua pura a una razón de 100 L/min. La mezcla, bien agitada, abandona el tanque a la misma razón y pasa a un segundo tanque que tenía inicialmente 1500 L de agua pura. A su vez, la mezcla bien agitada abandona este segundo tanque a la misma razón de 100 L/min.

a) Determine la cantidad de sal en el primer tanque a los 10 minutos.

b) Determine la cantidad de sal en el segundo tanque a los 10 minutos.

c) Calcule el momento en el que en el primer tanque queda la mitad de la sal que había inicialmente.

d) Demuestre que la cantidad de sal en el primer tanque es siempre una función decreciente del tiempo.

e) Demuestre que durante los primeros 15 minutos la cantidad de sal en el segundo tanque está creciendo, y que luego comienza a decrecer.

f) Calcule la cantidad máxima de sal que hay en el segundo tanque en cualquier tiempo.

g) Calcule la cantidad de sal que hay en el segundo tanque después de una hora.

15. Considere un tanque con 3000 L de una salmuera que lleva disueltos 500 g de sal. Al tiempo $t = 0$ comienza a fluir dentro del tanque una salmuera a una razón de 100 L/min, con una concentración de sal de 10 g/L. La mezcla, bien agitada, abandona el tanque a la misma razón y pasa a un segundo tanque que tenía inicialmente 1500 L de una salmuera con 100 g de sal disueltos. A su vez, la mezcla bien agitada abandona este segundo tanque a la misma razón de 100 L/min.

a) Determine la cantidad de sal en el primer tanque a los 5 minutos.

b) Determine la cantidad de sal en el segundo tanque a los 5 minutos.

c) Calcule el momento en el que en el primer tanque quedan 1000 g de sal.

15.4 PROBLEMAS DE CRECIMIENTO DE POBLACIONES

Un interesante problema práctico es poder modelar el crecimiento de una población. En esta sección veremos un modelo muy simple que ayuda a hacer predicciones sobre el tamaño de una población en un tiempo determinado. Si llamamos $x = f(t)$ al tamaño (el número de elementos) de una población al tiempo $t \geq 0$, la derivada $\frac{dx}{dt}$ mide la velocidad a la que x está cambiando con el tiempo. Es decir, esta derivada nos da la velocidad de crecimiento de la población, que en $t = 0$ tenía $f(0) = x_0$ elementos (este dato es conocido). Resulta sensato pensar en que el comportamiento de esta derivada (del crecimiento de la población) sea tal que ésta sea proporcional al tamaño de la población en el instante t: mientras más grande sea la población, la velocidad a la que ésta crece es mayor. Entonces se tiene el modelo:

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

en donde k es una constante de proporcionalidad, el cual corresponde a una ecuación diferencial de variables separables, de la que interesa la solución $x = f(t)$ que satisfaga la condición inicial $x_0 = f(0)$. De hecho, separando las variables e integrando, se obtiene:

$$\int \frac{dx}{x} = \int k dt + c$$

o bien:

$$\ln |x| = kt + c.$$

Como a $t = 0$ se tiene $x = x_0$, la constante c debe ser $c = \ln x_0$ (¿por qué?) Entonces:

$$\ln |x| = kt + \ln x_0$$

de donde, despejando x se obtiene:

$$x = x_0 e^{kt}.$$

Esta función $x = f(t)$ nos da el tamaño de una población (cuyo tamaño inicial es x_0), a un tiempo arbitrario $t \geq 0$. El valor de la constante k se obtiene conociendo el tamaño de la población $x_1 = f(t_1)$ en un tiempo $t_1 > 0$ (este hecho se aclarará en los ejemplos que resolveremos a continuación). Geométricamente la función $x = f(t)$ se ve como se muestra en la figura 15.4.1. Una población que obedece al modelo descrito anteriormente, se dice que tiene un **crecimiento exponencial.**

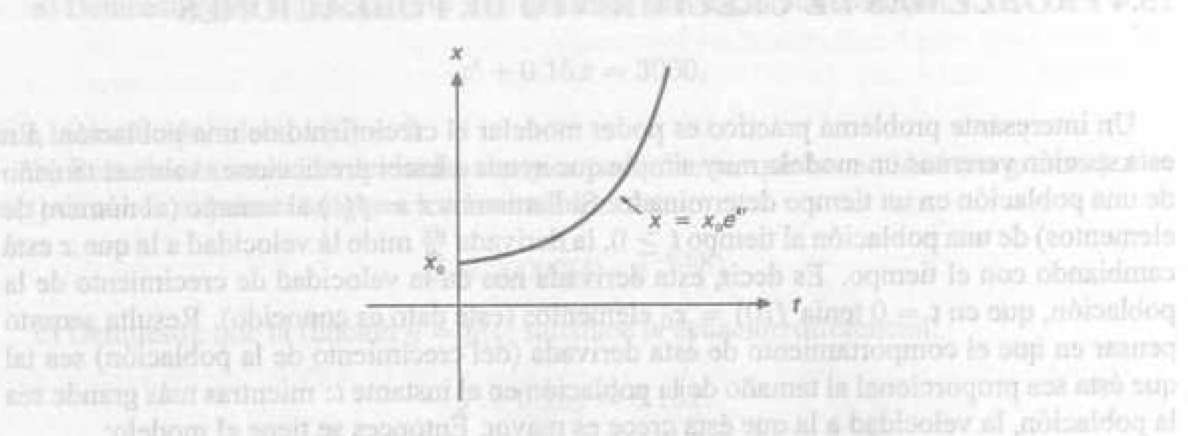


Figura 15.4.1. Crecimiento exponencial de una población.

EJEMPLO 15.4.1. En el año de 1992, una cierta población del estado de Michoacán, tenía 100,000 habitantes. Dos años después, el número de habitantes era de 110,000. Suponiendo que el crecimiento de esta población es exponencial, determine el número de habitantes que tendrá la población en el año 2000.

SOLUCIÓN. Tomando como $t = 0$ al año 1992, tenemos que el tamaño $x = f(t)$ de la población al tiempo t obedece, según la discusión previa al ejemplo, la ley $x = x_0e^{kt}$, en donde $x_0 = 100,000$ (tamaño de la población al tiempo $t = 0$). Se tiene entonces que:

$$x = 100,000e^{kt}.$$

Se sabe que si $t = 2$, entonces $x = 110,000$, de modo que:

$$110,000 = 100,000e^{k(2)} \Rightarrow e^{2k} = 1.1 \Rightarrow 2k = \ln 1.1 \Rightarrow k = \frac{1}{2}\ln 1.1 \approx 0.04765.$$

Entonces, la función que nos da el tamaño x de la población al tiempo t es:

$$x = 100,000e^{0.04765t}.$$

El año 2000 corresponde a $t = 8$, de modo que para este año se espera que el tamaño de la población sea de:

$$x = 100,000e^{(0.04765)(8)} = 146,410.$$

★

EJEMPLO 15.4.2. Se forma un cultivo con un cierto número x_0 de bacterias. Se observa que una hora después, el número de bacterias en el cultivo se ha duplicado. ¿Cuánto tardará el cultivo en triplicar su población inicial?

SOLUCIÓN. A $t = 0$ se tiene una población de x_0 bacterias, de modo que el número x de éstas a un tiempo $t \geq 0$ es $x = x_0e^{kt}$. Se sabe que para $t = 1$ se tiene $x = 2x_0$, de modo que:

$$2x_0 = x_0e^{k(1)} \Rightarrow k = \ln 2.$$

Así, la función que da el número de bacterias en el cultivo a un tiempo $t \geq 0$ es:

$$x = x_0e^{(\ln 2)t}.$$

Se quiere saber a qué tiempo se tendrá $x = 3x_0$. Sustituyendo esta x en la expresión anterior y despejando t se obtiene:

$$3x_0 = x_0e^{(\ln 2)t} \Rightarrow 3 = e^{(\ln 2)t} \Rightarrow \ln 3 = (\ln 2)t \Rightarrow t = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1.585 \text{ h}.$$

Es decir, después de 1.585 horas la cantidad inicial de bacterias en el cultivo se habrá triplicado.

★

EJEMPLO 15.4.3. Una cierta población tiene inicialmente 230,000 habitantes. Tres años después la población ha crecido a 280,000 habitantes. ¿Qué tamaño de población se espera después de otros tres años?

SOLUCIÓN. Si x es el tamaño de la población al tiempo $t \geq 0$ (en años), el modelo que establece la rapidez del crecimiento de ésta es, como hemos visto, $\frac{dx}{dt} = kx$, cuya solución es $x = x_0e^{kt}$, en donde x_0 es el tamaño inicial de la población (en nuestro ejercicio $x_0 = 230,000$). Sabemos que para $t = 3$ se tiene $x = 280,000$. Con estos datos calculamos k :

$$280,000 = 230,000e^{k(3)} \Rightarrow k = \frac{1}{3}\ln\frac{28}{23}.$$

Entonces la función que nos da el tamaño de la población al tiempo t es:

$$x = 230,000e^{\left(\frac{1}{3}\ln\frac{28}{23}\right)t}.$$

Para $t = 6$ la población será de:

$$x = 230,000e^{\left(\frac{1}{3}\ln\frac{28}{23}\right)6} = 230,000e^{2\ln\frac{28}{23}} \approx 340,870.$$

★

EJEMPLO 15.4.4. En un estudio realizado en un tejido vivo en un laboratorio se reportó que el tejido se encontraba libre de bacterias. A los dos días se detectó una población de 4500 bacterias en el tejido, y un día después, el número de bacterias era de 7200. ¿Cuántas bacterias comenzaron la contaminación del tejido?

SOLUCIÓN. Siendo $x = x_0e^{kt}$ la función que da el número x de bacterias en el tejido al tiempo t (en días), el ejercicio pregunta por x_0 (el número de bacterias en el tejido al tiempo $t = 0$). Sabemos que para $t_1 = 2$ se tenía $x_1 = 4500$ y para $t_2 = 3$ se tenía $x_2 = 7200$. Es decir, se tienen las relaciones:

$$4500 = x_0e^{k(2)} \quad \text{y} \quad 7200 = x_0e^{k(3)}.$$

Dividiendo la segunda de éstas entre la primera, se obtiene:

$$\frac{7200}{4500} = \frac{x_0 e^{3k}}{x_0 e^{2k}} = e^k$$

de donde:

$$k = \ln \frac{72}{45} = \ln 1.6.$$

Entonces la función que da el número x de bacterias al tiempo t es:

$$x = x_0 e^{(\ln 1.6)t}$$

de donde:

$$x_0 = x e^{-(\ln 1.6)t}.$$

Podemos usar los datos $t_1 = 2$ y $x_1 = 4500$ para calcular x_0:

$$x_0 = 4500 e^{-(\ln 1.6)(2)} \approx 1758.$$

Hubiéramos podido calcular x_0 también con los datos $t_2 = 3$ y $x_2 = 7200$ (¿por qué?) Entonces, el número de bacterias con el que el tejido comenzó a contaminarse fue de (aproximadamente) 1758.

*

EJERCICIOS (15.4)

1. Una población reportó un millón de habitantes en enero del año de 1994. En enero de 1996 el número de habitantes era de 1.4 millones. ¿En qué momento tendrá esta población 2 millones de habitantes? Dé su resultado con mes y año (suponga que los datos dados en el ejercicio corresponden al día primero del mes de enero).

2. Si el tamaño inicial de una población es de x_0, y después de un cierto tiempo t_1, su tamaño es de x_1, demuestre que la constante k de proporcionalidad en el modelo del crecimiento de esta población $\frac{dx}{dt} = kx$, es de $k = \frac{1}{t_1} \ln \frac{x_1}{x_0}$.

3. La reproducción de células cancerosas en un tejido obedece a un modelo de crecimiento exponencial. Suponga que un tejido contiene inicialmente 10 células cancerosas y que después de una hora el número se ha duplicado. ¿Cuántas células malignas tendrá el tejido después de un día?

4. La manera como crece un "chisme" en una cierta población obedece a un modelo de crecimiento exponencial. A las 9:00 a.m., en una cafetería de una población de 100,000 habitantes, se genera un chisme político en una mesa con cinco personas, cada una de las cuales tiene una familia de 4 miembros. A las dos horas las familias de estas personas ya

saben el chisme (es decir, después de 2 horas, ya hay 20 personas que están enteradas del chisme), y lo comienzan a difundir. ¿A qué hora la población entera estará enterada del chisme?

5. En el ejemplo 15.4.2, suponga que $x_0 = 100$. Determine el número de bacterias que habrá en el cultivo después de 4 horas.

Los ejercicios 6 al 12 tratan sobre el fenómeno de desintegración radiactiva: los llamados elementos radiactivos se desintegran obedeciendo a la ley de desintegración radiactiva, según la cual la velocidad de desintegración del elemento al tiempo t es proporcional a la cantidad que hay de éste en ese tiempo. Si llamamos $x = x(t)$ a la cantidad que hay del elemento radiactivo al tiempo t, la ley mencionada establece que:

$$\frac{dx}{dt} = -kx$$

en donde k es una constante de proporcionalidad (positiva).

6. Se descubrió que durante 25 años se desintegró el 2% de un cierto material radiactivo. Calcule el tiempo que habrá que transcurrir para que se desintegre el 25% de la cantidad original del elemento.

7. Un gramo de un elemento radiactivo de desintegración muy rápida, tarda 5 minutos para perder la mitad de su masa. Si se tienen inicialmente 20 g de ese elemento, calcule la cantidad que habrá de él después de media hora.

8. Se llama **vida media** de un elemento radiactivo, denotada por $t_{1/2}$, al tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de una cierta cantidad x_0 del elemento. Demuestre que:

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k},$$

en donde k es la constante de proporcionalidad de la ley de desintegración radiactiva del elemento.

9. La vida media del radio es de 1700 años. Si se tienen inicialmente x_0 g de radio, calcule la cantidad que quedará después de 100 años.

10. La vida media del isótopo carbono 14 (C-14, llamado radiocarbono), es de aproximadamente 5550 años. Se sabe que un cierto fósil corresponde a un animal que, al morir, se quedó con x_0 g de C-14 en su tejido óseo. Ahora se descubre que el fósil solamente tiene $0.7x_0$ g del isótopo radiactivo. Calcule la edad aproximada del fósil.

11. Suponga que se conocen las cantidades que hay de un elemento radiactivo en dos tiempos distintos t_1 y t_2, siendo éstas x_1 y x_2, respectivamente. Demuestre que la vida media de este elemento se puede calcular con estos datos usando la fórmula:

$$t_{1/2} = \frac{(t_2 - t_1)\ln 2}{\ln \dfrac{x_1}{x_2}}.$$

12. A $t = 0$ hay x_0 gramos de un elemento radiactivo. Si $x = x(t)$ es la cantidad de este elemento al tiempo t, y se conocen $x_1 = x(t_1)$ y $x_2 = x(t_2)$, demuestre que se tiene la relación:

$$\left(\frac{x_2}{x_0}\right)^{t_1} = \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^{t_2}.$$

Los ejercicios 13 al 17 tratan sobre la ley de enfriamiento de Newton: la velocidad de variación de la temperatura de un cuerpo (la velocidad a la que éste se enfria) en un medio cuya temperatura ambiente es T_m, es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura del medio. Si llamamos $T = T(t)$ a la temperatura del cuerpo al tiempo t, la ley mencionada establece que:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

en donde k es una constante de proporcionalidad.

13. Un cuerpo que se encuentra inicialmente a 80 °C se coloca en un medio cuya temperatura es de 25 °C. Después de 15 minutos, se vio que la temperatura del cuerpo era de 60 °C. Demuestre que la constante de proporcionalidad de la ley de enfriamiento de Newton en este caso es de $k = \frac{1}{15}\ln\frac{7}{11}$. ¿Qué unidades tiene esta constante?

14. Resuelva el ejercicio anterior en el caso general: suponga que la temperatura inicial del cuerpo es de T_0 °C, que la temperatura del medio es de T_m °C, y que después de un tiempo de t_1 minutos, la temperatura del cuerpo es de T_1 °C. Demuestre que la constante de proporcionalidad de la ley de enfriamiento de Newton es de:

$$k = \frac{1}{t_1}\ln\frac{T_1 - T_m}{T_0 - T_m}.$$

15. Un cuerpo a 90 °C se coloca en un cuarto que está a una temperatura de 30 °C. A la media hora se ha visto que la temperatura del cuerpo descendió a 55 °C. Calcule cuánto tiempo tiene que transcurrir para que el cuerpo esté a una temperatura de 30 °C.

16. Cuando se saca un pastel del horno, éste se encuentra a 130 °C. La temperatura de la cocina es de 20 °C. Después de una hora la temperatura del pastel es de 50 °C. Determine la temperatura que tendrá el pastel en función del tiempo $t \geq 0$. ¿Qué sucederá con la temperatura del pastel para tiempos muy grandes?

17. Si la temperatura del aire es de 15 °C y un cuerpo se enfria de 70 °C a 30 °C en dos horas, calcule cuánto tiempo debe transcurrir para que su temperatura sea de 25 °C.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 15

EXAMEN TIPO (A)

1. Hallar la solución general de la ecuación diferencial $xy' + 3y = 0$ y verificar que la función obtenida satisface efectivamente la ecuación diferencial.

2. Hallar la solución particular de la ecuación $y' = \frac{y}{x}$ que satisfaga la condición inicial $y(1) = 1$. Interprete geométricamente el resultado obtenido.

3. Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial $v_0 = 25$ m/s. Determinar la altura máxima alcanzada por el cuerpo, y su tiempo total de vuelo. (Se supone nula la resistencia del aire.)

4. Una ventana del primer piso de un edificio se encuentra a 6 metros del piso. Cuando se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba (por fuera del edificio, desde el piso) con una velocidad inicial de $v_0 = 20$ m/s, el cuerpo pasa por la ventana dos veces: una cuando va subiendo y otra cuando va bajando. Determine los dos instantes en los que una persona que está mirando por la ventana ve el vuelo del cuerpo. (Se supone nula la resistencia del aire.)

5. Un cuerpo cuya masa es de $m = 0.2$ kg se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de $v_0 = 25$ m/s. Suponga que la fuerza de resistencia que ofrece el aire al movimiento del cuerpo es de $0.2v$ Newtons, en donde v es la velocidad instantánea del cuerpo. Determine la altura máxima alcanzada. (Sugerencia: tome como punto de referencia $x = 0$ el piso, y considere las magnitudes involucradas en el movimiento del cuerpo como positivas en la dirección del movimiento —hacia arriba—. Observe entonces que tanto el peso del cuerpo como la resistencia del medio son fuerzas negativas.) Compare con el resultado del ejercicio 3.

6. Repita el ejercicio anterior suponiendo que la resistencia que ofrece el aire al movimiento del cuerpo es de $0.4v$ Newtons.

7. En un tanque se encuentran inicialmente 500 litros de agua pura. A $t = 0$ comienza a fluir al tanque agua con un contaminante C a una razón de 30 L/min. La concentración de C en el agua que entra al tanque es de 0.15 g/L. La mezcla, bien agitada, sale del tanque a la misma razón de 30 L/min. Para poder usar el agua de ese tanque, ésta no debe tener una concentración de C mayor a 0.05 g/L. ¿Cuánto tiempo puede estar fluyendo el agua contaminada al tanque (y saliendo de él) antes de que el agua del tanque ya no pueda ser usada?

8. En un tanque se tienen inicialmente 3000 L de agua que llevan disueltos 25 kg de sal. A $t = 0$ entra al tanque un flujo de agua pura, a razón de 100 L/min. La mezcla, bien agitada, sale del tanque a una razón de 130 L/min, de los cuales 30 L/min son reciclados al tanque. ¿Al cabo de cuánto tiempo la cantidad de sal en el tanque es de 1 kg?

9. Se ha observado que una cierta población duplicó su número de habitantes en 6 años. ¿Al cabo de cuánto tiempo quintuplicará su número de habitantes?

10. En el año de 1990 se realizaron censos de población en toda la República Mexicana. En el año de 1992 se descubrió que una población del estado de Veracruz no había sido censada. Ese año se hizo un censo que reportó 40,000 habitantes. Un año después se volvió a censar y se reportaron 47,500 habitantes. ¿Qué población habría reportado el censo de esta población en 1990?

EXAMEN TIPO (B)

1. Hallar la solución general de la ecuación diferencial $y' + 3y = 2e^x$ y verificar que la función obtenida satisface efectivamente la ecuación diferencial.

2. Hallar la solución particular de la ecuación $y' = -\dfrac{2y}{3x}$ que satisfaga la condición inicial $y(1) = 1$. Interprete geométricamente el resultado obtenido.

3. Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial $v_0 = 30$ m/s. Determinar la altura máxima alcanzada por el cuerpo, y su tiempo total de vuelo. (Se supone nula la resistencia del aire.)

4. Una ventana del primer piso de un edificio se encuentra a 7 metros del piso. Cuando se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba (por fuera del edificio, desde el piso) con una velocidad inicial de $v_0 = 30$ m/s, el cuerpo pasa por la ventana dos veces: una cuando va subiendo y otra cuando va bajando. Determine los dos instantes en los que una persona que está mirando por la ventana ve el vuelo del cuerpo. (Se supone nula la resistencia del aire.)

5. Un cuerpo cuya masa es de $m = 0.25$ kg se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de $v_0 = 35$ m/s. Suponga que la fuerza de resistencia que ofrece el aire al movimiento del cuerpo es de $0.2v$ Newtons, en donde v es la velocidad instantánea del cuerpo. Determine la altura máxima alcanzada. (Sugerencia: tome como punto de referencia $x = 0$ el piso, y considere las magnitudes involucradas en el movimiento del cuerpo como positivas en la dirección del movimiento —hacia arriba—. Observe entonces que tanto el peso del cuerpo como la resistencia del medio son fuerzas negativas.) Compare con el resultado del ejercicio 3.

6. Repita el ejercicio anterior suponiendo que la resistencia que ofrece el aire al movimiento del cuerpo es de $0.6v$ Newtons.

7. En un tanque se encuentran inicialmente 1500 litros de agua pura. A $t = 0$ comienza a fluir al tanque agua con un contaminante C a una razón de 80 L/min. La concentración de C en el agua que entra al tanque es de 0.25 g/L. La mezcla, bien agitada, sale del tanque a la misma razón de 80 L/min. Para poder usar el agua de ese tanque, ésta no debe tener una concentración de C mayor a 0.05 g/L. ¿Cuánto tiempo puede estar fluyendo el agua contaminada al tanque (y saliendo de él) antes de que el agua del tanque ya no pueda ser usada?

8. En un tanque se tienen inicialmente 2000 L de agua que llevan disueltos 25 kg de sal. A $t = 0$ entra al tanque un flujo de agua pura, a razón de 150 L/min. La mezcla, bien agitada, sale del tanque a una razón de 180 L/min, de los cuales 30 L/min son reciclados al tanque. ¿Al cabo de cuánto tiempo la cantidad de sal en el tanque es de 10 kg?

9. Se ha observado que una cierta población duplicó su número de habitantes en 8 años. ¿Al cabo de cuánto tiempo quintuplicará su número de habitantes?

10. En el año de 1990 se realizaron censos de población en toda la República Mexicana. En el año de 1992 se descubrió que una población del estado de Veracruz no había sido censada. Ese año se hizo un censo que reportó 60,000 habitantes. Un año después se volvió a censar y se reportaron 81,000 habitantes. ¿Qué población habría reportado el censo de esta población en 1990?

NOTA HISTÓRICA: WEIERSTRASS (Y SOFÍA)

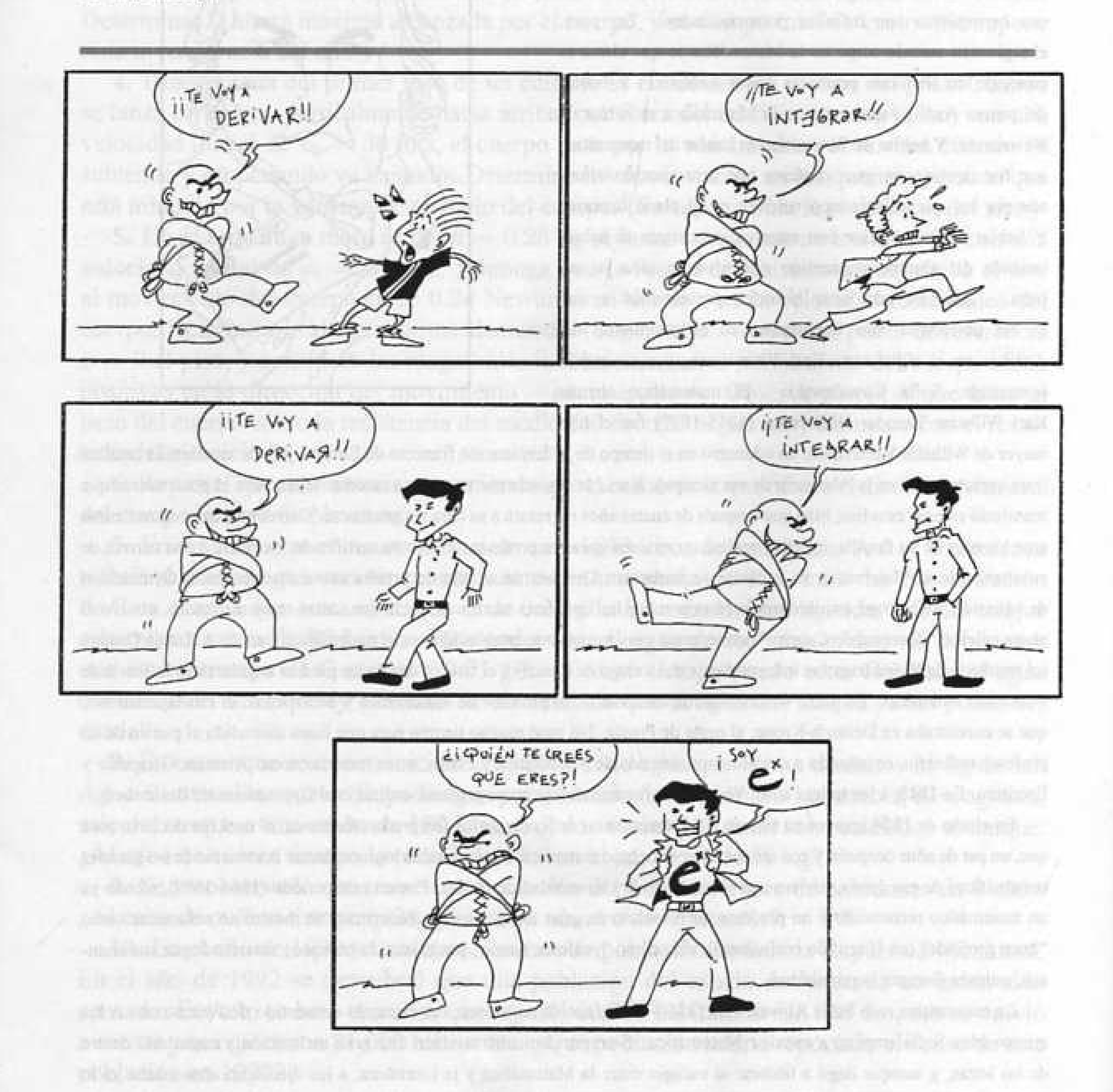


El siglo XIX fue, en general, un siglo de reflexión sobre la validez de los procedimientos y los fundamentos del Cálculo, que había mostrado ya ser, en las brillantes mentes de los matemáticos del siglo XVIII (de Euler, en particular), una herramienta con infinitas potencialidades. Es, pues, el siglo XIX cuando surge en la Matemática lo que ahora es conocido en términos generales como Análisis. Y hablar del primer Análisis que hubo en la Matemática es hablar de Weierstrass. Y hablar de Weierstrass es hablar del matemático que fue también un gran profesor que tuvo muchos alumnos por los que se preocupó también en el plano humano. Y hablar de un profesor con estas características es hablar también del alumno consentido que tuvo en toda su carrera. Así, en esta nota histórica presentamos a uno de los personajes más importantes en el nacimiento del Análisis en el siglo XIX, Karl Weierstrass, y a su pupilo consentido, Sofía Kowalewski. El matemático alemán Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (1815-1897) fue el hijo mayor de Wilhelm Weierstrass, un aduanero en el tiempo de la dominación francesa de Europa, jefe de una familia católica (rara característica en la Alemania de ese tiempo). Karl fue enviado por su padre a estudiar leyes, pero el poco interés que manifestó en esos estudios, hizo que después de cuatro años regresara a su casa sin graduarse. Con el propósito de redimirse ante los ojos de su familia, en 1841 realizó un examen para ser profesor, obtuvo su certificado y comenzó una carrera de enseñanza de la Matemática en escuelas secundarias. Después de su año de prueba como maestro en el Gymnasium de Münster, Weierstrass escribió una memoria sobre las funciones analíticas, en la que, entre otros resultados, obtuvo el ahora célebre "Teorema de Cauchy", un teorema muy importante establecido por el matemático francés A. Louis Cauchy (el resultado de Weierstrass fue independiente del trabajo de Cauchy), el cual es una de las piedras angulares en la Teoría de Funciones Analíticas. En 1852 Weierstrass fue asistente de su profesor de Matemática y de Física en el Pro-Gymnasium, que se encontraba en Deutsch-Krone, al oeste de Prusia. No pasó mucho tiempo para que fuera ascendido al puesto de un profesor ordinario, enseñando a sus alumnos, además de Matemática y Física, otras materias como Alemán, Geografía y Escritura. En 1848, a los treinta años, Weierstrass fue transferido como profesor ordinario al Gymnasium de Braunsberg.

En el año de 1854 aparece su trabajo *Contribuciones a la Teoría de las Integrales Abelianas*, el cual fue decisivo para que, un par de años después, y con quince años de trabajo matemático que no había logrado llamar la atención de los grandes matemáticos de esa época, tuviera una posición en la Universidad de Berlín. Fue en este periodo (1864-1897), siendo ya un matemático reconocido y un profesor universitario de gran status, cuando Weierstrass se mostró no solamente como "buen profesor" (en el sentido profesional), sino como "profesor bueno" (en el sentido humano), interesado por sus alumnos, quienes siempre lo procuraban.

La matemática rusa Sofía Kowalewski (1850-1891), nacida en Moscú, fue el pupilo consentido de Weierstrass. A los quince años Sofía empezó a estudiar Matemática. Siempre demostró también una gran inclinación y capacidad dentro de las letras, y, aunque llegó a titubear al escoger entre la Matemática y la Literatura, a los dieciocho años estaba ya lo suficientemente enamorada de la ciencia Matemática como para ya no dudar en dedicar su trabajo profesional a ella. Fue hasta el final de su vida cuando su amor por las letras renació y escribió una novela sobre su infancia en Rusia. Como pertenecía a una próspera familia aristocrática, no tuvo problema alguno para estudiar en el extranjero y establecerse en

la prestigiada Universidad de Heidelberg. En el otoño de 1869, Sofía comenzó a estudiar la Teoría de Funciones Elípticas con su maestro Leo Königsberger, uno de los primeros alumnos de Weierstrass. Al saber sobre Weierstrass, Sofía decidió ir a estudiar con él. Fue así como Weierstrass conoció a la que fuera su alumna consentida: cada domingo por las tardes Weierstrass le daba clases particulares. Las lecciones comenzaron en el otoño de 1874, empezando también en ese tiempo una correspondencia fluida entre los dos. Una de las grandes satisfacciones de Weierstrass fue que en 1888, Sofía recibió el Premio Bordin de la Academia Francesa de las Ciencias, por su trabajo sobre la rotación de un cuerpo sólido alrededor de un punto fijo.



CAPÍTULO 16
APLICACIONES II: ÁREAS Y VOLÚMENES

"Al iniciar sus estudios de Geometría con Euclides, uno de los alumnos, en cuanto aprendió la primera de sus proposiciones, le preguntó: ¿Qué sacaré con saber esto? Entonces Euclides llamó a su esclavo y le dijo: Dadle tres monedas, pues, según dice, todo lo que aprende le debe rendir un beneficio."

Estobeo

En este capítulo explotaremos el hecho, ya estudiado en los capítulos 12 y 13, de que la integral definida de una función continua y no negativa en un intervalo $[a, b]$ es el área bajo la gráfica de la función en tal intervalo, con el objetivo de calcular áreas de algunas regiones del plano, limitadas por gráficas de funciones. Estudiaremos también cómo calcular volúmenes de ciertos cuerpos en el espacio, llamados cuerpos de revolución, que se obtienen al girar una curva (la gráfica de una función) alrededor de un eje dado.

16.1 ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

El hecho fundamental sobre el cual basaremos todas las ideas que plantearemos en esta sección, es, como se ha venido manejando desde el capítulo 12, que si $f(x)$ es una función continua y no negativa en el intervalo $[a, b]$, entonces el área comprendida entre el eje x, las rectas $x = a$ y $x = b$ y la gráfica de la función, es igual a la integral $\int_a^b f(x)dx$.

Más generalmente, consideremos una figura comprendida entre las gráficas de las dos funciones $f(x)$ y $g(x)$. Supongamos que en el intervalo $[a, b]$ la gráfica de la función $f(x)$ siempre está por encima de (o coincide con) la gráfica de la función $g(x)$. Es decir, se tiene $f(x) \geq g(x)$ para toda $x \in [a, b]$. Entonces el área A de la figura limitada por las gráficas de estas dos funciones, y (posiblemente) las rectas $x = a$ y $x = b$ viene dada por:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

Esta fórmula se explica por sí misma si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son no negativas, pues en tal caso se trata de calcular simplemente una diferencia del área bajo la gráfica de $f(x)$ menos el área bajo la gráfica de $g(x)$, teniéndose:

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx = A.$$

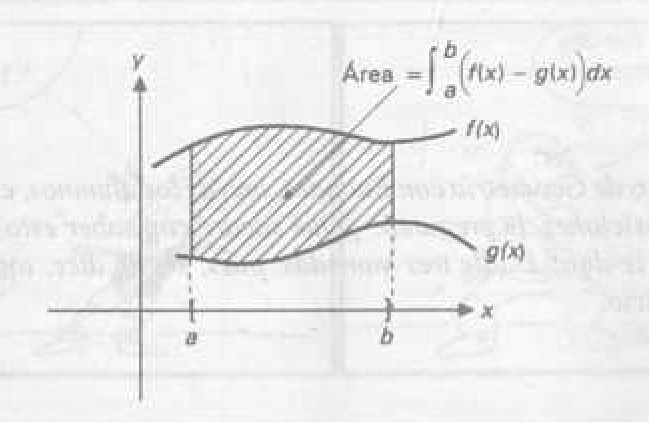


Figura 16.1.1. El área entre las gráficas de las funciones continuas y no negativas $f(x)$ y $g(x)$ (con $f(x) \geq g(x)$ para toda $x \in [a, b]$) es igual a $\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$.

Sin embargo, la misma fórmula sigue siendo cierta si las funciones $f(x)$ y/o $g(x)$ fallan en la propiedad de ser no negativas en el intervalo $[a, b]$. Veamos que esto es efectivamente cierto. Independientemente del signo de una función continua $\varphi(x)$ en un cierto intervalo I, es claro que podemos "subir la gráfica" de la función (o bien, bajar el eje x) lo suficiente como para que la función quede positiva. Es decir, siempre podemos tomar una constante positiva K (quizás muy grande, si la gráfica de la función tiene partes "muy negativas") tal que $\varphi(x) + K > 0$ para toda x de I. Aplicando esta idea con las funciones $f(x)$ y $g(x)$, independientemente del signo de éstas en el intervalo $[a, b]$, podemos tomar una constante $K > 0$ tal que $f(x) + K > 0$ y $g(x) + K > 0$ para toda $x \in [a, b]$. Entonces el área comprendida entre la gráfica de $f(x) + K$ y $g(x) + K$ en $[a, b]$ es, por la discusión previa:

$$\int_a^b (f(x) + K)\, dx - \int_a^b (g(x) + K)\, dx = \int_a^b ((f(x) + K) - (g(x) + K))\, dx$$

$$= \int_a^b (f(x) + K - g(x) - K)\, dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx = A.$$

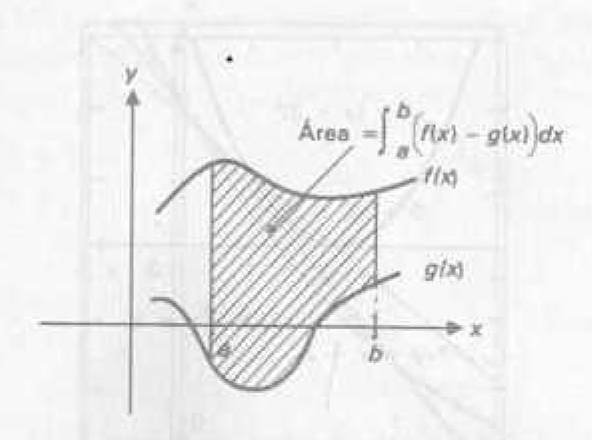


Figura 16.1.2. El área entre las gráficas de las funciones continuas $f(x)$ y $g(x)$ (con $f(x) \geq g(x)$ para toda $x \in [a,b]$) es igual a $\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$.

EJEMPLO 16.1.1. Calcular el área de la figura limitada por la parábola $y=(x+2)^2$ y la recta $y=x+2$.

SOLUCIÓN. Debemos ver primeramente en dónde se cortan estas dos curvas. Para esto, resolvemos simultáneamente las ecuaciones que las definen:

$$\left.\begin{array}{c} y=(x+2)^2 \\ y=x+2 \end{array}\right\} \Rightarrow (x+2)^2=(x+2) \Rightarrow (x+2)^2-(x+2)=0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x+2-1)=0 \Rightarrow (x+2)(x+1)=0 \Rightarrow x_1=-1,\ x_2=-2.$$

Así, la figura limitada entre la parábola y la recta dadas, se encuentra entre $x=-2$ y $x=-1$ como se muestra en la figura 16.1.3. Como la recta $y=x+2$ se encuentra por encima de la parábola $y=(x+2)^2$ se tiene que el área A requerida es:

$$A=\int_{-2}^{-1}\left((x+2)-(x+2)^2\right)dx=\int_{-2}^{-1}\left(x+2-(x^2+4x+4)\right)dx$$

$$=\int_{-2}^{-1}\left(x+2-x^2-4x-4\right)dx=\int_{-2}^{-1}(-x^2-3x-2)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-2x\right]_{-2}^{-1}$$

$$=\left[-\frac{1}{3}(-1)^3-\frac{3}{2}(-1)^2-2(-1)\right]-\left[-\frac{1}{3}(-2)^3-\frac{3}{2}(-2)^2-2(-2)\right]$$

$$=\left[\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2\right]-\left[\frac{8}{3}-6+4\right]=\frac{1}{6}.$$

Así, el área requerida es de $\frac{1}{6}$ unidades cuadradas.

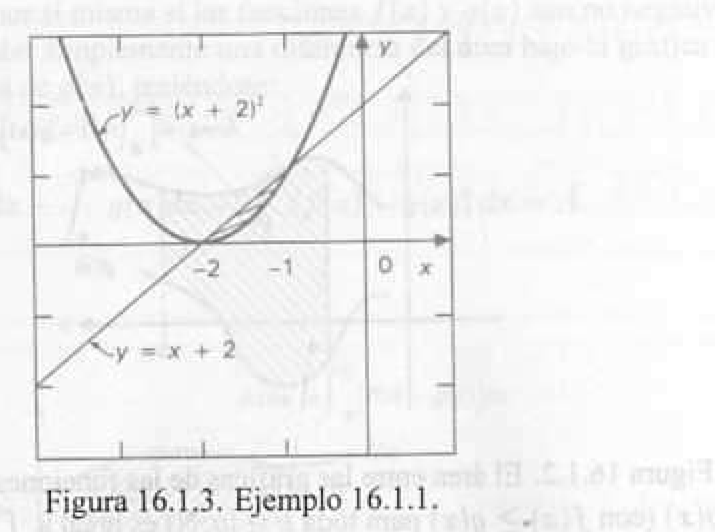


Figura 16.1.3. Ejemplo 16.1.1.

EJEMPLO 16.1.2. Calcular el área de la figura limitada por la parábola $y = x^2 - 4x + 6$ y la recta $y = -3x + 6$.

SOLUCIÓN. Determinamos los puntos donde estas curvas se intersecan:

$$\left.\begin{array}{r} y = x^2 - 4x + 6 \\ y = -3x + 6 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - 4x + 6 = -3x + 6 \Rightarrow x^2 - x = 0$$

$$\Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1.$$

Así, la figura limitada entre la parábola y la recta dadas, se encuentra entre $x = 0$ y $x = 1$ como se muestra en la figura 16.1.4. Como la recta $y = -3x + 6$ se encuentra por encima de la parábola $y = x^2 - 4x + 6$ se tiene que el área A requerida es:

$$A = \int_0^1 (-3x + 6 - (x^2 - 4x + 6))\,dx = \int_0^1 (-3x + 6 - (x^2 + 4x - 6))\,dx$$

$$= \int_0^1 (-x^2 + x)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x\right]_0^1 = \left[-\frac{1}{3}(1)^3 + 2(1)\right] - \left[-\frac{1}{3}(0)^3 + 2(0)\right]$$

$$= \left[-\frac{1}{3} + 2\right] - 0 = \frac{5}{3}.$$

Así, el área requerida es de $\frac{5}{3}$ unidades cuadradas.

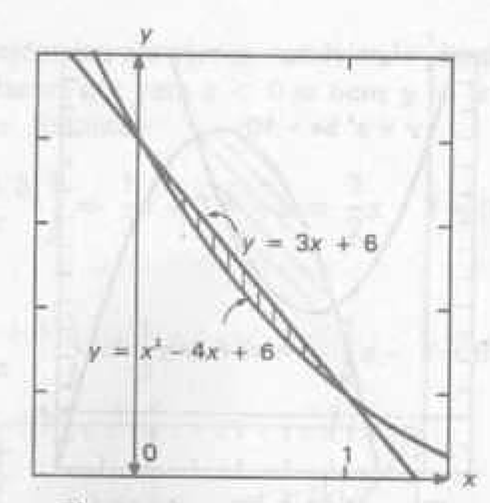


Figura 16.1.4. Ejemplo 16.1.2.

★

EJEMPLO 16.1.3. Calcular el área de la figura limitada por las parábolas $y = x^2 - 5x + 10$ y $y = -x^2 + 9x - 10$.

SOLUCIÓN. Determinamos los puntos donde las parábolas se intersecan:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 5x + 10 \\ y = -x^2 + 9x - 10 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - 5x + 10 = -x^2 + 9x - 10 \Rightarrow 2x^2 - 14x + 20 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-5) = 0 \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 5.$$

Así, la figura limitada entre las dos parábolas dadas, se encuentra entre $x = 2$ y $x = 5$ como se muestra en la figura 16.1.5. Como la parábola $y = -x^2 + 9x - 10$ se encuentra por encima de la parábola $y = x^2 - 5x + 10$ (en el intervalo $[2, 5]$), se tiene que el área A requerida es:

$$A = \int_2^5 \left(-x^2 + 9x - 10 - (x^2 - 5x + 10)\right) dx$$

$$= \int_2^5 \left(-x^2 + 9x - 10 - x^2 + 5x - 10\right) dx$$

$$= \int_2^5 (-2x^2 + 14x - 20) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 7x^2 - 20x\right]_2^5$$

$$= \left[-\frac{2}{3}(5)^3 + 7(5)^2 - 20(5)\right] - \left[-\frac{2}{3}(2)^3 + 7(2)^2 - 20(2)\right] = 9.$$

Así, el área requerida es de 9 unidades cuadradas.

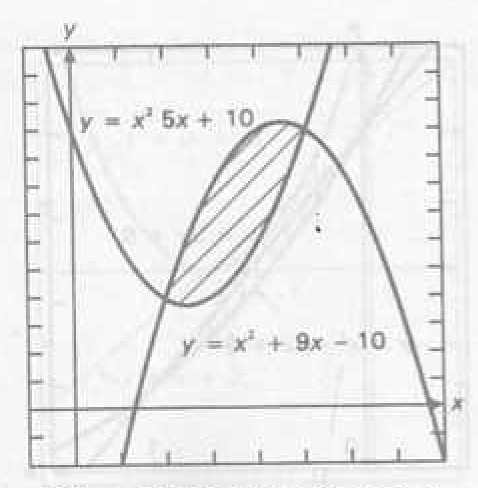


Figura 16.1.5. Ejemplo 16.1.3.

★

Es común encontrarse con problemas en los que para calcular el área de una región R, ésta tiene que partirse en dos subregiones R_1 y R_2, y usar la propiedad correspondiente de las áreas (de la integral definida, en general) de que la suma de las áreas de las dos partes en que se divide una región es igual al área total de ésta. Esta situación se presenta cuando entre las rectas $x = a$ y $x = b$ que limitan la región R, las partes de abajo y/o de arriba de R no corresponden a la gráfica de **una** sola función, sino a dos o más partes de gráficas de funciones. Por ejemplo, en el caso mostrado en la figura 16.1.6, "el techo" de la región R está dividido en dos partes: de $x = a$ a $x = c$ es la gráfica de la función $f_1(x)$, y de $x = c$ a $x = b$ es la gráfica de la función $f_2(x)$, mientras que "el piso" de R es la gráfica de la función $g(x)$. Así, para calcular el área de R, consideramos las subregiones:

1. R_1, de $x = a$ a $x = c$, cuya área es $\int_a^c (f_1(x) - g(x))\,dx$.
2. R_2, de $x = c$ a $x = b$, cuya área es $\int_c^b (f_2(x) - g(x))\,dx$.

La suma de las áreas de R_1 y de R_2 es el área de R requerida.

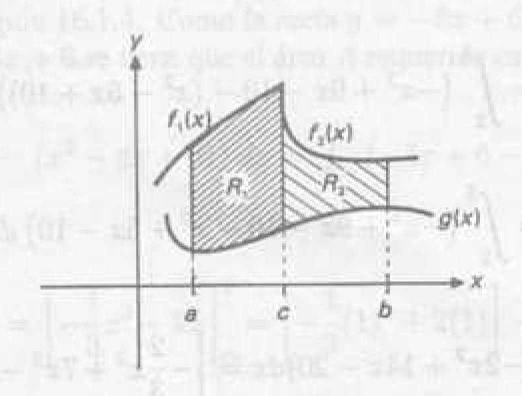


Figura 16.1.6. Una región R dividida en dos subregiones R_1 y R_2.

EJEMPLO 16.1.4. Calcular el área del triángulo que forman la recta $y = \frac{1}{2}x + 3$, y la gráfica de la función $y = |x|$.

SOLUCIÓN. Las intersecciones entre las gráficas de $y = \frac{1}{2}x + 3$ y $y = |x|$ las en-

contramos, como en los ejemplos anteriores, resolviendo simultáneamente las ecuaciones correspondientes. Recordamos que para $x < 0$ se tiene $y = |x| = -x$, mientras que para $x \geq 0$ se tiene $y = |x| = x$. Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} y = \frac{1}{2}x + 3 \\ y = -x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}x + 3 = -x \Rightarrow \frac{3}{2}x + 3 = 0 \Rightarrow x = -2$$

y

$$\left.\begin{array}{r} y = \frac{1}{2}x + 3 \\ y = x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}x + 3 = x \Rightarrow \frac{1}{2}x - 3 = 0 \Rightarrow x = 6.$$

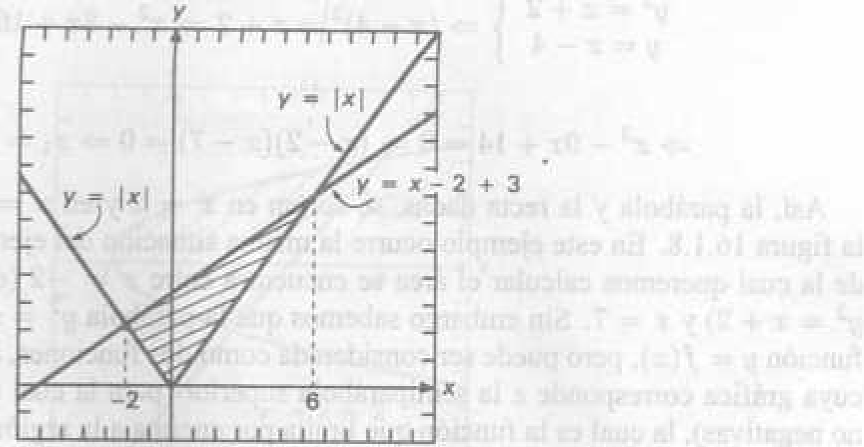


Figura 16.1.7. Ejemplo 16.1.4.

Así, entre $x = -2$ y $x = 6$ se encuentra la región de la cual se quiere calcular el área. La parte de encima de esta región se encuentra limitada por la recta $y = \frac{1}{2}x + 3$. Sin embargo, la parte de abajo de la región no está limitada por una sola función: de $x = -2$ a $x = 0$ se tiene a $y = -x$, y de $x = 0$ a $x = 6$ se tiene a $y = x$. Consideramos entonces las dos subregiones correspondientes:

1. R_1, entre $x = -2$ y $x = 0$, limitada por debajo por $y = -x$ y por encima por $y = \frac{1}{2}x + 3$. El área de esta subregión es:

$$\int_{-2}^{0}\left(\frac{1}{2}x + 3 - (-x)\right)dx = \int_{-2}^{0}\left(\frac{3}{2}x + 3\right)dx = \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{0} + 3\,[x]_{-2}^{0}$$

$$= \frac{3}{4}\left[(0)^2 - (-2)^2\right] + 3\,(0 - (-2)) = -3 + 6 = 3.$$

2. R_2, entre $x = 0$ y $x = 6$, limitada por debajo por $y = x$ y por encima por $y = \frac{1}{2}x + 3$. El área de esta subregión es:

$$\int_{0}^{6}\left(\frac{1}{2}x + 3 - x\right)dx = \int_{0}^{6}\left(-\frac{1}{2}x + 3\right)dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{6} + 3\,[x]_{0}^{6}$$

$$= -\frac{1}{4}\left[(6)^2 - (0)^2\right] + 3\,(6 - 0) = -9 + 18 = 9.$$

Entonces, el área del triángulo R es:

$$\text{Área de } R = 3 + 9 = 12.$$

★

EJEMPLO 16.1.5. Calcular el área de la figura limitada por la parábola $y^2 = x + 2$ y la recta $y = x - 4$.

SOLUCIÓN. Determinamos los puntos donde estas curvas se intersecan:

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = x + 2 \\ y = x - 4 \end{array}\right\} \Rightarrow (x - 4)^2 = x + 2 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = x + 2$$

$$\Rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 7) = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 7.$$

Así, la parábola y la recta dadas, se cortan en $x = 2$ y en $x = 7$ como se muestra en la figura 16.1.8. En este ejemplo ocurre la misma situación del ejemplo anterior. La región de la cual queremos calcular el área se encuentra entre $x = -2$ (el vértice de la parábola $y^2 = x + 2$) y $x = 7$. Sin embargo sabemos que la parábola $y^2 = x + 2$ no representa una función $y = f(x)$, pero puede ser considerada como dos funciones, a saber: 1) $y = \sqrt{x + 2}$, cuya gráfica corresponde a la semiparábola superior (para la cual todas las ordenadas son no negativas), la cual es la función que limita por encima a la región R de la cual queremos calcular el área, y, 2) $y = -\sqrt{x + 2}$, cuya gráfica corresponde a la semiparábola inferior (para la cual todas las ordenadas son no positivas), y que limita a la región R de $x = -2$ a $x = 2$ (este último es la abscisa del punto en donde ocurre la primera intersección de la parábola con la recta).

Así pues, dividimos la región R en dos subregiones:

1. R_1, de $x = -2$ a $x = 2$, limitada por debajo por la semiparábola $y = -\sqrt{x + 2}$ y por encima por la semiparábola $y = \sqrt{x + 2}$, cuya área es:

$$A_1 = \int_{-2}^{2} \left[\sqrt{x+2} - \left(-\sqrt{x+2}\right)\right] dx = \int_{-2}^{2} 2\sqrt{x+2}dx$$

$$= 2\int_{-2}^{2} (x+2)^{\frac{1}{2}}\, dx = 2\left[\frac{(x+2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{-2}^{2} = \frac{4}{3}\left[(2+2)^{\frac{3}{2}} - (-2+2)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{4}{3}(4)^{\frac{3}{2}} = \frac{32}{3}.$$

2. R_2, de $x = 2$ a $x = 7$, limitada por debajo por la recta $y = x - 4$ y por encima por la semiparábola $y = \sqrt{x + 2}$, cuya área es:

$$A_2 = \int_{2}^{7} \left(\sqrt{x+2} - (x-4)\right) dx = \int_{2}^{7} \left(\sqrt{x+2} - x + 4\right) dx$$

$$= \int_{2}^{7} (x+2)^{\frac{1}{2}}\, dx - \int_{2}^{7} x dx + \int_{2}^{7} 4 dx = \left[\frac{(x+2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{2}^{7} - \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{2}^{7} + [4x]_2^7$$

$$= \frac{2}{3}\left[(9)^{\frac{3}{2}} - (4)^{\frac{3}{2}}\right] - \frac{1}{2}[49 - 4] + 4[7 - 2] = \frac{61}{6}.$$

Entonces, el área de la región R procurada es:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{32}{3} + \frac{61}{6} = \frac{125}{6}.$$

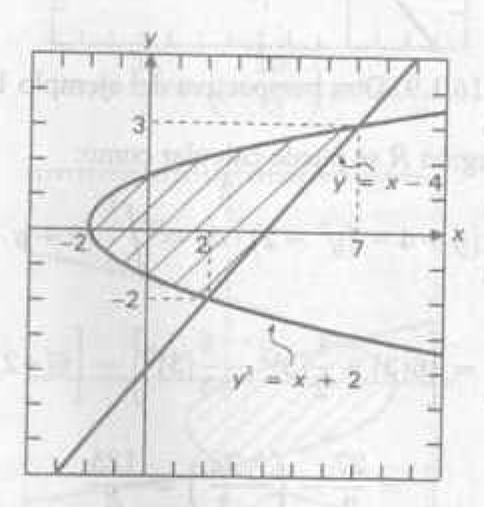


Figura 16.1.8. Ejemplo 16.1.5.

★

El ejemplo anterior permite tener un procedimiento alternativo para su solución. La idea es sacarle provecho al "problema" que enfrentamos de que la parábola $y^2 = x+2$ no representa una función $y = f(x)$. Observe que si despejamos la x de la ecuación de esta parábola nos queda $x = y^2 - 2$, la cual puede ser vista como una función $x = f(y)$. También, la recta $y = x-4$ (que es una función $y = f(x)$), la podemos ver como $x = y+4$, es decir, como una función del tipo $x = g(y)$. Así, la región R se puede contemplar, bajo esta perspectiva, como una región limitada por las rectas $y = -2$ y $y = 3$ (ordenadas de los puntos de intersección de la parábola y la recta), por "debajo" por la gráfica de la función $x = f(y) = y^2 - 2$, y por "encima" por la gráfica de la función $x = y + 4$. Los términos entrecomillados "debajo" y "encima", se refieren al hecho de que estamos viendo la región R no en su perspectiva natural (en las que las gráficas son del tipo y como función de x), sino que ahora lo estamos viendo, por decirlo de alguna manera, **de izquierda a derecha, intercambiando los papeles de x por y.** La ventaja de hacer esto es clara: ¡no tenemos entonces que dividir la región para calcular su área!

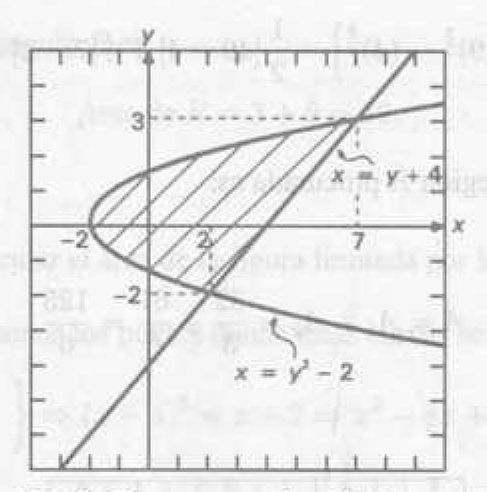


Figura 16.1.9. Otra perspectiva del ejemplo 16.1.5.

Entonces el área de la región R se puede calcular como:

$$A = \int_{-2}^{3} (y + 4 - (y^2 - 2))\, dy = \int_{-2}^{3} (6 + y - y^2)\, dy$$

$$= \left[6y + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3\right]_{-2}^{3} = \left[6(3) + \frac{1}{2}(3)^2 - \frac{1}{3}(3)^3\right] - \left[6(-2) + \frac{1}{2}(-2)^2 - \frac{1}{3}(-2)^3\right]$$

$$= \frac{27}{2} - \left(-\frac{22}{3}\right) = \frac{125}{6}$$

como habíamos obtenido en el ejemplo 16.1.5.

EJEMPLO 16.1.6. Calcular el área de la figura limitada por las parábolas $y^2 = 16 - x$ y $(y + 2)^2 = x + 4$.

SOLUCIÓN. Del curso de Geometría Analítica sabemos que la parábola $y^2 = 16 - x$ abre hacia la izquierda (el coeficiente de la x es negativo) y tiene su vértice en el punto $(16, 0)$, mientras que la parábola $(y + 2)^2 = x + 4$ abre hacia la derecha (el coeficiente de la x es positivo) y tiene su vértice en el punto $(-4, -2)$. Observe que ninguna de estas dos parábolas define funciones del tipo $y = f(x)$. Convendrá entonces usar las ideas de la discusión previa a este ejemplo para resolver más eficientemente el problema. Es decir, procuraremos ver a ambas funciones como funciones del tipo $x = g(y)$. Al determinar los puntos donde estas curvas se intersecan, estaremos entonces interesados en los valores de y (y no en los de x) que sean comunes a ambas parábolas (¿por qué?):

$$\left.\begin{array}{c} y^2 = 16 - x \\ (y+2)^2 = x + 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x = 16 - y^2 \\ x = y^2 + 4y \end{array}\right\} \Rightarrow 16 - y^2 = y^2 + 4y$$

$$\Rightarrow 2y^2 + 4y - 16 = 0 \Rightarrow 2(y + 4)(y - 2) = 0 \Rightarrow y_1 = -4,\ y_2 = 2.$$

Así, las parábolas dadas se cortan en $y = -4$ y en $y = 2$. La parábola que está por

"debajo" es $x = y^2 + 4y$ (recuerde que estamos viendo a las parábolas como si estuviéramos acostados, con el eje vertical —el de los valores de la función— siendo el eje x), y la parábola que está por "encima" es $x = 16 - y^2$. Entonces el área A de la región entre estas parábolas es:

$$A = \int_{-4}^{2} (16 - y^2 - (y^2 + 4y))\, dy = \int_{-4}^{2} (16 - 4y - 2y^2)\, dy$$

$$= \left[16y - 2y^2 - \frac{2}{3}y^3\right]_{-4}^{2} = \left[16(2) - 2(2)^2 - \frac{2}{3}(2)^3\right] - \left[16(-4) - 2(-4)^2 - \frac{2}{3}(-4)^3\right]$$

$$= \frac{56}{3} - \left(-\frac{160}{3}\right) = 72.$$

Figura 16.1.10. Ejemplo 16.1.6.

★

EJEMPLO 16.1.7. Calcular el área de la región limitada por las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ entre $x = \frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{5\pi}{4}$.

SOLUCIÓN. En el intervalo considerado se tiene $\operatorname{sen} x \geq \cos x$, de modo que el área A requerida es:

$$A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\operatorname{sen} x - \cos x)\, dx = [-\cos x - \operatorname{sen} x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}$$

$$= \left[-\cos\frac{5\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right] - \left[-\cos\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right]$$

$$= \left[-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] - \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \sqrt{2} - \left(-\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}.$$

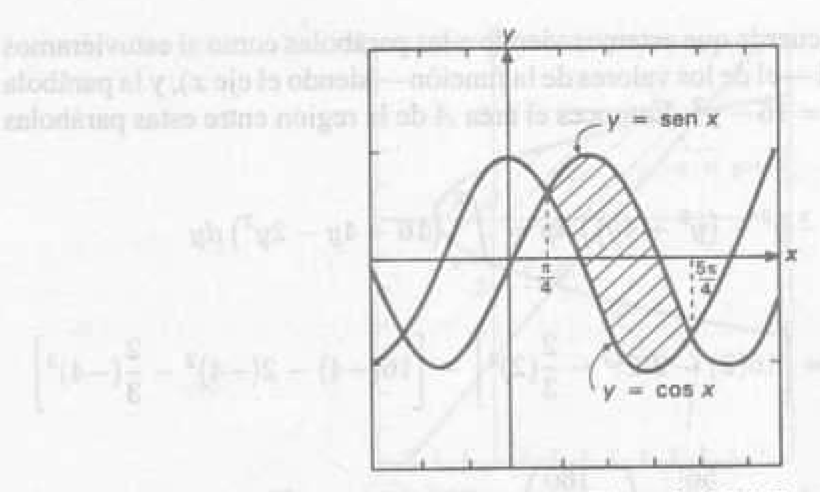


Figura 16.1.11. Ejemplo 16.1.7.

Veamos algunos ejemplos adicionales.

EJEMPLO 16.1.8. Calcule el área de la región comprendida entre la parábola $y = (x-3)^2$ y la recta $y = 2(x+1)$.

SOLUCIÓN. Determinamos primeramente las abscisas de los puntos donde estas curvas se intersecan:

$$\left.\begin{array}{l} y = (x-3)^2 \\ y = 2(x+1) \end{array}\right\} \Rightarrow (x-3)^2 = 2(x+1) \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 2x + 2$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x + 7 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-7) = 0 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 7.$$

Así, la figura limitada entre la parábola y la recta dadas, se encuentra entre $x = 1$ y $x = 7$ como se muestra en la figura 16.1.12. Como la recta $y = 2(x+1)$ se encuentra por encima de la parábola $y = (x-3)^2$ (en el intervalo $[1, 7]$) se tiene que el área A requerida es:

$$A = \int_1^7 \left(2(x+1) - (x-3)^2\right) dx = \int_1^7 \left(2x + 2 - (x^2 - 6x + 9)\right) dx$$

$$= \int_1^7 (2x + 2 - x^2 + 6x - 9)\, dx = \int_1^7 (-x^2 + 8x - 7) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 7x\right]_1^7$$

$$= \left[-\frac{1}{3}(7)^3 + 4(7)^2 - 7(7)\right] - \left[-\frac{1}{3}(1)^3 + 4(1)^2 - 7(1)\right] = \left[\frac{98}{3}\right] - \left[-\frac{10}{3}\right] = 36.$$

Así, el área requerida es de 36 unidades cuadradas.

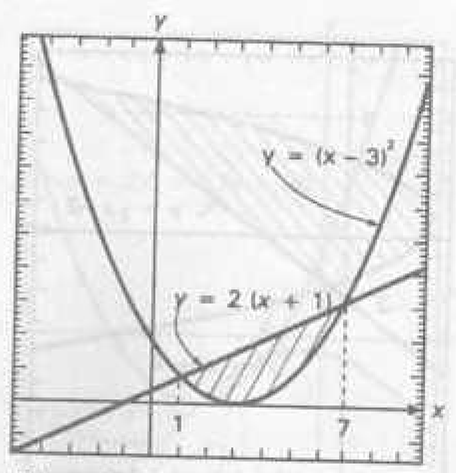


Figura 16.1.12. Ejemplo 16.1.8.

★

EJEMPLO 16.1.9. Calcular el área de la figura limitada por la parábola $y^2 = x + 4$ y la recta $y = \frac{1}{2}x - 2$.

SOLUCIÓN. Por la experiencia adquirida en la sección 1 (por ejemplo, al ver que la parábola dada no es una función del tipo $y = f(x)$), procuramos las ordenadas de los puntos donde estas curvas se intersecan (para calcular el área viendo a la figura como si estuviéramos acostados, viendo hacia la parte positiva del eje x):

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = x + 4 \\ y = \frac{1}{2}x - 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = y^2 - 4 \\ x = 2(y+2) \end{array}\right\} \Rightarrow y^2 - 4 = 2(y+2)$$

$$\Rightarrow y^2 - 2y - 8 = 0 \Rightarrow (y+2)(y-4) = 0 \Rightarrow y_1 = -2,\ y_2 = 4.$$

Así, la figura limitada entre la parábola y la recta dadas, se encuentra entre $y = -2$ y $y = 4$ como se muestra en la figura 16.1.13. Como la recta $y = \frac{1}{2}x - 2$ se encuentra por encima de la parábola $y^2 = x + 4$ (con la perspectiva de izquierda a derecha), se tiene que el área A requerida es:

$$A = \int_{-2}^{4} \left(2(y+2) - (y^2 - 4)\right) dy = \int_{-2}^{4} \left(2y + 4 - y^2 + 4\right) dy = \int_{-2}^{4} (-y^2 + 2y + 8) dy$$

$$= \left[-\frac{1}{3}y^3 + y^2 + 8y\right]_{-2}^{4} = \left[-\frac{1}{3}(4)^3 + (4)^2 + 8(4)\right] - \left[-\frac{1}{3}(-2)^3 + (-2)^2 + 8(-2)\right]$$

$$= \left[\frac{80}{3}\right] - \left[-\frac{28}{3}\right] = 36.$$

Así, el área requerida es de 36 unidades cuadradas (misma área de la figura del ejercicio anterior).

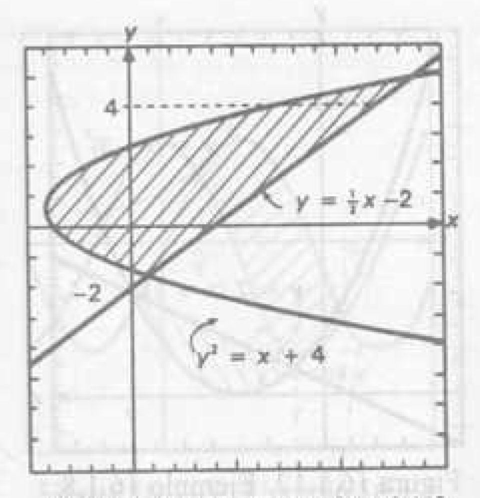


Figura 16.1.13. Ejemplo 16.1.9.

★

EJEMPLO 16.1.10. Calcular el área de la figura limitada por las parábolas $y = 2x^2 + 17x + 20$ y $y = -x^2 - x - 4$.

SOLUCIÓN. Determinamos los puntos donde las parábolas se intersecan:

$$\left.\begin{array}{r} y = 2x^2 + 17x + 20 \\ y = -x^2 - x - 4 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x^2 + 17x + 20 = -x^2 - x - 4 \Rightarrow 3x^2 + 18x + 24 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 6x + 8 = 0 \Rightarrow (x+4)(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = -4,\ x_2 = -2.$$

Así, la figura limitada entre las dos parábolas dadas, se encuentra entre $x = -4$ y $x = -2$ como se muestra en la figura 16.1.14. Como la parábola $y = -x^2 - x - 4$ se encuentra por encima de la parábola $y = 2x^2 + 17x + 20$ (en el intervalo $[-2, -4]$), el área requerida la calculamos como:

$$A = \int_{-4}^{-2} \left(-x^2 - x - 4 - (2x^2 + 17x + 20)\right) dy$$

$$= \int_{-4}^{-2} (-3x^2 - 18x - 24)\, dy = \left[-x^3 - 9x^2 - 24x\right]_{-4}^{-2}$$

$$= \left[-(-2)^3 - 9(-2)^2 - 24(-2)\right] - \left[-(-4)^3 - 9(-4)^2 - 24(-4)\right] = 200 - 196 = 4.$$

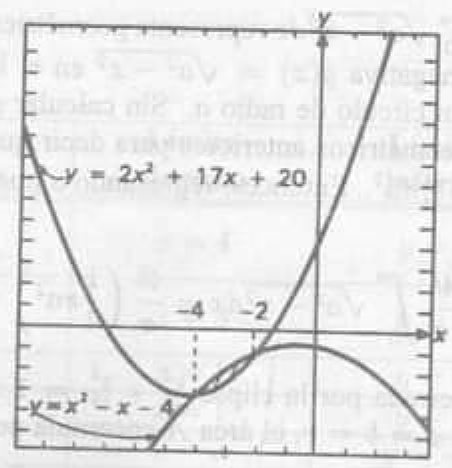


Figura 16.1.14. Ejemplo 16.1.10.

★

EJEMPLO 16.1.11. Calcular el área de la región limitada por la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

SOLUCIÓN. Al despejar la y de la ecuación dada de la elipse se obtiene:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Por razones de simetría (la elipse presenta todas las simetrías respecto de los dos ejes coordenados), podemos calcular solamente el área bajo la gráfica de la función $f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ entre $x=0$ y $x=a$, y multiplicar este resultado por 4. Es decir, calcularíamos solamente el área de una cuarta parte de la elipse dada (la que se encuentra en el primer cuadrante), con la integral de la función $f(x)$ mencionada entre $x=0$ y $x=a$. Así pues, el área A de la elipse es:

$$A=4\int_0^a\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{4b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx.$$

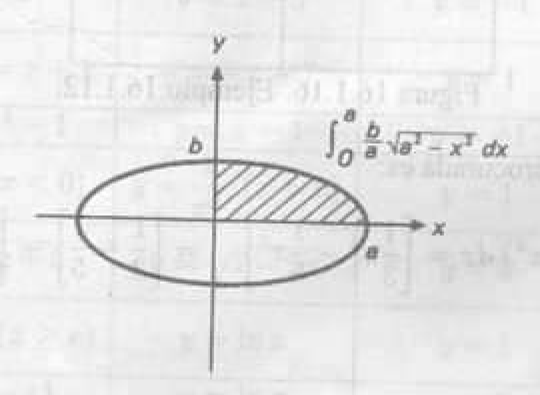


Figura 16.1.15. El área encerrada por la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ es 4 veces el valor de la integral $\int_0^a\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}dx$.

Observe que la integral $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$ representa geométricamente el área bajo la gráfica de la función continua no negativa $g(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ en el intervalo $[0, a]$. Se trata del área de la cuarta parte de un círculo de radio a. Sin calcular entonces la integral, nos basamos en los argumentos geométricos anteriores para decir que $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{4}$ (área de un círculo de radio a) $= \frac{1}{4}\pi a^2$. Entonces, regresando a nuestro problema del área de la elipse, tenemos:

$$A = \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{4b}{a}\left(\frac{1}{4}\pi a^2\right) = \pi ab.$$

Así pues, el área A encerrada por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ es de $A = \pi ab$. Como caso particular se obtiene que si $a = b = r$, el área A encerrada por el círculo $x^2 + y^2 = r^2$ es $A = \pi r^2$ (¿por qué?)

★

EJEMPLO 16.1.12. Calcular el área de la figura limitada por las parábolas $y = x^2$, $y = x^4$ y la recta $y = 1$.

SOLUCIÓN. Al resolver simultáneamente las ecuaciones $y = x^2$ y $y = x^4$, obtenemos los puntos de abscisas $x = 0$ y $x = \pm 1$ como puntos comunes. Estos últimos son los que a su vez son comunes con la recta $y = 1$. En el intervalo $[-1, 1]$, la parábola $y = x^2$ se encuentra siempre por encima de (o coincide con) la parábola $y = x^4$. Geométricamente se trata de calcular el área indicada en la figura 16.1.16.

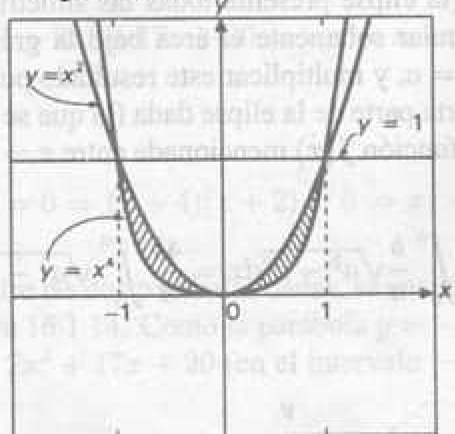


Figura 16.1.16. Ejemplo 16.1.12.

Entonces, el área A procurada es:

$$A = \int_{-1}^{1}(x^2 - x^4)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^{1} = \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right] - \left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right] = \frac{4}{15}.$$

★

EJERCICIOS (16.1)

Ejercicio	Límite izquierdo	Límite derecho	Límite inferior	Límite superior
1.	$x=1$	$x=4$	$y=0$	$y=\dfrac{3}{4x+5}$
2.	$x=2$	$x=3$	$y=0$	$y=x^2-2x+6$
3.	$x=-1$	$x=1$	$y=0$	$y=x^2+1$
4.	$x=-1$	$x=1$	$y=0$	$y=\cosh x$
5.	$x=-2$	$x=3$	$y=-1$	$y=e^{2x}$
6.	$x=2$	$x=4$	$y=-2$	$y=\sqrt{x-2}$
7.	$x=1$	$x=5$	$y=-x$	$y=x$
8.	$x=-1$	$x=3$	$y=-\sqrt{x+1}$	$y=\sqrt{x+3}+2$
9.	$x=0$	$x=4$	$y=e^{-x}$	$y=e^{x}$
10.	$x=-1$	$x=2$	$y=-2x-3$	$y=3x+4$
11.	$x=1$	$x=3$	$y=-2$	$y=\dfrac{2}{(x+1)^2}$
12.	$x=2$	$x=4$	$y=-x$	$y=xe^{x^2}$
13.	$x=0$	$x=1$	$y=-2x-1$	$y=\dfrac{3}{x^2+1}$
14.	$x=-\pi$	$x=\pi$	$y=-\cos x-2$	$y=\cos^2 x$
15.	$x=-2$	$x=2$	$y=\|x\|-3$	$y=4-x^2$
16.	$y=x+1$	$y=x-3$	$y=-4$	$y=2$
17.	$y=2x-3$	$y=3x+2$	$y=-2$	$y=0$
18.	$y^2=x$	$y=x-5$	$y=-1$	$y=1$
19.	$(y-1)^2=x+1$	$y=-x+7$	$y=1$	$y=2$
20.	$y^2=x^{-1}-1$	$y=x+4$	$y=-1$	$y=1$
21.	$y=\dfrac{1}{x^2},\ (x<0)$	$y=\dfrac{1}{x^3},\ (x>0)$	$y=1$	$y=8$
22.	$y=\sqrt{3x+5}$	$y=\sqrt{7-5x}$	$y=0$	$y=1$
23.	$y=\ln^2 x,\ (x\geq e)$	$y=\ln x$	$y=1$	$y=2$
24.	$y=\ln(-x)$	$y=\ln x$	$y=0$	$y=1$
25.	$x=\|y\|-3$	$x=4-\|y\|$	$y=-1$	$y=1$

En cada uno de los ejercicios 1 al 25, se dan los límites por la izquierda, por la derecha, por abajo y por arriba, de una región en el plano cartesiano. Expresar en cada caso el área de tal región como una integral definida, y calcularla.

En los ejercicios 26 al 30, se dan las coordenadas de los vértices A, B y C de un triángulo. Hallar su área.

Ejercicio	Vértice A	Vértice B	Vértice C
26.	$(0,0)$	$(6,0)$	$(3,3)$
27.	$(1,2)$	$(5,7)$	$(3,9)$
28.	$(-2,2)$	$(4,0)$	$(-2,5)$
29.	$(0,2)$	$(5,-3)$	$(2,3)$
30.	$(1,1)$	$(4,5)$	$(6,10)$

En los ejercicios 31 al 45 se dan los vértices A, B, C y D de un paralelogramo. Por medio de integrales definidas, hallar su área.

Ejercicio	Vértice A	Vértice B	Vértice C	Vértice D
31.	$(-2,1)$	$(3,1)$	$(5,2)$	$(0,2)$
32.	$(1,1)$	$(5,1)$	$(8,4)$	$(4,4)$
33.	$(2,3)$	$(6,3)$	$(8,7)$	$(4,7)$
34.	$(3,-1)$	$(7,-1)$	$(5,3)$	$(1,3)$
35.	$(-5,-3)$	$(1,-3)$	$(-1,2)$	$(-7,2)$
36.	$(1,-2)$	$(4,3)$	$(4,8)$	$(1,3)$
37.	$(-3,1)$	$(2,3)$	$(2,7)$	$(-3,5)$
38.	$(1,1)$	$(3,4)$	$(3,0)$	$(1,-3)$
39.	$(3,2)$	$(6,4)$	$(6,-1)$	$(3,-3)$
40.	$(0,4)$	$(4,3)$	$(4,-1)$	$(0,0)$
41.	$(1,3)$	$(3,7)$	$(7,11)$	$(5,7)$
42.	$(-2,3)$	$(-1,7)$	$(5,10)$	$(4,6)$
43.	$(-1,-1)$	$(1,4)$	$(4,4)$	$(6,9)$
44.	$(3,-2)$	$(1,1)$	$(5,4)$	$(3,-1)$
45.	$(2,3)$	$(8,10)$	$(4,5)$	$(10,12)$

En los ejercicios 46 al 55, calcular el área bajo la curva $y = f(x)$ dada en el intervalo indicado. (Observe que $f(x) \geq 0$ para toda x de tal intervalo.)

46. $y = \operatorname{sen}^3 x$, en $[0, \pi]$.

47. $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$, en $[-1, 1]$.

48. $y = x\sqrt{3x^2+4}$, en $[0, 1]$.

49. $y = \operatorname{sen}^2 x \cos x$, en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

50. $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$, en $[-1, 2]$.

51. $y = xe^{1-x^2}$, en $[0, 2]$.

52. $y = \dfrac{1}{x \ln^2 x}$, en $\left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$. **53.** $y = \dfrac{1 + \ln^3 x}{x}$, en $[1, 2]$.

54. $y = \dfrac{2^x + 3^x}{4^x}$, en $[0, 4]$. **55.** $y = \operatorname{senh}^2 x$, en $[-1, 1]$.

En los ejercicios 56 al 75, calcule el área limitada por las parábolas dadas.

56. $y = 2x^2$ y $y = x^2 + 1$. **57.** $y = 2x^2$ y $y = x^2 + 4$.

58. $y = 5x^2$ y $y = x^2 + 4$. **59.** $y = 4x^2$ y $y = 2x^2 + 8$.

60. $y = 3x^2$ y $y = 2x^2 + 9$.

61. $y = 2x^2 + 3x + 2$ y $y = x^2 + 3x + 3$.

62. $y = 3x^2 + 2x - 5$ y $y = 2x^2 + 2x - 1$.

63. $y = 2x^2 - 4x + 10$ y $y = x^2 + 2(x + 1)$.

64. $y = x^2 + 2x - 10$ y $y = -x^2 + 2$.

65. $y = x^2 - 4x - 8$ y $y = -x^2 - 2x + 4$.

66. $y = 2x^2 - 3x - 10$ y $y = -x^2 + 3x - 1$.

67. $y = 2x^2 + 2x - 30$ y $y = -x^2 - x + 6$.

68. $y = 3x^2 - 4x - 40$ y $y = -2x^2 + x + 20$.

69. $y = 0.25x^2 - 0.5x - 1$ y $y = -0.75x^2 + 0.5x + 1$.

70. $y = 0.5x^2 - 0.25x - 10$ y $y = -0.5x^2 + 0.75x + 2$.

71. $x = 2y^2 + 3y - 1$ y $x = (y + 1)^2$.

72. $x = 2y^2 - y - 1$ y $x = -y(y - 1)$.

73. $x = y^2 - 5y + 10$ y $x = -y^2 + 6y - 5$.

74. $x = 3y^2 - 40y + 40$ y $x = -3y^2 + 7y - 40$.

75. $x = 1.5y^2 - 3y + 6$ y $x = -0.5y^2 + 8y - 9$.

En los ejercicios 76 al 90, calcular el área de cada una de las tres regiones limitadas por la parábola $y = a - x^2$, y las dos rectas $y = \pm mx$ dadas.

76. $y = 2 - x^2$ y $y = \pm x$. **77.** $y = 3 - x^2$ y $y = \pm 2x$.

78. $y = \dfrac{33}{4} - x^2$ y $y = \pm 4x$. **79.** $y = 3 - x^2$ y $y = \pm \dfrac{1}{2}x$.

80. $y = \frac{45}{4} - x^2$ y $y = \pm 6x$.

81. $y = 10 - x^2$ y $y = \pm \frac{1}{3}x$.

82. $y = 6 - x^2$ y $y = \pm x$.

83. $y = 10 - x^2$ y $y = \pm \frac{3}{2}x$.

84. $y = 12 - x^2$ y $y = \pm x$.

85. $y = 15 - x^2$ y $y = \pm 2x$.

86. $y = \frac{19}{2} - x^2$ y $y = \pm \frac{1}{6}x$.

87. $y = \frac{25}{2} - x^2$ y $y = \pm \frac{5}{2}x$.

88. $y = \frac{8}{5} - x^2$ y $y = \pm \frac{3}{5}x$.

89. $y = 10 - x^2$ y $y = \pm 3x$.

90. $y = 11 - x^2$ y $y = \pm \frac{7}{2}x$.

En los ejercicios 91 al 95, calcular el área de la región comprendida entre el eje x, la semiparábola y la recta dadas.

91. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}, y = \frac{15}{16} - x$.

92. $y = \frac{2}{5}\sqrt{5x}, y = \frac{21}{20} - x$.

93. $y = -\sqrt{x}, y = \frac{3}{4} - x$.

94. $y = \sqrt{2x}, y = \frac{5}{8} - x$.

95. $y = -\sqrt{3x}, y = \frac{7}{12} - x$.

En los ejercicios 96 al 100, calcular el área de la región comprendida entre la parábola y la recta dadas.

96. $y^2 = \frac{3}{4}x, y = \frac{7}{48} - x$.

97. $y^2 = 2x, y = \frac{3}{2} - x$.

98. $y^2 = 2x, y = \frac{21}{8} - x$.

99. $y^2 = \frac{3}{2}x, y = \frac{55}{24} - x$.

100. $y^2 = 2x, y = \frac{45}{8} - x$.

101. Calcule el área de la región comprendida entre el eje x, la hipérbola $y = \frac{1}{x}$ y la recta $x = 3$.

102. Calcule el área de la región comprendida entre el eje y, la hipérbola $y = \frac{1}{x}$ y la recta $y = 3$.

103. Calcule el área de la región en el primer cuadrante limitada por la hipérbola $y = \frac{1}{x}$ y las rectas $y = 2x$ y $y = \frac{1}{2}x$.

104. Calcule el área de la región en el primer cuadrante limitada por las hipérbolas $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{2}{x}$, y las rectas $y = 2x$ y $y = \frac{1}{2}x$.

105. Calcule el área de la región limitada por la parábola $y = x^2$ y las rectas $y = 2x$ y $y = \frac{1}{2}x$.

106. Calcule el área de la región comprendida entre las curvas $y = 2x^2$ y $y = \frac{4}{x^2+1}$.

107. Calcule el área de la región comprendida entre las curvas $y = 4x^2$ y $y = \frac{80}{x^2+1}$.

108. Calcule el área de la región limitada por la parábola $y = -x^2$ y sus dos rectas tangentes en $x = -a$ y $x = a$.

109. Por el punto $(2, 0)$ se han trazado rectas tangentes a la parábola $y = x^2$. Calcular el área de la región limitada por la parábola y estas dos rectas.

110. Calcule el área de la región limitada por el eje y, la semiparábola $y = \sqrt{x}$, y la recta tangente a ésta en $x = 1$.

111. Demostrar que el área de un sector parabólico de base b y altura h es $A = \frac{2}{3}ah$.

16.2 VOLÚMENES DE CUERPOS DE SECCIONES CONOCIDAS

Supongamos que tenemos un cuerpo sólido del cual queremos calcular su volumen. Imaginemos una cierta línea en el espacio, que llamaremos **eje** del cuerpo, que tiene la propiedad de que cada plano perpendicular a esta línea, corta al cuerpo dado en una sección (plana) llamada **sección transversal,** de la cual conocemos su área. Más precisamente, supongamos que el eje del cuerpo es el eje x, que tal cuerpo se extiende de $x = a$ a $x = b$, y que para cada punto de abscisa $x \in [a, b]$, un plano perpendicular al plano xy que pasa por tal punto, corta al sólido en una sección cuya área (que depende del punto en donde se haga el corte) se conoce. Llamemos $A = A(x)$ a tal área. Ésta es entonces una función (que supondremos continua) definida en $[a, b]$. El volumen V del cuerpo dado se define como:

$$V = \int_a^b A(x)dx.$$

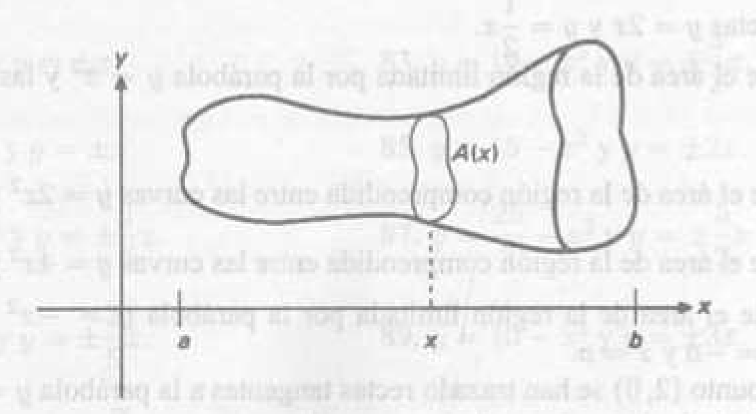


Figura 16.2.1. El volumen V de un cuerpo entre $x = a$ y $x = b$ conociendo la función continua $A(x)$ que nos da el área de la sección transversal del cuerpo para $x \in [a, b]$.

Sin ser muy precisos, daremos las ideas principales que nos harán plausible la definición anterior. Dividamos el intervalo $[a, b]$ con una partición P como:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

En cada uno de los n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ en que queda dividido el intervalo $[a, b]$ por la partición P, tomemos un punto $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$. Observe que $A(\xi_i)$ sería el área del sólido dado cuando lo cortamos transversalmente en un punto de abscisa ξ_i. Si multiplicamos $A(\xi_i)$ por la longitud del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, es decir, por $x_i - x_{i-1}$, estaremos calculando un volumen de una "rebanada cilíndrica" cuya área de la base es $A(\xi_i)$ y cuya altura (o bien, cuyo grosor) es $x_i - x_{i-1}$. Si sumamos todos los productos $A(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1})$ desde $i = 1$ hasta $i = n$, estaremos obteniendo una aproximación del volumen del cuerpo que queremos calcular. Esta aproximación será mejor, mientras las rebanadas mencionadas sean más delgadas, de modo que si el grosor de éstas (que es la norma de la partición P) tiende a cero (y el número de ellas tiende a infinito), obtendremos el volumen requerido.

$$V = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1}).$$

Observe que ésta no es más que la definición de la integral definida entre $x = a$ y $x = b$ de la función $A(x)$. Esto justifica la definición hecha al principio de la sección.

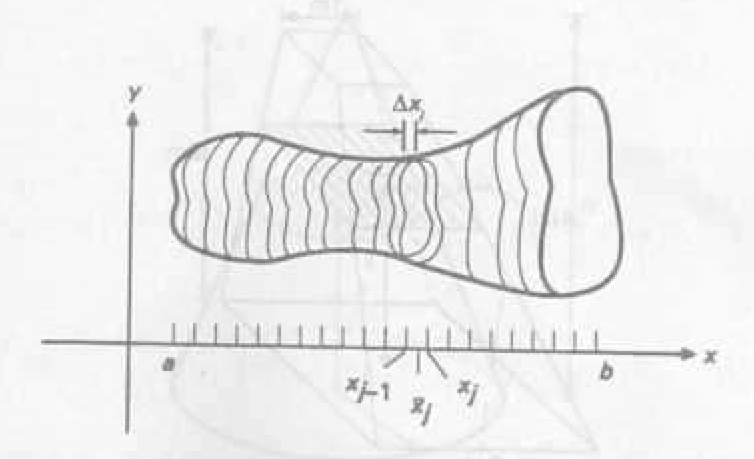


Figura 16.2.2. La suma de los volúmenes de las rebanadas del cuerpo sólido (la suma de Riemann de la función $A(x)$ en el intervalo $[a, b]$), es una aproximación del volumen del cuerpo. El límite de esta suma cuando las rebanadas se hacen muy delgadas, es el volumen del cuerpo.

EJEMPLO 16.2.1. Un obelisco de sección cuadrada de lado de la base $a_1 = 2$ m y altura $h = 8$ m, tiene la forma de una pirámide truncada. Si el lado de la sección superior del obelisco es de $a_2 = 1$ m, calcular el volumen de éste.

SOLUCIÓN. Tomamos como $x = 0$ el nivel del piso, y medimos la altura $x \in [0, 8]$ en dirección del eje de simetría del obelisco. Para cada una de estas x, el plano paralelo al piso que pasa por x corta transversalmente al sólido. Cada corte transversal es un cuadrado de área $A(x) = (l(x))^2$, en donde $l(x)$ es la longitud del cuadrado de la sección transversal. Conociendo la función $A(x)$, el volumen del obelisco es, según la discusión previa al ejemplo, $V = \int_0^8 A(x)dx$. Para conocer el lado $l(x)$ del cuadrado de la sección transversal del sólido a la altura x, observamos que el lado del cuadrado, que comienza (en $x = 0$) con $l(0) = 2$ y termina (en $x = 8$) con $l(8) = 1$, varía de manera lineal. Así, procuramos una función lineal $y = l(x)$ tal que $l(0) = 2$ y $l(8) = 1$. Ésta es una recta que pasa por los puntos $(0, 2)$ y $(8, 1)$, cuya ecuación es, como sabemos del curso de Geometría Analítica:

$$y - 2 = \frac{2 - 1}{0 - 8}(x - 0).$$

O sea:

$$y = l(x) = -\frac{1}{8}x + 2.$$

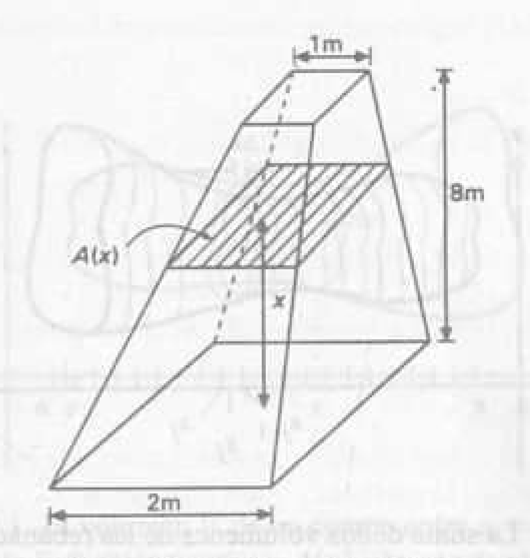


Figura 16.2.3. Ejemplo 16.2.1.

Entonces:

$$A(x) = (l(x))^2 = \left(-\frac{1}{8}x + 2\right)^2$$

es el área de la sección transversal requerida. El volumen del obelisco es por lo tanto:

$$V(x) = \int_0^8 A(x)dx = \int_0^8 \left(-\frac{1}{8}x + 2\right)^2 dx = -8\int_0^8 \left(-\frac{1}{8}x + 2\right)^2 \left(-\frac{1}{8}\right) dx$$

$$= -8\left[\frac{(-\frac{1}{8}x + 2)^3}{3}\right]_0^8 = -\frac{8}{3}\left(\left[-\frac{1}{8}(8) + 2\right]^3 - \left[-\frac{1}{8}(0) + 2\right]^3\right) = -\frac{8}{3}(1 - 8) = \frac{56}{3}.$$

Es decir, el obelisco tiene un volumen de $\frac{56}{3}$ m^3.

★

EJEMPLO 16.2.2. Calcule el volumen de un cono circular recto, de radio de la base R y altura H.

SOLUCIÓN. Tomando como $x = 0$ la base del cono, para cada $x \in [0, H]$ la sección transversal (perpendicular al eje de simetría del cono), es un círculo, cuyo radio $r = r(x)$ depende de x, siendo R para $x = 0$, y 0 para $x = H$, y cuya área $A(x) = \pi r^2$ debemos hacer explícita, pues la integral de ésta entre 0 y H nos dará el volumen deseado.

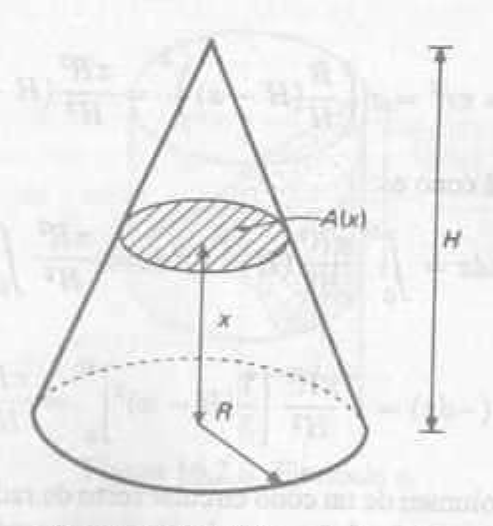


Figura 16.2.4. Ejemplo 16.2.2.

El radio $r(x)$ lo podemos obtener observando la siguiente figura:

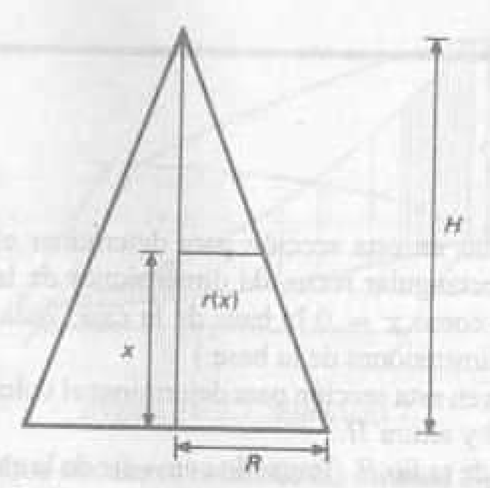


Figura 16.2.5. Corte transversal del cono del ejemplo 16.2.2.

Por la semejanza de los triángulos ABC y $AB'C'$ obtenemos que:

$$\frac{H}{R} = \frac{H-x}{r}$$

de donde:

$$r = \frac{R}{H}(H-x).$$

(Observe que hubiéramos podido obtener este resultado si, como en el ejemplo 16.2.1, observamos que la variación del radio r con x es lineal.) Así pues, el área de la sección transversal del cono a una altura x de su base es:

$$A(x) = \pi r^2 = \pi \left(\frac{R}{H}(H - x) \right)^2 = \frac{\pi R^2}{H^2}(H - x)^2.$$

Entonces el volumen del cono es:

$$V = \int_0^H A(x)dx = \int_0^H \frac{\pi R^2}{H^2}(H - x)^2 dx = \frac{\pi R^2}{H^2} \int_0^H (H - x)^2 dx$$

$$= -\frac{\pi R^2}{H^2} \int_0^H (H - x)^2(-dx) = -\frac{\pi R^2}{H^2} \left[\frac{1}{3}(H - x)^3 \right]_0^H = \frac{\pi R^2}{H^2} \left(\frac{1}{3} H^3 \right) = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

Ésta es la fórmula del volumen de un cono circular recto de radio de la base R y altura H, que seguramente ya conocíamos desde la secundaria.

★

EJERCICIOS (16.2)

1. Use las ideas descritas en esta sección para determinar el volumen de una caja en forma de paralelepípedo rectangular recto, de dimensiones de la base $a \times b$ cm^2 y altura h cm. (Sugerencia: Tome como $x = 0$ la base de la caja; cada sección transversal es un rectángulo de las mismas dimensiones de la base.)

2. Use las ideas descritas en esta sección para determinar el volumen de un cilindro circular recto, de radio de la base R y altura H.

3. Considere una esfera de radio R. Tomando como eje de la esfera una línea que pasa por su centro, y tomando x medida desde el centro de la esfera, demuestre que el área $A = A(x)$ de la sección transversal de la esfera para $x \in [0, R]$ viene dada por:

$$A(x) = \pi \left(R^2 - x^2 \right).$$

4. Use el resultado del ejercicio anterior para obtener que el volumen de una esfera de radio R es $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

5. Un obelisco cuya altura es de 15 m tiene sección transversal rectangular, siendo su base un rectángulo de dimensiones 3×5 m^2, y su parte más alta, un rectángulo de dimensiones 1×3 m^2. Siguiendo un procedimiento como el del ejemplo 16.2.1, calcule el volumen de este obelisco.

6. De un cilindro circular recto de radio de la base R se corta una pieza de altura H con un plano que pasa por un diámetro de la base, como se muestra en la figura 16.2.6. Calcular el volumen de este cuerpo.

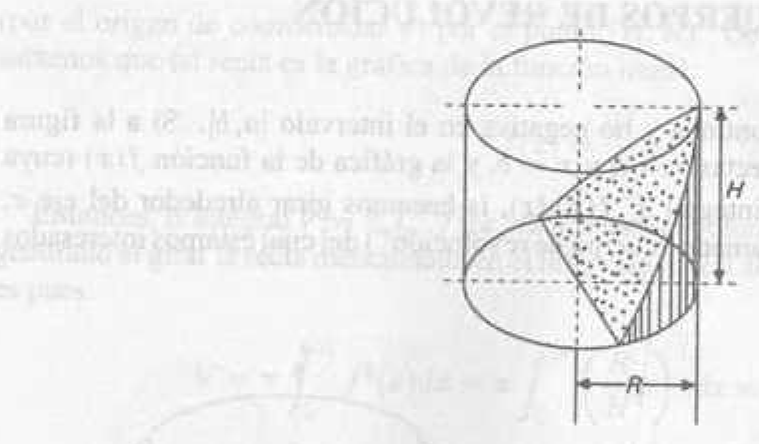


Figura 16.2.6. Ejercicio 6.

7. De un cilindro cuya base es una elipse, de semiejes a (menor) y b (mayor), se corta una pieza de altura H con un plano que pasa por el eje menor de la elipse, como se muestra en la figura 16.2.7. Calcular el volumen de este cuerpo.

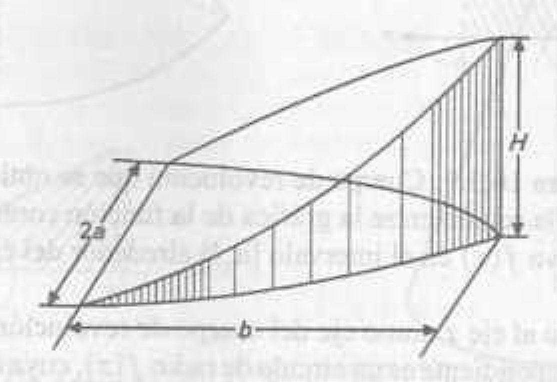


Figura 16.2.7. Ejercicio 7.

8. Los ejes de dos cilindros circulares rectos de las mismas dimensiones (radio de la base R), se cortan perpendicularmente. Calcular el volumen de la parte común de los dos cilindros.

9. Un cono circular recto, de radio de la base R y altura H se corta con un plano que pasa por el centro de la base del cono y es paralelo a la generatriz de éste. Demostrar que el cono queda dividido en dos partes cuyos volúmenes son:

$$V_1 = \tfrac{1}{6}R^2H\left(\pi + \tfrac{4}{3}\right) \quad \text{y} \quad V_2 = \tfrac{1}{6}R^2H\left(\pi - \tfrac{4}{3}\right).$$

(Sugerencia: Use el resultado del ejercicio 111 de la sección 16.1.)

16.3 VOLÚMENES DE CUERPOS DE REVOLUCIÓN

Consideremos una función continua y no negativa en el intervalo $[a, b]$. Si a la figura plana formada por el eje x, las rectas $x = a$ y $x = b$, y la gráfica de la función $f(x)$ (cuya área sabemos que es igual a la integral $\int_a^b f(x)dx$), la hacemos girar alrededor del eje x, obtendremos un cuerpo sólido (llamado "cuerpo de revolución") del cual estamos interesados en cómo calcular su volumen.

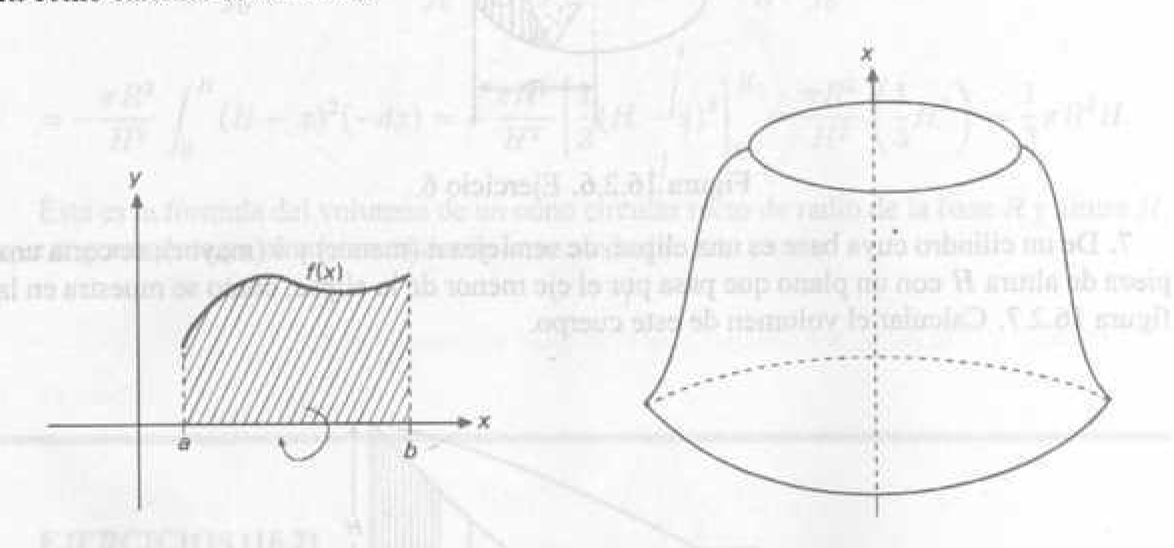


Figura 16.3.1. Cuerpo de revolución que se obtiene al girar la región entre la gráfica de la función continua y positiva $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ alrededor del eje x.

Observe que, tomando al eje x como eje del cuerpo de revolución, para cada $x \in [a, b]$ la sección transversal correspondiente es un círculo de radio $f(x)$, cuya área es entonces $A(x) = \pi f^2(x)$. Según lo discutido en la sección 16.2, el volumen V del cuerpo de revolución es entonces:

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \pi f^2(x)dx$$

o bien:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

EJEMPLO 16.3.1. Resuelva el ejemplo 16.2.2, viendo al cono circular recto como un cuerpo de revolución.

SOLUCIÓN. Consideremos una recta de pendiente positiva que parte del origen de coordenadas. Esta recta es la que haremos girar alrededor del eje x para obtener el cono. Como éste debe tener radio de la base R y altura H, la recta que debemos poner a girar debe pasar

(por el origen de coordenadas y) por el punto (H, R). Del curso de Geometría Analítica, sabemos que tal recta es la gráfica de la función lineal:

$$f(x) = \frac{R}{H}x.$$

Entonces, la integral $V = \pi \int_0^H f^2(x)dx$ nos dará el volumen del cuerpo de revolución engendrado al girar la recta mencionada en el intervalo $[0, H]$ alrededor del eje x. Este volumen es pues:

$$V = \pi \int_0^H f^2(x)dx = \pi \int_0^H \left(\frac{R}{H}x\right)^2 dx = \frac{\pi R^2}{H^2} \int_0^H x^2 dx$$

$$= \frac{\pi R^2}{H^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^H = \frac{\pi R^2}{H^2}\left(\frac{1}{3}H^3\right) = \frac{1}{3}\pi R^2 H \cdot$$

como obtuvimos en el ejemplo 16.2.2.

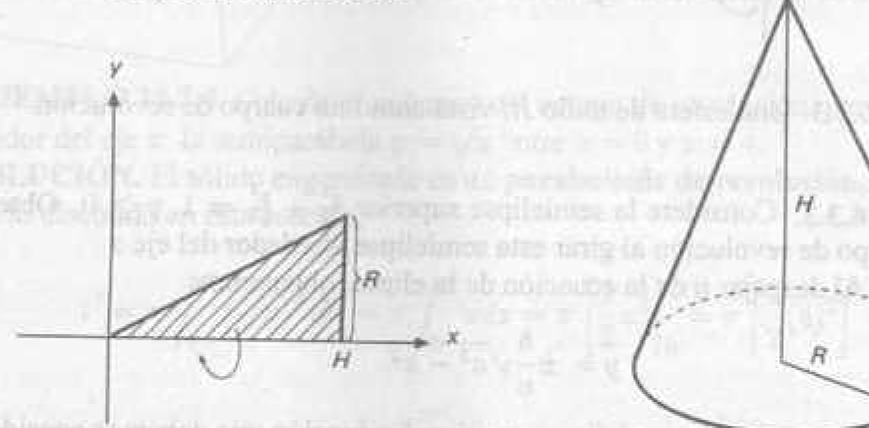


Figura 16.3.2. Un cono circular recto de radio de la base R y altura H, visto como un cuerpo de revolución.

★

EJEMPLO 16.3.2. Considere la función continua no negativa $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ en el intervalo $[-R, R]$. Determine el volumen del cuerpo de revolución engendrado al girar la gráfica de esta función alrededor del eje x. ¿Qué cuerpo se obtiene?

SOLUCIÓN. Observe que la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ corresponde al semicírculo superior de $x^2 + y^2 = R^2$, el cual es un círculo de centro en el origen y radio R. Al girar éste alrededor del eje x se obtendrá entonces una esfera de radio R, cuyo volumen es:

$$V = \pi \int_{-R}^{R} f^2(x)dx = \pi \int_{-R}^{R} \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\, dx = \pi \left[R^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-R}^{R}$$

$$= \pi \left[\left(R^2(R) - \frac{1}{3}R^3 \right) - \left[R^2(-R) - \frac{1}{3}(-R)^3 \right] \right] = \pi \left[\frac{2}{3}R^3 - \left(-\frac{2}{3}R^3 \right) \right] = \frac{4}{3}\pi R^3$$

que es, como sabemos, el volumen de una esfera de radio R.

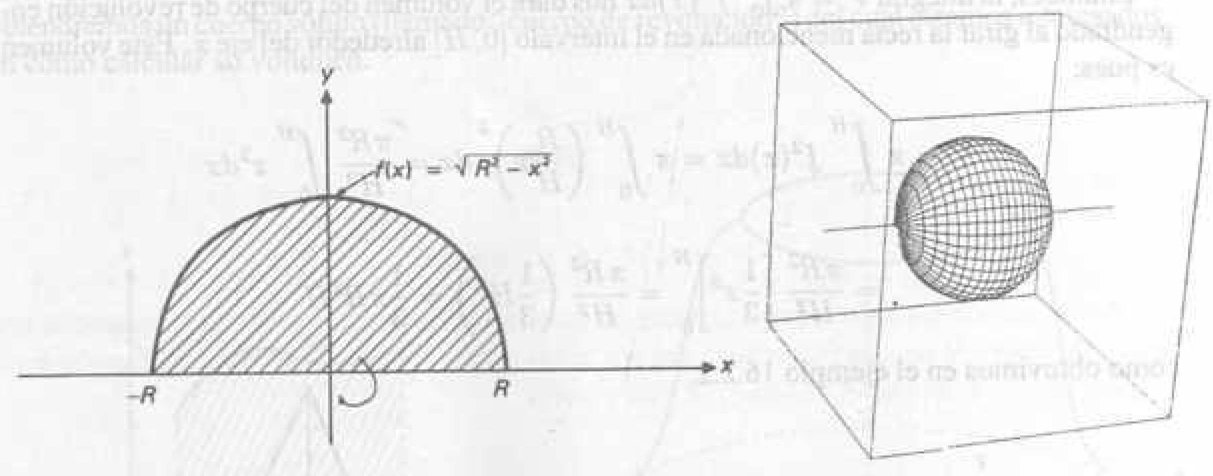


Figura 16.3.3. Una esfera de radio R, vista como un cuerpo de revolución.

★

EJEMPLO 16.3.3. Considere la semielipse superior $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $y \geq 0$. Obtenga el volumen del cuerpo de revolución al girar esta semielipse alrededor del eje x.

SOLUCIÓN. Al despejar y de la ecuación de la elipse, obtenemos:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

El signo + corresponde a la semielipse superior. La función que debemos considerar en este ejemplo es entonces:

$$f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

cuya gráfica se encuentra entre $x = -a$ y $x = a$ (éste es el dominio de la función). Entonces, el volumen del cuerpo de revolución engendrado al girar esta semielipse alrededor del eje x (llamado **elipsoide de revolución**) es:

$$V = \pi \int_{-a}^{a} f^2(x)dx = \pi \int_{-a}^{a} \left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \right)^2 = \pi \int_{-a}^{a} \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)dx$$

$$= \frac{\pi b^2}{a^2} \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)dx = \frac{\pi b^2}{a^2} \left[a^2x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-a}^{a}$$

$$= \frac{\pi b^2}{a^2} \left[\frac{2}{3}a^3 - \left(-\frac{2}{3}a^3 \right) \right] = \frac{\pi b^2}{a^2} \left(\frac{4}{3}a^3 \right) = \frac{4}{3}\pi b^2 a.$$

Observe que si $a = b = R$, obtenemos que este volumen es $V = \frac{4}{3}\pi(R^2)(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$ que es el volumen de una esfera de radio R, como obtuvimos en el ejemplo anterior.

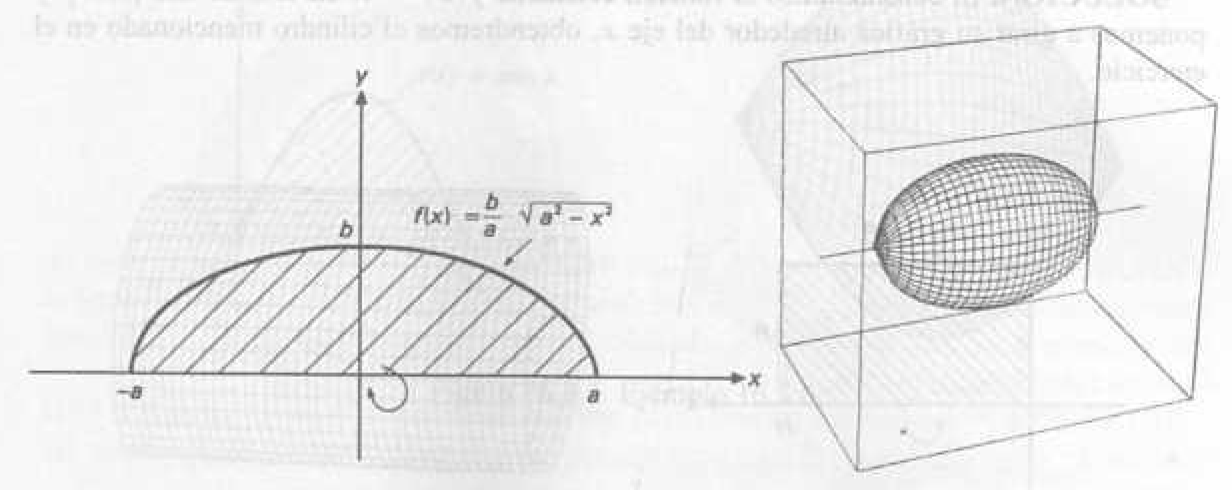


Figura 16.3.4. El elipsoide de revolución del ejemplo 16.3.3.

★

EJEMPLO 16.3.4. Calcule el volumen del cuerpo de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje x, la semiparábola $y = \sqrt{x}$ entre $x = 0$ y $x = 4$.

SOLUCIÓN. El sólido engendrado es un **paraboloide de revolución,** cuyo volumen es, según lo discutido en esta sección:

$$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2\, dx = \pi \int_0^4 x dx = \pi \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4 = \pi \left[\frac{1}{2}(4)^2\right] = 8\pi.$$

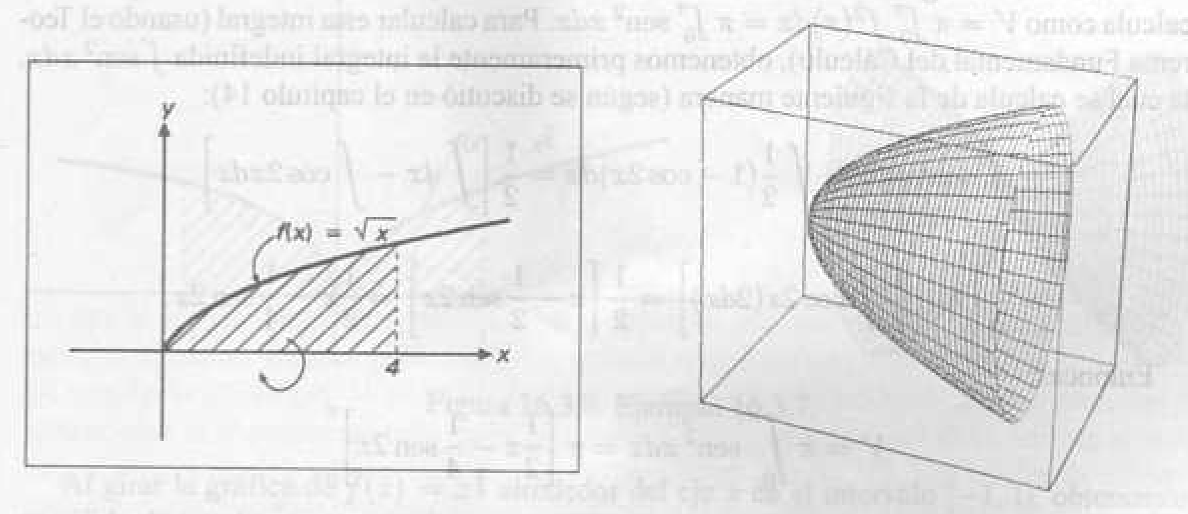


Figura 16.3.5. El paraboloide de revolución del ejemplo 16.3.4.

★

Terminamos con algunos ejemplos adicionales.

EJEMPLO 16.3.5. Determine el volumen de un cilindro circular recto, de radio de la base R y altura H, viendo a éste como un sólido de revolución.

SOLUCIÓN. Si consideramos la función constante $f(x) = R$ en el intervalo $[0, H]$, y ponemos a girar su gráfica alrededor del eje x, obtendremos el cilindro mencionado en el ejercicio.

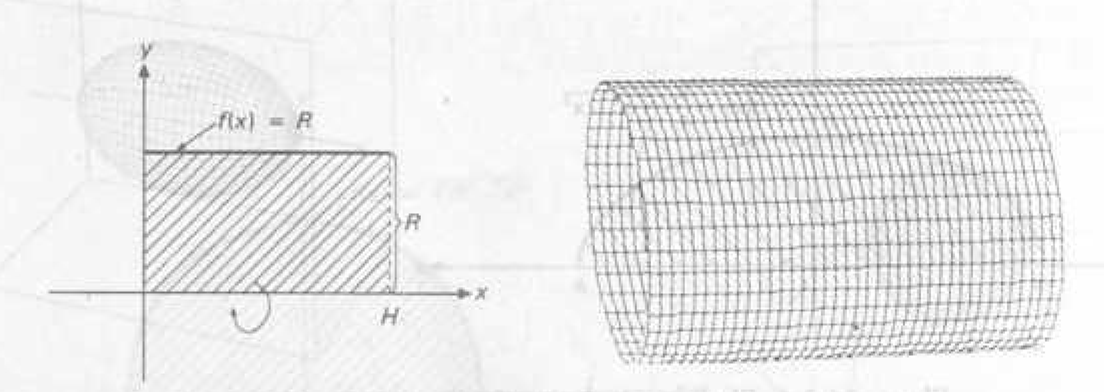


Figura 16.3.6. Un cilindro como sólido de revolución.

El volumen V del cilindro es entonces:

$$V = \pi \int_0^H f^2(x)dx = \pi \int_0^H R^2 dx = \pi R^2 \int_0^H dx = \pi R^2 [x]_0^H = \pi R^2 H.$$

★

EJEMPLO 16.3.6. Determine el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ alrededor del eje x en el intervalo $[0, \pi]$.

SOLUCIÓN. Según se discutió en la sección 3 de este capítulo, el volumen V requerido se calcula como $V = \pi \int_0^\pi f^2(x)dx = \pi \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x dx$. Para calcular esta integral (usando el Teorema Fundamental del Cálculo), obtenemos primeramente la integral indefinida $\int \operatorname{sen}^2 x dx$, la cual se calcula de la siguiente manera (según se discutió en el capítulo 14):

$$\int \operatorname{sen}^2 x dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left[\int dx - \int \cos 2x dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\int \cos 2x(2dx)\right] = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right] = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x.$$

Entonces:

$$V = \pi \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x dx = \pi \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x\right]_0^\pi$$

$$= \pi\left(\left[\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\pi\right] - \left[\frac{1}{2}(0) - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 0\right]\right) = \pi.$$

Así, el volumen requerido del sólido de este ejercicio es de π unidades cúbicas.

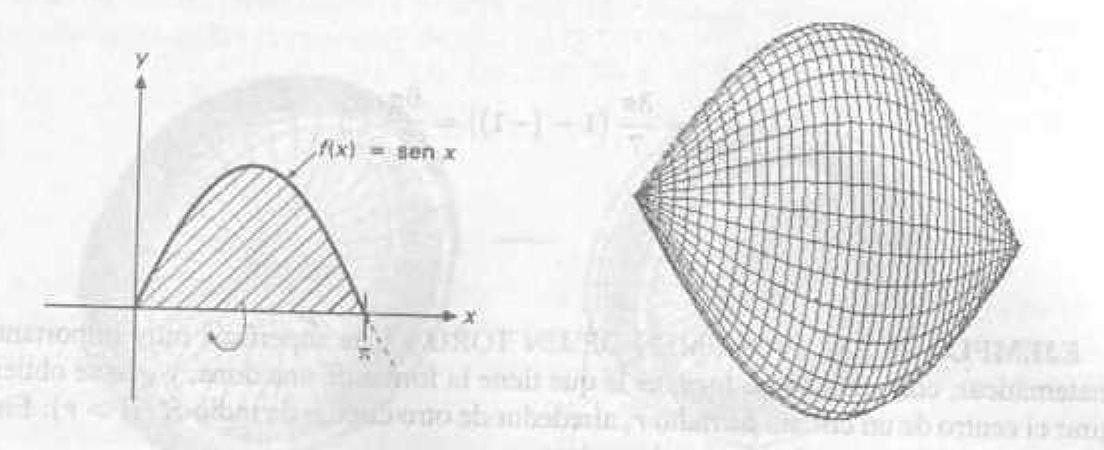


Figura 16.3.7. Ejemplo 16.3.6.

★

EJEMPLO 16.3.7. Calcule el volumen que se obtiene al girar la gráfica de la función $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ alrededor del eje x en el intervalo $[-1, 1]$.

SOLUCIÓN. Hagamos algunas observaciones sencillas que nos permitan tener una imagen geométrica de la gráfica de $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$. Observe que ésta es una función definida y continua en todo $\mathbf{R}$. Su derivada es $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ la cual no existe en $x = 0$ (éste es entonces un punto crítico). Además $f'(x) < 0$ para $x < 0$ y $f'(x) > 0$ para $x > 0$, lo que indica la presencia de un mínimo local en $x = 0$. Como $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}} < 0$ para toda x (no nula), la gráfica de la función es, en $\mathbf{R}^-$ y en $\mathbf{R}^+$, cóncava hacia abajo. Geométricamente se ve como:

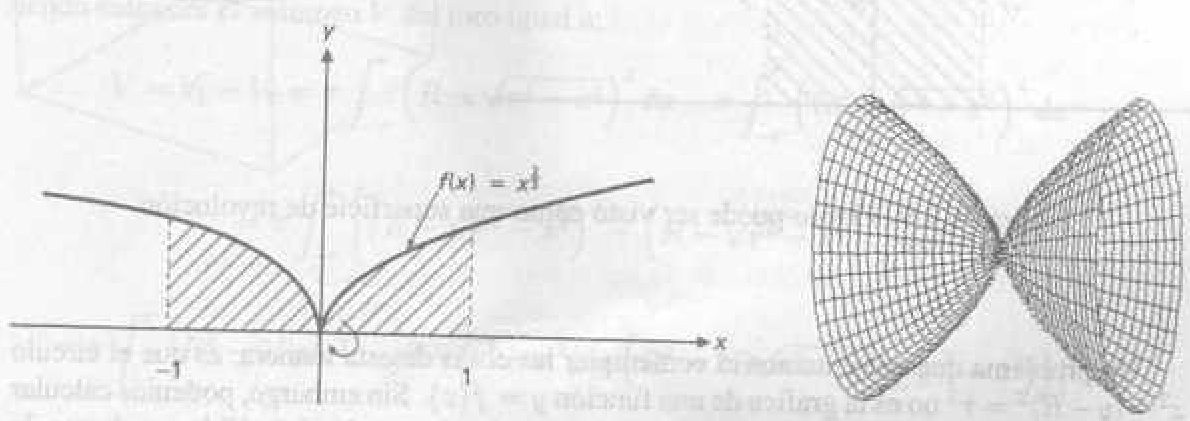


Figura 16.3.8. Ejemplo 16.3.7.

Al girar la gráfica de $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ alrededor del eje x en el intervalo $[-1, 1]$, obtenemos un sólido de revolución cuyo volumen es:

$$V = \pi \int_{-1}^{1} f^2(x)dx = \pi \int_{-1}^{1} \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^2 dx = \pi \int_{-1}^{1} x^{\frac{4}{3}}dx = \pi \left[\frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{3\pi}{7}(1-(-1)) = \frac{6\pi}{7}.$$

⋆

EJEMPLO 16.3.8. (VOLUMEN DE UN TORO.) Una superficie muy importante en matemáticas, conocida como **toro**, es la que tiene la forma de una dona, y que se obtiene al girar el centro de un círculo de radio r, alrededor de otro círculo de radio R $(R > r)$. En este ejercicio calcularemos el volumen de un toro.

SOLUCIÓN. Podemos ver a un toro como una superficie de revolución, obtenida al girar el círculo $x^2 + (y - R)^2 = r^2$, el cual tiene radio r y centro en el punto $(0, R)$, alrededor del eje x.

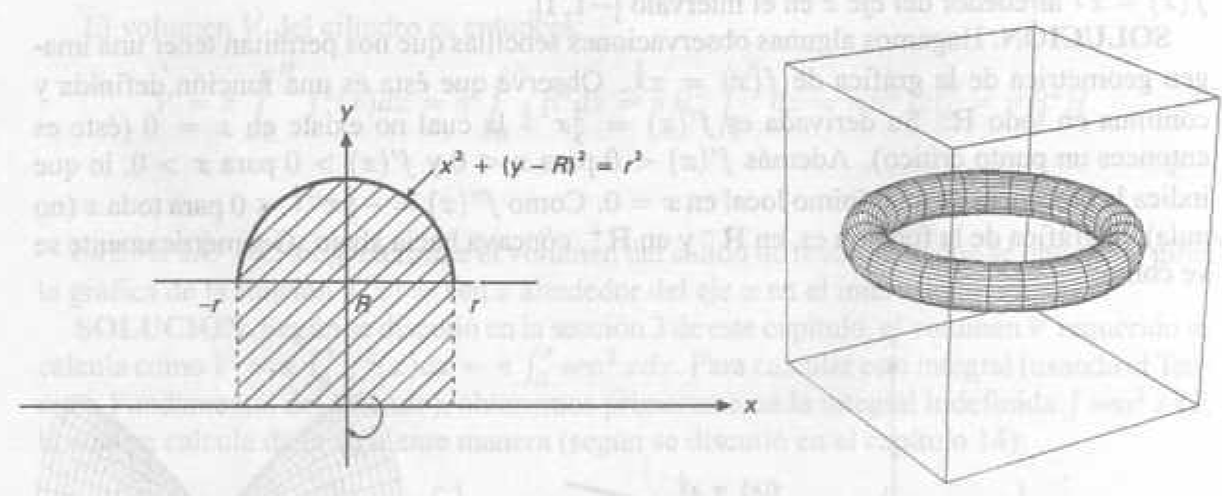


Figura 16.3.9. El toro puede ser visto como una superficie de revolución.

Un problema que enfrentamos al contemplar las cosas de esta manera, es que el círculo $x^2+(y-R)^2 = r^2$ no es la gráfica de una función $y = f(x)$. Sin embargo, podemos calcular el volumen de esta dona calculando primeramente el volumen V_1 del sólido resultante de girar la gráfica de la función $y = f_1(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}$ (que corresponde al semicírculo superior de $x^2 + (y - R)^2 = r^2$), entre $x = -r$ y $x = r$, alrededor del eje x (con lo que estaríamos calculando el volumen de una rosca con borde cóncavo, semicircular), y a este volumen le restamos el volumen V_2 del sólido resultante de girar la gráfica de la función $y = f_2(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}$ (el semicírculo inferior), entre $x = -r$ y $x = r$, alrededor del eje x (con lo que estaríamos calculando el volumen de una rosca con borde convexo, semicircular).

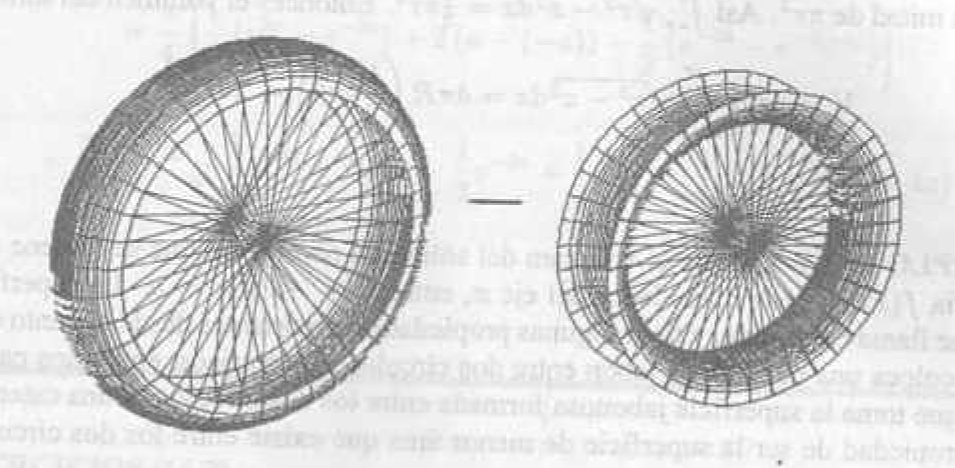


Figura 16.3.10. El volumen del toro se puede obtener como la diferencia de los volúmenes de dos sólidos de revolución.

Así, el volumen V_1 es:

$$V_1 = \pi \int_{-r}^{r} (f_1(x))^2\, dx = \pi \int_{-r}^{r} \left(R + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$$

y el volumen V_2 es:

$$V_2 = \pi \int_{-r}^{r} (f_2(x))^2\, dx = \pi \int_{-r}^{r} \left(R - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$$

siendo entonces el volumen V del toro igual a:

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_{-r}^{r} \left(R + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx - \pi \int_{-r}^{r} \left(R - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_{-r}^{r} \left[\left(R - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 - \left(R - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2\right] dx$$

$$= \pi \int_{-r}^{r} \left[R^2 - 2R\sqrt{r^2 - x^2} + (r^2 - x^2) - \left(R^2 - 2R\sqrt{r^2 - x^2} + (r^2 - x^2)\right)\right] dx$$

$$= \pi \int_{-r}^{r} 4R\sqrt{r^2 - x^2} dx = 4\pi R \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

Nuevamente, en lugar de hacer el cálculo explícito de la integral $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} dx$ interpretemos geométricamente su significado: la función $g(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ tiene por gráfica al semicírculo superior del círculo $x^2 + y^2 = r^2$. Como tal función es continua y no negativa en $[-r, r]$, el valor de la integral $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} dx$ no es más que el del área bajo la gráfica de

la función en el intervalo mencionado. Tal área es la de la mitad de un círculo de radio r, es decir, es la mitad de πr^2. Así $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}dx = \frac{1}{2}\pi r^2$. Entonces el volumen del toro es:

$$V = 4\pi R \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}dx = 4\pi R\left(\frac{1}{2}\pi r^2\right) = 2\pi^2 Rr^2.$$

⋆

EJEMPLO 16.3.9. Calcule el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar la catenaria $f(x) = \cosh x$ alrededor del eje x, entre $x = -a$ y $x = a$. La superficie así obtenida se llama **catenoide,** y tiene algunas propiedades importantes desde el punto de vista físico: si coloca una película de jabón entre dos círculos concéntricos, en planos paralelos, la forma que toma la superficie jabonosa formada entre los dos círculos es una catenoide, y tiene la propiedad de ser la superficie de menor área que existe entre los dos círculos que conecta.

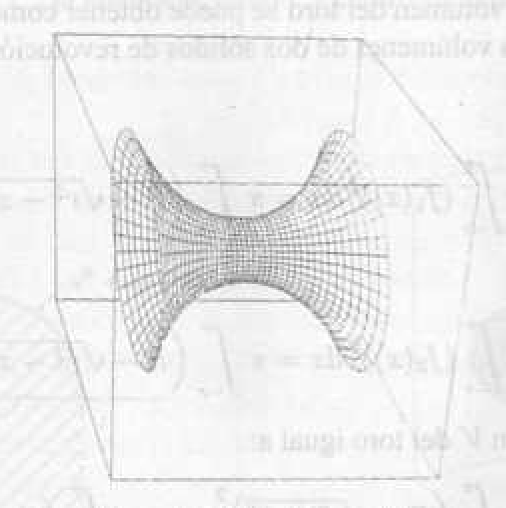


Figura 16.3.11. Catenoide.

SOLUCIÓN. El cálculo del volumen de la catenoide es directo:

$$V = \pi \int_{-a}^{a} f^2(x)dx = \pi \int_{-a}^{a} \cosh^2 x dx = \pi \int_{-a}^{a} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_{-a}^{a} \left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) dx = \frac{\pi}{4}\left[\int_{-a}^{a} e^{2x}dx + \int_{-a}^{a} 2dx + \int_{-a}^{a} e^{-2x}dx\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\left(\frac{1}{2}\right)\int_{-a}^{a} e^{2x}(2dx) + 2\int_{-a}^{a} dx + \left(-\frac{1}{2}\right)\int_{-a}^{a} e^{-2x}(-2dx)\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{2}\left[e^{2x}\right]_{-a}^{a} + 2\left[x\right]_{-a}^{a} - \frac{1}{2}\left[e^{-2x}\right]_{-a}^{a}\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{2}\left(e^{2a} - e^{-2a}\right) + 2\left(a - (-a)\right) - \frac{1}{2}\left(e^{-2a} - e^{-2(-a)}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{2}e^{2a} - \frac{1}{2}e^{-2a} + 2(2a) - \frac{1}{2}e^{-2a} + \frac{1}{2}e^{2a}\right] = \frac{\pi}{4}\left(e^{2a} - e^{-2a} + 4a\right).$$

★

EJERCICIOS (16.3)

En los ejercicios 1 al 15, calcule el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar la gráfica de la función dada $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ indicado.

1. $f(x) = \sqrt{3x}$, en $[0, 3]$.

2. $f(x) = \ln x$, en $[1, e]$.

3. $f(x) = e^x - 1$, en $[0, 1]$.

4. $f(x) = x^2 + 1$, en $[0, 1]$.

5. $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$, en $[0, 1]$.

6. $f(x) = (1 + x^2)^{\frac{3}{2}}$, en $[0, 2]$.

7. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$, en $[0, \pi]$.

8. $f(x) = \tan x$, en $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

9. $f(x) = x\sqrt{1 + x^3}$, en $[0, 1]$.

10. $f(x) = x^3\sqrt{1 + x^2}$, en $[0, 1]$.

11. $f(x) = xe^x$, en $[1, 2]$.

12. $f(x) = x^2 e^{2x}$, en $[1, 2]$.

13. $f(x) = \ln^2 x$, en $[1, e]$.

14. $f(x) = x \operatorname{senh} x$, en $[0, 1]$.

15. $f(x) = x \cosh x$, en $[0, 1]$.

16. Calcule el volumen de un cono circular recto truncado, con radios $r = 1$ m y $r = 3$ m, y altura 5 m.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 16

EXAMEN TIPO (A)

1. Calcule el área de la figura limitada por el eje x, las gráficas de las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{-x}$, y las rectas $x = 0$ y $x = 1.5$.

2. Calcule el área de la figura limitada por la parábola $(y + 3)^2 = x + 9$ y el eje de las y.

3. Determine el área de la figura limitada por la parábola $y = (x + 2)^2$ y la recta $y = \frac{1}{2}x + 1$.

4. Determine el área de la figura limitada por la parábola $y^2 = x - 2$ y la recta $2y - x + 5 = 0$.

5. Halle el área comprendida entre las parábolas $y = 2x^2 - 5x - 4$ y $y = -x^2 + x + 5$.

6. Halle el área de la figura (en el primer cuadrante) limitada por las curvas $y = x^3$ y $y = \sqrt[3]{x}$.

7. Calcule el área de la figura comprendida entre el eje x, y las semiparábolas $y = \sqrt{x + 1}$ y $y = \sqrt{1 - x}$.

8. Determine el volumen del sólido que se obtiene al girar la parte positiva de la parábola $y = -x^2 + 4x - 3$ alrededor del eje x.

9. Determine el volumen del sólido que se obtiene al girar la figura limitada por las parábolas $y = x^2$ y $y^2 = x$, alrededor del eje x.

10. Calcule el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar la parte de la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}e^{-x^2}$ entre $x = 0$ y la recta vertical que pasa por su máximo local.

EXAMEN TIPO (B)

1. Calcule el área de la figura limitada por el eje x, las gráficas de las funciones $f(x) = \ln(x - 2)$ y $g(x) = \ln(x + 3)$, y las rectas $y = -1$ y $y = 1$.

2. Calcule el área de la figura limitada por la parábola $(y + 1)^2 = x + 4$ y el eje de las y.

3. Determine el área de la figura limitada por la gráfica de la función $y = x^2(x - 3)$ y el eje de las x. (Observe que en todo el intervalo considerado, la función es no positiva.)

4. Determine el área de la figura que se encuentra limitada por la gráfica de la función $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ y las rectas verticales que pasan por sus dos primeras raíces.

5. Halle el área de la figura (en el primer cuadrante) limitada por la curva $y = \dfrac{x}{1 + x^4}$, el eje x y la recta vertical que pasa por su punto de inflexión.

6. Halle el área de la figura limitada por las curvas $y = x^4$ y $y = \sqrt[4]{x}$.

7. Calcule el área de la figura comprendida entre el eje x, y las semiparábolas $y = \frac{1}{2}\sqrt{4x + 5}$ y $y = \sqrt{15 - 4x}$.

8. Determine el volumen del sólido que se obtiene al girar la parte negativa de la parábola $y = (x - 1)(x - 4)$ alrededor del eje x.

9. Determine el volumen del sólido que se obtiene al girar la figura limitada por las parábolas $y = x^3$ y $y^3 = x$, alrededor del eje x.

10. Calcule el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar la parte de la gráfica de la función $f(x) = 3\,\mathrm{sen}^2\,x$ entre $x = 0$ y $x = \pi$.

NOTA HISTÓRICA: LAPLACE.



Pierre Simon de Laplace (1749-1827) fue un famoso matemático y astrónomo teórico francés. Su fama fue tal que llegó a conocérsele como el Newton de Francia. Sus principales campos de interés fueron la Mecánica Celeste y la Teoría de Probabilidades. Laplace fue, naturalmente, profesor de las prestigiadas École Normale y École Polytechnique de París, pero no publicó sus lecciones, al contrario que Monge y Lagrange. A los 24 años ya se hallaba inmerso en la aplicación de la ley de la gravitación de Newton al sistema solar como un sistema en el que los planetas y sus satélites no están gobernados sólo por el Sol, sino que interaccionan entre sí de muy diversas formas. Laplace decidió buscar la seguridad en otras causas y logró probar que el sistema solar ideal matemático es un sistema dinámico estable que permanecerá en todo tiempo.

Éste fue tan sólo uno de la larga cadena de éxitos recogidos en su monumental tratado *Mécanique céleste*, que resumía las investigaciones en gravitación de varias generaciones de matemáticos ilustres. Desgraciadamente para su reputación posterior, omitió toda referencia a los descubrimientos de sus predecesores y contemporáneos, dejando entrever que las ideas eran suyas por completo. Su obra maestra fue el tratado *Théorie analytique des probabilités* (1812), en la que incorpora sus propios descubrimientos de los 40 años anteriores. En este libro también aparece la teoría de los mínimos cuadrados, inventada por Legendre, así como la famosa "Transformada de Laplace", que ha demostrado ser, hasta la fecha, una de las herramientas más últiles en el estudio de las ecuaciones diferenciales lineales. Fue miembro de la Academia Francesa en 1816 y de la Academia de Ciencias desde 1785. En compensación de sus defectos, Laplace se mostró siempre generoso en ayudar y animar a jóvenes científicos. Animaba en sus carreras a hombres como el químico Gay-Lussac, el naturalista Humboldt, el físico Poisson y de forma especialmente pertinente, al joven Cauchy, destinado a convertirse en uno de los artífices fundamentales de la Matemática del siglo XIX.

CAPÍTULO 17
TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN I

SUSTITUCIONES TRIGONOMÉTRICAS E INTEGRACIÓN POR PARTES

"Si prácticamente no hay rama del conocimiento humano donde no intervenga la Matemática, lo más probable es que esas intervenciones requieran del Cálculo Diferencial e Integral. Se trate del diseño de un puente o de un aparato electrónico; de la órbita de un satélite artificial o de predicciones económicas, el Cálculo es la herramienta matemática que facilita la solución del problema."

Bram de Swaan

Este capítulo y el siguiente los dedicaremos a estudiar algunas técnicas más especializadas para obtener antiderivadas de algunas funciones. Hasta este momento hemos "sobrevivido" usando solamente la integración inmediata, la idea de "completar la diferencial" con algunas sustituciones simples, así como algunas ideas sencillas en relación con el cálculo de integrales de funciones trigonométricas. Con ellas, hemos canalizado nuestros esfuerzos (en los últimos tres capítulos) a estudiar problemas de aplicaciones de las integrales. Sin embargo, en la práctica surgen también muchas otras funciones que requieren de técnicas específicas para calcular su integral indefinida. Supongamos, por ejemplo, que queremos determinar el área bajo la curva de la función $f(x) = \ln x$ entre $x = 1$ y $x = 2$. Sabemos que este problema equivale a calcular la integral $\int_1^2 \ln x dx$, y que, para este cálculo (según el Teorema Fundamental del Cálculo), debemos primeramente obtener la integral indefinida $\int \ln x dx$. Es decir, debemos obtener una función $g(x)$ tal que $g'(x) = \ln x$. El resultado de nuestro problema sería entonces $\int_1^2 \ln x dx = g(2) - g(1)$. Con lo que hemos estudiado hasta este momento en relación con el cálculo de integrales indefinidas, todavía no estamos en posibilidades de obtener la función $g(x)$ mencionada. En este capítulo estudiaremos la técnica llamada "integración por partes" que nos permitirá hacerlo. Con ella podremos calcular también integrales indefinidas como $\int \arctan x dx$, $\int x^2 e^x dx$, $\int x \operatorname{sen} x dx$, etcétera. Estudiaremos también otras técnicas que involucran sustituciones trigonométricas que nos permitirán obtener integrales indefinidas como $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$, $\int \sqrt{x^2 - 2} dx$, y algunas otras.

17.1 SUSTITUCIONES TRIGONOMÉTRICAS

El objetivo general que perseguimos es calcular integrales indefinidas $\int f(x)dx$ para "ciertas" funciones $f(x)$. La técnica de las sustituciones trigonométricas es una alternativa para cuando la función $f(x)$ del integrando presenta algunas características especiales (que veremos a continuación). Debemos tener siempre presente que para el cálculo de integrales indefinidas **no hay procedimientos estrictos establecidos.** Lo que haremos en estos dos capítulos será dar **recomendaciones generales** que nos puedan ayudar al cálculo de la integral cuando la función $f(x)$ permita la aplicación de la técnica en cuestión. Finalmente, estas recomendaciones (que son, en esencia, las técnicas de integración), junto con la intuición y el "buen juicio" del estudiante (que lo obtendrá después de mucha práctica), serán los ingredientes que lo conduzcan al cálculo de la integral.

Existen tres casos en los que podemos hacer uso de la técnica de la sustitución trigonométrica, que empezamos a estudiar a continuación.

CASO I

Si en el integrando $f(x)$ aparece una expresión del tipo $a^2 - x^2$, se recomienda hacer la sustitución $x = a \operatorname{sen} t$. En este caso se tiene:

$$a^2 - x^2 = a^2 - (a \operatorname{sen} t)^2 = a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 t = a^2(1 - \operatorname{sen}^2 t) = a^2 \cos^2 t$$

y

$$dx = (a \operatorname{sen} t)' dt = a \cos t dt.$$

Como ejemplo preliminar, calculemos la integral $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$. Cuando $a = 1$, la integral $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ es inmediata, pues sabemos que $\frac{d}{dx} \operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Es decir que, $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \operatorname{arcsen} x + c$. Sin embargo, si a es un número cualquiera, la integral $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$ la **podemos** (enfatizamos esta palabra, porque no es la única manera como se puede proceder para calcular tal integral) calcular siguiendo la recomendación de este primer caso de sustituciones trigonométricas. Puesto que en el integrando aparece $a^2 - x^2$, hacemos $x = a \operatorname{sen} t$, en cuyo caso $a^2 - x^2 = a^2 \cos^2 t$ y $dx = a \cos t dt$. Entonces:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx \overset{x=a \operatorname{sen} t}{=} \int \frac{1}{\sqrt{a^2 \cos^2 t}} a \cos t dt = \int \frac{1}{a \cos t} a \cos t dt = \int dt = t + c.$$

Debemos finalmente regresar a la variable original x. Puesto que la sustitución que hicimos fue $x = a \operatorname{sen} t$, obtenemos de aquí que $t = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a}$. Entonces:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + c.$$

Por razones de simplificación en los cálculos, en los subsiguientes ejemplos y ejercicios en los que llegue a aparecer la integral anterior, usaremos la expresión establecida directamente como una nueva "fórmula de integración".

EJEMPLO 17.1.1. Calcular la integral $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

SOLUCIÓN. Puesto que en el integrando aparece $1-x^2$, hacemos, siguiendo la recomendación del caso 1 anterior, $x = \operatorname{sen} t$. Con esta sustitución se tiene $1 - x^2 = \cos^2 t$ y $dx = \cos t dt$. Entonces:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx \overset{x=\operatorname{sen} t}{=\!=\!=} \int \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\sqrt{\cos^2 t}}\cos t dt = \int \operatorname{sen}^2 t dt = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int dt - \int \cos 2t dt\right] = \frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{2}\int \cos 2t(2dt)\right] = \frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right].$$

La integral ha quedado resuelta. Resta sólo regresar a la variable original x. Como $x = \operatorname{sen} t$, tenemos que $t = \operatorname{arcsen} x$. Observe que si sustituimos directamente $t = \operatorname{arcsen} x$ en el resultado anterior, aparecería un término del tipo $\operatorname{sen}(2 \operatorname{arcsen} x)$, el cual, sin bien es matemáticamente correcto, también es cierto que dejarlo así escrito representa una "falta de buen gusto matemático" (como si en algún resultado apareciera $\frac{2\sqrt{1+x^4}+2}{x+x\sqrt{1+x^4}}$: haciendo una pequeña simplificación podemos dejar este término escrito como $\frac{2}{x}$). Recurrimos entonces a la conocida identidad trigonométrica $\operatorname{sen} 2t = 2 \operatorname{sen} t \cos t$. En ella aparece $\operatorname{sen} t$, que es, según nuestra sustitución original, igual a x. Aparece también $\cos t$. Estamos en un pequeño problema trigonométrico (que aparecerá constantemente en la mayoría de los ejercicios en donde se emplee la técnica de sustitución trigonométrica): sabemos que $\operatorname{sen} t = x$ y queremos saber qué es $\cos t$. Es muy común recurrir al esquema de un triángulo rectángulo en el que señalamos el ángulo agudo t y hacemos que el seno de este ángulo sea x (¿cómo?: el seno de t es su cateto opuesto entre su hipotenusa; como este cociente debe ser x, ponemos en el cateto opuesto a x y en la hipotenusa a 1).

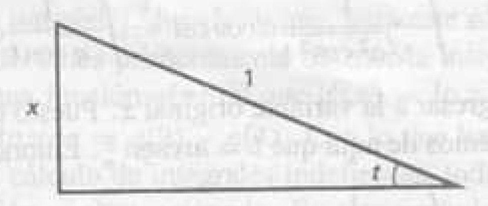


Figura 17.1.1. Triángulo rectángulo en el que el seno del ángulo t es x.

Usando el teorema de Pitágoras, podemos "completar" la información del triángulo anterior, escribiendo el cateto desconocido C como $C = \sqrt{1-x^2}$.

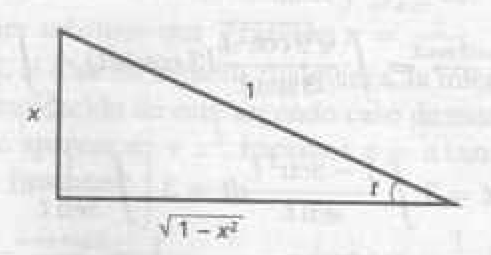


Figura 17.1.2. Con la ayuda del Teorema de Pitágoras se completa la información en el triángulo rectángulo en el que el seno del ángulo t es x.

Una vez con los dos catetos y la hipotenusa del triángulo rectángulo bien determinados, podemos obtener la función trigonométrica de t que nosotros queramos. En nuestro ejemplo necesitamos saber $\cos t$. De la figura 17.1.2, tenemos que:

$$\cos t = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1} = \sqrt{1-x^2}.$$

En conclusión, $\operatorname{sen} 2t$ se escribe como $\operatorname{sen} 2t = 2\operatorname{sen} t \cos t = 2x\sqrt{1-x^2}$, y así, la integral original se ve como:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right] = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arcsen} x - \frac{1}{2}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)\right]$$

o bien:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c.$$

Así pues, hemos obtenido que la función $g(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$ es tal que $g'(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

NOTA: (Sobre el manejo de las constantes de integración.) Sabemos que cuando se pide calcular una integral indefinida $\int f(x)dx$ debemos escribir el resultado con la antiderivada $g(x)$ que encontremos para $f(x)$, sumada con la constante arbitraria c (pues la integral $\int f(x)dx$ representa al conjunto de **todas** las antiderivadas de $f(x)$). Es común que en el cálculo de algunas integrales, tengamos que hacer varios cambios de variables o reacomodos del resultado obtenido. En tal caso, no nos debemos preocupar por estar escribiendo siempre la constante de integración en las etapas intermedias. Es suficiente que al final del resultado (cuando pensemos "así va a quedar ya") escribamos a éste con la constante c sumada.

EJEMPLO 17.1.2. Calcular la integral $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}dx$.

SOLUCIÓN. Puesto que en el integrando aparece $a^2 - x^2$, con $a = 3$, siguiendo la recomendación del caso 1 de las sustituciones trigonométricas que estamos estudiando, hacemos $x = 3\operatorname{sen} t$, sustitución de la cual se obtiene que $9 - x^2 = 9\cos^2 t$ y $dx = 3\cos t dt$. Entonces:

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}dx \overset{x=3\operatorname{sen}t}{=} \int \frac{\sqrt{9\cos^2 t}}{3\operatorname{sen}t}(3\cos t dt) = \int \frac{3\cos t}{3\operatorname{sen}t}(3\cos t dt)$$

$$= 3\int \frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen}t}dt = 3\int \frac{1-\operatorname{sen}^2 t}{\operatorname{sen}t}dt = 3\left[\int \frac{1}{\operatorname{sen}t}dt - \int \operatorname{sen}t dt\right]$$

$$= 3\left[\ln|\csc t - \cot t| + \cos t\right] + c.$$

La integral ha quedado resuelta. Para regresar a la variable original x, recordemos que la sustitución que hicimos fue $x = 3\operatorname{sen}t$, de donde $\operatorname{sen}t = \frac{x}{3}$. Consideramos entonces un triángulo rectángulo en el que el seno del ángulo t sea $\frac{x}{3}$ (por ejemplo, con cateto opuesto x e hipotenusa 3), y usamos el Teorema de Pitágoras para completar la información del cateto restante.

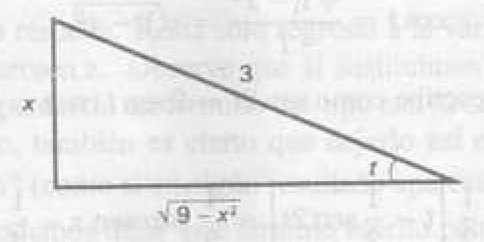


Figura 17.1.3. Triángulo rectángulo en el que el seno del ángulo t es $\frac{x}{3}$.

Del triángulo de la figura 17.1.3, se lee directamente que $\csc t = \frac{3}{x}$, $\cot t = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$ y $\cos t = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$. Entonces:

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}dx = 3\left[\ln|\csc t - \cot t| + \cos t\right] + c = 3\ln\left|\frac{3}{x} - \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}\right| + 3\frac{\sqrt{9-x^2}}{3} + c.$$

O bien:

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}dx = 3\ln\left|\frac{3-\sqrt{9-x^2}}{x}\right| + \sqrt{9-x^2} + c.$$

★

CASO II

Si en el integrando $f(x)$ aparece una expresión del tipo $a^2 + x^2$, se recomienda hacer la sustitución $x = a\tan t$. En este caso se tiene:

$$a^2 + x^2 = a^2 + (a\tan t)^2 = a^2 + a^2\tan^2 t = a^2(1+\tan^2 t) = a^2\sec^2 t$$

y

$$dx = (a\tan t)'dt = a\sec^2 t dt.$$

Como ejemplo preliminar, calculemos la integral $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx$. Cuando $a = 1$, la integral $\int \frac{1}{1+x^2}dx$ es inmediata, pues sabemos que $\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$. Es decir que, $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + c$. Sin embargo, si a es un número cualquiera, la integral $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx$ la podemos calcular siguiendo la recomendación de este segundo caso de sustituciones trigonométricas. Puesto que en el integrando aparece $a^2 + x^2$, hacemos $x = a\tan t$, en cuyo caso $a^2 + x^2 = a^2\sec^2 t$ y $dx = a\sec^2 t dt$. Entonces:

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx \overset{x=a\tan t}{=\!=\!=} \int \frac{1}{a^2\sec^2 t}a\sec^2 t dt = \frac{1}{a}\int dt = \frac{1}{a}t + c.$$

Regresando a la variable original x, tenemos: (puesto que la sustitución que hicimos fue $x = a\tan t$, obtenemos de aquí que $t = \arctan\frac{x}{a}$)

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c.$$

Por razones de simplificación en los cálculos, en los subsiguientes ejemplos y ejercicios en los que llegue a aparecer la integral anterior, usaremos la expresión establecida directamente como una nueva "fórmula de integración".

EJEMPLO 17.1.3. Calcular la integral $\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx$.

SOLUCIÓN. Puesto que en el integrando aparece el término a^2+x^2 (con $a = 1$), hacemos la sustitución $x = \tan t$. En tal caso se tiene $1 + x^2 = \sec^2 t$ y $dx = \sec^2 t dt$. Entonces:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx \overset{x=\tan t}{=\!=\!=} \int \frac{1}{\tan t\sqrt{\sec^2 t}}\sec^2 t dt = \int \frac{1}{(\tan t)(\sec t)}\sec^2 t dt$$

$$= \int \frac{\sec t}{\tan t}dt = \int \frac{\frac{1}{\cos t}}{\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}}dt = \int \frac{1}{\operatorname{sen} t}dt = \int \csc t dt = \ln|\csc t - \cot t| + c.$$

Para regresar a la variable original, consideramos un triángulo rectángulo cuyo ángulo t tenga por tangente a x (con cateto opuesto x y cateto adyacente 1), y completamos la información (la hipotenusa) con el Teorema de Pitágoras.

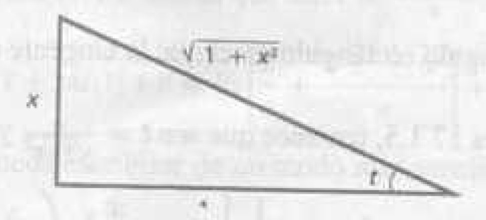


Figura 17.1.4. Triángulo rectángulo en el que la tangente del ángulo t es x.

Del triángulo de la figura 17.1.4, tenemos que $\csc t = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ y $\cot t = \frac{1}{x}$. Entonces:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx = \ln|\csc t - \cot t| + c = \ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{1}{x}\right| + c.$$

O bien:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx = \ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right| + c.$$

★

EJEMPLO 17.1.4. Calcular la integral $\int \frac{1}{(4+x^2)^2}dx$.

SOLUCIÓN. Puesto que en el integrando aparece el término a^2+x^2 (con $a=2$), hacemos la sustitución $x = 2\tan t$. En tal caso se tiene $4+x^2 = 4\sec^2 t$ y $dx = 2\sec^2 t dt$. Entonces:

$$\int \frac{1}{(4+x^2)^2}dx \overset{x=2\tan t}{=} \int \frac{1}{(4\sec^2 t)^2}(2\sec^2 t dt) = \int \frac{1}{16\sec^4 t}(2\sec^2 t dt)$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{1}{\sec^2 t}dt = \frac{1}{8}\int \cos^2 t dt = \frac{1}{8}\int \frac{1}{2}(1+\cos 2t)dt = \frac{1}{16}\left[\int dt + \int \cos 2t dt\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left[t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right] + c = \frac{1}{16}\left[t + \operatorname{sen} t\cos t\right] + c.$$

Para regresar a la variable original (recordando que la sustitución que hicimos fue $x = 2\tan t$, o bien $\tan t = \frac{x}{2}$, de donde $t = \arctan\frac{x}{2}$), consideramos un triángulo rectángulo cuyo ángulo t tenga por tangente a $\frac{x}{2}$ (con cateto opuesto x y cateto adyacente 2), y completamos la información (la hipotenusa) con el Teorema de Pitágoras.

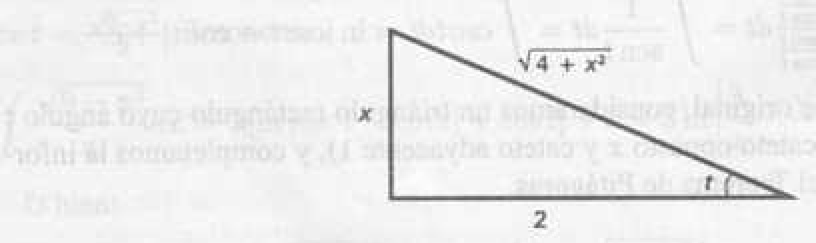


Figura 17.1.5. Triángulo rectángulo en el que la tangente del ángulo t es $\frac{x}{2}$.

Del triángulo de la figura 17.1.5, tenemos que $\operatorname{sen} t = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$ y $\cos t = \frac{2}{\sqrt{4+x^2}}$. Entonces:

$$\int \frac{1}{(4+x^2)^2}dx = \frac{1}{16}\left[t + \operatorname{sen} t\cos t\right] + c = \frac{1}{16}\left[\arctan\frac{x}{2} + \left(\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{4+x^2}}\right)\right] + c.$$

O bien:

$$\int \frac{1}{(4+x^2)^2}dx = \frac{1}{16}\arctan\frac{x}{2} + \frac{x}{8(4+x^2)} + c.$$

★

CASO III

Si en el integrando $f(x)$ aparece una expresión del tipo $x^2 - a^2$, se recomienda hacer la sustitución $x = a\sec t$. En este caso se tiene:

$$x^2 - a^2 = (a\sec t)^2 - a^2 = a^2\sec^2 t - a^2 = a^2(\sec^2 t - 1) = a^2\tan^2 t$$

y

$$dx = (a\sec t)'dt = a\sec t\tan t dt.$$

Como ejemplo preliminar, calculemos la integral $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$, siguiendo la recomendación de este tercer caso de sustituciones trigonométricas. Puesto que en el integrando aparece $x^2 - a^2$, hacemos $x = a\sec t$, en cuyo caso $x^2 - a^2 = a^2\tan^2 t$ y $dx = a\sec t\tan t dt$. Entonces:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx \overset{x=a\sec t}{=\!=\!\longrightarrow\!=} \int \frac{1}{\sqrt{a^2\tan^2 t}}a\sec t\tan t dt = \int \frac{1}{a\tan t}a\sec t\tan t dt$$

$$= \int \sec t dt = \ln|\sec t + \tan t| + c.$$

Regresando a la variable original x, consideramos un triángulo cuyo ángulo t tenga por secante a $\frac{x}{a}$ y completamos la información del triángulo con la ayuda del Teorema de Pitágoras:

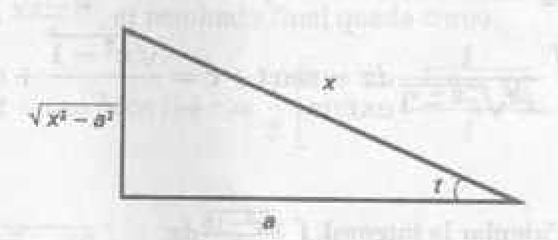


Figura 17.1.6. Triángulo rectángulo en el que la secante del ángulo t es $\frac{x}{a}$.

Del triángulo de la figura 17.1.6 vemos que $\tan t = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$. Entonces:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln|\sec t + \tan t| + c = \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + c = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + c.$$

El resultado anterior puede escribirse de un modo más sencillo como:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + c.$$

(¿Por qué?)

Veamos algunos ejemplos adicionales.

EJEMPLO 17.1.5. Calcular la integral $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$.

SOLUCIÓN. Puesto que en el integrando aparece el término $x^2 - a^2$ (con $a = 1$), hacemos la sustitución $x = \sec t$. En tal caso se tiene $x^2 - 1 = \tan^2 t$ y $dx = \sec t \tan t dt$. Entonces:

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx \overset{x=\sec t}{=\!=\!\longrightarrow\!=} \int \frac{1}{(\sec t)^2\sqrt{\tan^2 t}}(\sec t \tan t dt)$$

$$= \int \frac{1}{\sec^2 t \tan t}(\sec t \tan t dt) = \int \frac{1}{\sec t}dt = \int \cos t dt = \operatorname{sen} t + c.$$

Para regresar a la variable original, consideramos un triángulo rectángulo cuyo ángulo t tenga por secante a x (con cateto adyacente 1 e hipotenusa x), y completamos la información (el cateto restante) con el Teorema de Pitágoras.

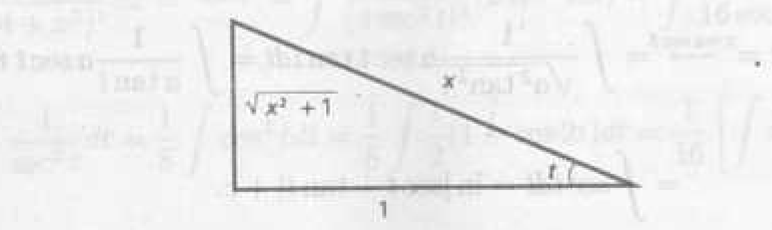


Figura 17.1.7. Triángulo rectángulo en el que la secante del ángulo t es x.

Del triángulo de la figura 17.1.7, tenemos que $\operatorname{sen} t = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$. Entonces:

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx = \operatorname{sen} t + c = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + c.$$

★

EJEMPLO 17.1.6. Calcular la integral $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^3}dx$.

SOLUCIÓN. Puesto que en el integrando aparece el término $x^2 - a^2$ (con $a = 4$), hacemos la sustitución $x = 4\sec t$. En tal caso se tiene $x^2 - 16 = 16\tan^2 t$ y $dx = 4\sec t \tan t dt$. Entonces:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^3}dx \overset{x=4\sec t}{=\!=\!\longrightarrow\!=} \int \frac{\sqrt{16\tan^2 t}}{(4\sec t)^3}(4\sec t \tan t dt) = \int \frac{4\tan t}{64\sec^3 t}(4\sec t \tan t dt)$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\tan^2 t}{\sec^2 t}dt = \frac{1}{4}\int \frac{\frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos^2 t}}dt = \frac{1}{4}\int \operatorname{sen}^2 t dt.$$

Sabemos que la integral $\int \operatorname{sen}^2 t dt$ se resuelve usando la sustitución $\operatorname{sen}^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$. Esto fue discutido en la sección 3 del capítulo 14 (integración de potencias pares de seno y/o coseno). Escribimos solamente el resultado de la integral:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^3}dx \overset{x=4\sec t}{=\!=\!\longrightarrow\!=} \frac{1}{4}\int \operatorname{sen}^2 t dt = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right]\right) + c$$

$$= \frac{1}{8}(t - \operatorname{sen} t \cos t) + c.$$

Para regresar a la variable original (recordando que hicimos $x = 4\sec t$, de donde $t = arcsec\frac{x}{4}$), consideramos un triángulo rectángulo cuyo ángulo t tenga por secante a $\frac{x}{4}$ (con cateto adyacente 4 e hipotenusa x), y completamos la información (el cateto restante) con el Teorema de Pitágoras.

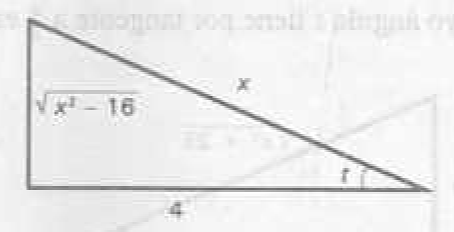


Figura 17.1.8. Triángulo rectángulo en el que la secante del ángulo t es $\frac{x}{4}$.

Del triángulo de la figura 17.1.8, tenemos que $\operatorname{sen} t = \frac{\sqrt{x^2-16}}{x}$ y $\cos t = \frac{4}{x}$. Observe que en lugar de escribir a t como $\operatorname{arcsec}\frac{x}{4}$, la podemos escribir como $\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{x^2-16}}{x}$, como $\arccos\frac{4}{x}$, o bien como $\arctan\frac{\sqrt{x^2-16}}{4}$ (es más común usar las primeras tres funciones trigonométricas inversas arcsen, arccos, arctan, que las tres últimas arccot, arcsec y arccsc). Entonces, usando que $t = \arctan\frac{\sqrt{x^2-16}}{4}$, el resultado final queda como:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^3}dx = \frac{1}{8}(t - \operatorname{sen} t\cos t) + c = \frac{1}{8}\left[\arctan\frac{\sqrt{x^2-16}}{4} - \left(\frac{\sqrt{x^2-16}}{x}\right)\left(\frac{4}{x}\right)\right] + c.$$

O sea:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^3}dx = \frac{1}{8}\arctan\frac{\sqrt{x^2-16}}{4} - \frac{\sqrt{x^2-16}}{2x^2} + c.$$

★

EJEMPLO 17.1.7. Calcule la integral $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+25}}dx$.

SOLUCIÓN. Haciendo $x = 5\tan t$, se obtiene $x^2 + 25 = 25\sec^2 t$ y $dx = 5\sec^2 t dt$, de modo que, sustituyendo queda:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+25}}dx \overset{x=5\tan t}{=} \int \frac{(5\tan t)^3}{\sqrt{25\sec^2 t}}(5\sec^2 t dt) = \int \frac{125\tan^3 t}{5\sec t}(5\sec^2 t dt)$$

$$= 125\int \tan^3 t \sec t dt = 125\int\left(\frac{\operatorname{sen}^3 t}{\cos^3 t}\right)\left(\frac{1}{\cos t}\right)dt = 125\int \frac{\operatorname{sen}^3 t}{\cos^4 t}dt$$

$$= 125\int \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^4 t}\operatorname{sen} t dt = 125\int \frac{1-\cos^2 t}{\cos^4 t}\operatorname{sen} t dt = -125\int \frac{1-\cos^2 t}{\cos^4 t}(-\operatorname{sen} t dt)$$

$$\overset{u=\cos t}{=\!=\!=} -125\int\frac{1-u^2}{u^4}du=-125\int\left(\frac{1}{u^4}-\frac{1}{u^2}\right)du=-125\int\left(u^{-4}-u^{-2}\right)du$$

$$=-125\left[\frac{u^{-3}}{-3}-\frac{u^{-1}}{-1}\right]+c=125\left[\frac{1}{3u^3}-\frac{1}{u}\right]+c=125\left[\frac{1}{3\cos^3 t}-\frac{1}{\cos t}\right]+c.$$

El triángulo rectángulo cuyo ángulo t tiene por tangente a $\frac{x}{5}$ es:

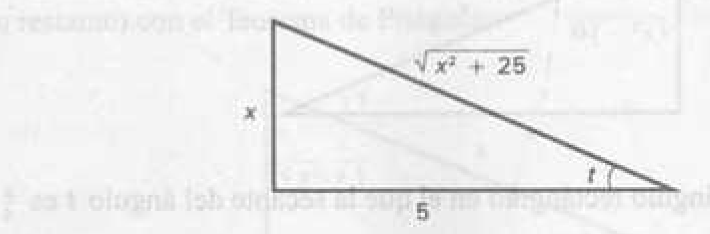


Figura 17.1.9. Triángulo para el ejemplo 17.1.7

Entonces $\cos t=\frac{5}{\sqrt{x^2+25}}$. Así, el resultado de la integral es:

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{x^2+25}}dx=125\left[\frac{1}{3\cos^3 t}-\frac{1}{\cos t}\right]+c=\frac{125}{3\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+25}}\right)^3}-\frac{125}{\frac{5}{\sqrt{x^2+25}}}+c$$

$$=\frac{1}{3}(x^2+25)^{\frac{3}{2}}-25(x^2+25)^{\frac{1}{2}}+c.$$

★

EJEMPLO 17.1.8. Calcule la integral $\int\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$.

SOLUCIÓN. Hacemos $x=\operatorname{sen} t$, en cuyo caso $1-x^2=\cos^2 t$ y $dx=\cos t dt$. Sustituyendo:

$$\int\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx\overset{x=\operatorname{sen} t}{=\!=\!=}\int\frac{1}{(\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}(\cos t dt)=\int\frac{1}{\cos^3 t}(\cos t dt)=\int\frac{1}{\cos^2 t}dt$$

$$=\int\sec^2 t dt=\tan t+c.$$

Como $\operatorname{sen} t=x$, nos apoyamos en el correspondiente triángulo rectángulo (con cateto opuesto a t siendo x e hipotenusa siendo 1), para obtener que $\tan t=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Entonces:

$$\int \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \tan t + c = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + c.$$

★

EJERCICIOS (17.1)

En los ejercicios 1 al 20, calcule la integral indicada.

1. $\int \frac{x}{1+x^2}dx.$
2. $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx.$
3. $\int \frac{x^3}{1+x^2}dx.$
4. $\int \frac{x^2}{(4+x^2)^2}dx.$
5. $\int \frac{(9+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x}dx.$
6. $\int \frac{(16+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2}dx.$
7. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx.$
8. $\int \frac{x^3}{1-x^2}dx.$
9. $\int \frac{5}{9-x^2}dx.$
10. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx.$
11. $\int \frac{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2}dx.$
12. $\int \frac{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}{x}dx.$
13. $\int (4-x^2)^{\frac{3}{2}}dx.$
14. $\int (x^2-4)^{\frac{3}{2}}dx.$
15. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx.$
16. $\int \frac{1}{\sqrt{7-x^2}}dx.$
17. $\int \frac{3-x^2}{\sqrt{25-x^2}}dx.$
18. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-25}}dx.$
19. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+25}}dx.$
20. $\int \frac{2-x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx.$

17.2 INTEGRACIÓN POR PARTES

La técnica de integración por partes consiste en "cambiar la integral dada $\int F(x)dx$ por resolver, por otra integral más sencilla". En general, esta técnica se usa cuando en el integrando se reconocen productos de una cierta función $u = f(x)$ por la derivada de otra función $v = g(x)$. En concreto, si tenemos dos funciones $u = f(x)$ y $v = g(x)$, sabemos que la diferencial del producto uv es (según se discutió en el capítulo 11):

$$d(uv) = udv + vdu$$

de donde podemos escribir:

$$udv = d(uv) - vdu.$$

Así, la integral indefinida de udv es la integral indefinida de $d(uv) - vdu$, la cual a su vez se descompone como una suma de dos integrales indefinidas, a saber:

$$\int udv = \int (d(uv) - vdu) = \int d(uv) - \int vdu.$$

Pero $\int d(uv) = \int (uv)'dx = uv$ (¿por qué?), por lo que la fórmula anterior toma el aspecto:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Esta fórmula es llamada **fórmula de integración por partes.** Se aplica, como decíamos, cuando en el integrando $F(x)$ de la integral $\int F(x)dx$ que queremos calcular, identificamos una función u multiplicada por una derivada de otra función v, o bien, cuando la expresión $F(x)dx$ la podemos identificar como udv, de tal modo que con tal identificación, la integral $\int vdu$ sea más simple de resolver que la integral original dada. La elección de las funciones u y v (llamadas **las partes de la integral**) depende de la habilidad que da la experiencia. Muchas veces esta elección será "inmediata de decidir", pero muchas otras veces habrá que ser cautelosos.

Veamos algunos ejercicios concretos en donde se pongan a funcionar las ideas mencionadas anteriormente. Comenzaremos por la integral de la función $F(x) = \ln x$ que comentábamos en la introducción del capítulo.

EJEMPLO 17.2.1. Calcular la integral $\int \ln xdx$.

SOLUCIÓN. Si queremos ver a la expresión $\ln xdx$ como udv para ciertas funciones u y v, no hay mucho de donde escoger: si en $\ln xdx$ debe haber una función u multiplicada por una diferencial dv, la elección más natural es $u = \ln x$ y $dv = dx$. Observe que a partir de u podemos obtener su diferencial du, así como a partir de dv podemos obtener la función v (en este último proceso habrá que hacer una pequeña integral, pues si dv es conocida, la función v es $v = \int dv$). Procederemos esquemáticamente como:

Se escogen las partes
↓

$$\begin{array}{lcll} u = \ln x & \longrightarrow & \text{se calcula } du \longrightarrow & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx & \longrightarrow & \text{se calcula } v \longrightarrow & v = x. \end{array}$$

Nos queda entonces un esquema "matricial" de dos líneas y dos columnas como el siguiente:

$u = \ln x$	$du = \dfrac{1}{x}dx$
$dv = dx$	$v = x$

Aplicando la fórmula de integración por partes obtenemos:

$$\int \ln x dx = \int u dv = uv - \int v du = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c.$$

Así pues:

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + c.$$

Es decir, es la función $g(x) = x \ln x - x$ la que habrá que derivar, para obtener como resultado a $g'(x) = \ln x$.

★

EJEMPLO 17.2.2. Calcular la integral $\int \arctan x dx$.

SOLUCIÓN. Escogiendo $u = \arctan x$ y $dv = dx$ (como en el ejemplo anterior, es la elección más natural) obtenemos:

$u = \arctan x$	$du = \dfrac{1}{1+x^2}dx$
$dv = dx$	$v = x$

de modo que:

$$\int \arctan x dx = \int u dv = uv - \int v du = x \arctan x - \int x \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{1+x^2} = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + c.$$

★

EJEMPLO 17.2.3. Calcular la integral $\int x \operatorname{arcsen} x dx$.

SOLUCIÓN. En este ejemplo ya se presentan diversas posibilidades para u y dv, como por ejemplo:

a) $u = x$, $dv = \operatorname{arcsen} x dx$.
b) $u = \operatorname{arcsen} x$, $dv = x dx$.
c) $u = x \operatorname{arcsen} x$, $dv = dx$.

En un principio, se deben explorar todas estas posibilidades y ver las ventajas y desventajas de cada una de ellas. Sin entrar mucho en detalles, observe que la primera opción no parece ser muy buena, porque si declaramos a dv como $\operatorname{arcsen} x dx$, para obtener de aquí la función v deberíamos resolver la integral $\int \operatorname{arcsen} x dx$, la cual nos llevaría a otro problema tan serio como el original. Dejamos que el estudiante se convenza de que la tercera opción tampoco es en absoluto afortunada. La correcta elección de las partes es la segunda. Escogiendo entonces $u = \operatorname{arcsen} x$ y $dv = x dx$ obtenemos:

$u = \operatorname{arcsen} x$	$du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
$dv = x dx$	$v = \frac{1}{2}x^2$

de modo que:

$$\int x \operatorname{arcsen} x dx = \int u dv = uv - \int v du = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arcsen} x - \int \left(\frac{1}{2}x^2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arcsen} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La integral que debemos resolver ahora es $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$, la cual, con la experiencia adquirida en la sección 1 de este capítulo, sabemos que podemos resolver con la sustitución $x = \operatorname{sen} t$. De hecho, es esta integral la que resolvimos en el ejemplo 17.1.1, obteniendo que:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arcsen} x - \frac{1}{2} x\sqrt{1-x^2} + c.$$

Entonces:

$$\int x \operatorname{arcsen} x dx = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arcsen} x - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} \operatorname{arcsen} x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\right] + c$$

o bien:

$$\int x \operatorname{arcsen} x dx = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arcsen} x - \frac{1}{4} \operatorname{arcsen} x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + c.$$

★

EJEMPLO 17.2.4. Calcular la integral $\int x^2 \ln x dx$.

SOLUCIÓN. Nuevamente se presentan diversas posibilidades para u y dv, como por ejemplo:
a) $u = x^2$, $dv = \ln x dx$.
b) $u = x^2 \ln x$, $dv = dx$.
c) $u = \ln x$, $dv = x^2 dx$.

Veamos cómo la tercera opción trabaja bien:

$u = \ln x$	$du = \frac{1}{x}dx$
$dv = x^2dx$	$v = \frac{1}{3}x^3$

de modo que:

$$\int x^2 \ln x dx = \int udv = uv - \int vdu = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \int \left(\frac{1}{3}x^3\right)\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int x^2dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x^3\right) + c = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + c.$$

Llegamos pues, sin mucha dificultad, al resultado $\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + c$.

Consideremos ahora la primera opción $u = x^2$, $dv = \ln x dx$. En principio, esta opción debería presentarse como desalentadora, pues para pasar de $dv = \ln x dx$ a $v = \int \ln x dx$ habría que resolver una integral por partes (que en este caso es la integral del primer ejemplo de esta sección). En general, un parámetro que debemos considerar al elegir las partes (más concretamente, al elegir dv), es que el paso de dv a v sea "sencillo". Aprovechemos, sin embargo, que en el ejemplo 1 hemos ya obtenido que $\int \ln x dx = x \ln x - x$, para explorar lo que puede suceder con esta elección de u y dv en la integral de este ejemplo. Nos queda:

$u = x^2$	$du = 2xdx$
$dv = \ln x dx$	$v = x \ln x - x$

Entonces:

$$\int x^2 \ln x dx = \int udv = uv - \int vdu = x^2(x \ln x - x) - \int (x \ln x - x)2xdx$$

$$= x^3 \ln x - x^3 - \int (2x^2 \ln x - 2x^2)dx = x^3 \ln x - x^3 - \int 2x^2 \ln x dx + \int 2x^2dx$$

$$= x^3 \ln x - x^3 - \int 2x^2 \ln x dx + \frac{2}{3}x^3 = x^3 \ln x - \frac{1}{3}x^3 - 2\int x^2 \ln x dx.$$

Hemos llegado a la expresión:

$$\int x^2 \ln x dx = x^3 \ln x - \frac{1}{3}x^3 - 2\int x^2 \ln x dx.$$

Al hacer esta elección de u y dv, en la nueva integral por resolver $\int vdu$ se produjo (después de algunas simplificaciones algebraicas) la integral original que queríamos resolver. Esto no es nada grave. De hecho, en la expresión anterior la integral $\int x^2 \ln x dx$ la podemos ver como "la incógnita" (¡eso es lo que andamos buscando!) y despejarla. Pasando a sumar al lado izquierdo el término $-2\int x^2 \ln x dx$ obtenemos:

$$\int x^2 \ln x dx + 2\int x^2 \ln x dx = x^3 \ln x - \frac{1}{3}x^3$$

o bien:

$$3\int x^2 \ln x dx = x^3 \ln x - \frac{1}{3}x^3$$

de donde:

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + c$$

como habíamos obtenido ya anteriormente.

Con la segunda opción de elección de u y dv, según la cual $u = x^2 \ln x$ y $dv = dx$ ocurre una situación análoga a la anterior. Sigámosla:

$u = x^2 \ln x$	$du = \left(x^2\left(\frac{1}{x}\right) + 2x\ln x\right)dx = (x + 2x\ln x)dx$
$dv = dx$	$v = x$

Entonces:

$$\int x^2 \ln x dx = \int u dv = uv - \int v du = x(x^2 \ln x) - \int x(x + 2x\ln x)dx$$

$$= x^3 \ln x - \int (x^2 + 2x^2 \ln x)\, dx = x^3 \ln x - \left(\int x^2 dx + \int 2x^2 \ln x dx\right)$$

$$= x^3 \ln x - \int x^2 dx - 2\int x^2 \ln x dx = x^3 \ln x - \frac{1}{3}x^3 - 2\int x^2 \ln x dx.$$

Hemos llegado a la expresión:

$$\int x^2 \ln x dx = x^3 \ln x - \frac{1}{3}x^3 - 2\int x^2 \ln x dx$$

de donde:

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + c$$

como en los dos casos anteriores.

La moraleja de este ejemplo es que diversas elecciones de u y dv al resolver una integral por partes, nos pueden conducir a la solución satisfactoria del problema, aunque algunas de esas elecciones implique más trabajo que las demás.

★

En algunos casos la técnica de integración por partes debe aplicarse repetidamente. Los siguientes ejemplos muestran casos de éstos.

EJEMPLO 17.2.5. Calcular la integral $\int x^2e^x dx$.
SOLUCIÓN. Escogemos $u = x^2$ y $dv = e^x dx$. Nos queda:

$u = x^2$	$du = 2xdx$
$dv = e^x dx$	$v = e^x$

Entonces:

$$\int x^2e^x dx = \int udv = uv - \int vdu = x^2e^x - \int 2xe^x dx = x^2e^x - 2\int xe^x dx.$$

La integral que se ha originado $\int xe^x dx$ también la resolvemos por partes, haciendo $u = x$ y $dv = e^x dx$. Nos queda:

$u = x$	$du = dx$
$dv = e^x dx$	$v = e^x$

Entonces:

$$\int xe^x dx = \int udv = uv - \int vdu = xe^x - \int e^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x.$$

La integral original queda entonces como:

$$\int x^2e^x dx = x^2e^x - 2\int xe^x dx = x^2e^x - 2\left[xe^x - e^x\right] + c = e^x(x^2 - 2x + 2) + c.$$

★

EJEMPLO 17.2.6. Calcular la integral $\int(3x^3 - 2x^2 + 4x + 2)e^{-x}dx$.
SOLUCIÓN. Escogemos $u = 3x^3 - 2x^2 + 4x + 2$ y $dv = e^{-x}dx$. Nos queda:

$u = 3x^3 - 2x^2 + 4x + 2$	$du = (9x^2 - 4x + 4)dx$
$dv = e^{-x}dx$	$v = -e^{-x}$

Entonces:

$$\int(3x^3 - 2x^2 + 4x + 2)e^{-x}dx = \int udv = uv - \int vdu$$

$$= -\left(3x^3 - 2x^2 + 4x + 2\right)e^{-x} + \int(9x^2 - 4x + 4)e^{-x}dx.$$

Tenemos pues que:

$$\int(3x^3 - 2x^2 + 4x + 2)e^{-x}dx$$

$$= -\left(3x^3 - 2x^2 + 4x + 2\right)e^{-x} + \int (9x^2 - 4x + 4)e^{-x}dx \qquad (1)$$

La integral de la última expresión la hacemos nuevamente por partes, tomando $u = 9x^2 - 4x + 4$ y $dv = e^{-x}dx$. Nos queda:

$u = 9x^2 - 4x + 4$	$du = (18x - 4)dx$
$dv = e^{-x}dx$	$v = -e^{-x}$

Entonces:

$$\int (9x^2 - 4x + 4)e^{-x}dx = \int udv = uv - \int vdu$$

$$= -\left(9x^2 - 4x + 4\right)e^{-x} + \int (18x - 4)e^{-x}dx.$$

Obtenemos entonces que:

$$\int (9x^2 - 4x + 4)e^{-x}dx = -\left(9x^2 - 4x + 4\right)e^{-x} + \int (18x - 4)e^{-x}dx \qquad (2)$$

Por último, esta integral la hacemos de nuevo por partes, tomando $u = 18x - 4$ y $dv = e^{-x}$, quedándonos:

$u = 18x - 4$	$du = 18dx$
$dv = e^{-x}dx$	$v = -e^{-x}$

de modo que:

$$\int (18x - 4)e^{-x}dx = -(18x - 4)e^{-x} + \int 18e^{-x}dx$$

$$= -(18x - 4)e^{-x} - 18e^{-x} = -18xe^{-x} - 14e^{-x}.$$

Comenzamos ahora a sustituir en reversa los resultados obtenidos. Primeramente sustituimos el valor de esta integral en la expresión (2):

$$\int (9x^2 - 4x + 4)e^{-x}dx = -\left(9x^2 - 4x + 4\right)e^{-x} + \int (18x - 4)e^{-x}dx$$

$$= -(9x^2 - 4x + 4)e^{-x} - 18xe^{-x} - 14e^{-x} = -9x^2e^{-x} - 14xe^{-x} - 18e^{-x}.$$

Finalmente, sustituimos esta integral en la expresión (1) de la integral original:

$$\int (3x^3 - 2x^2 + 4x + 2)e^{-x}dx$$

$$= -\left(3x^3 - 2x^2 + 4x + 2\right)e^{-x} + \int (9x^2 - 4x + 4)e^{-x}dx$$

$$= -\left(3x^3 - 2x^2 + 4x + 2\right)e^{-x} - 9x^2e^{-x} - 14xe^{-x} - 18e^{-x}$$

$$= -3x^3e^{-x} - 7x^2e^{-x} - 18xe^{-x} - 20e^{-x} = (-3x^3 - 7x^2 - 18x - 20)e^{-x}.$$

Así, la integral de nuestro ejemplo es:

$$\int (3x^3 - 2x^2 + 4x + 2)e^{-x}dx = -(3x^3 + 7x^2 + 18x + 20)e^{-x} + c.$$

★

EJEMPLO 17.2.7. Calcule la integral $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+25}}dx$ del ejemplo 17.1.7, usando integración por partes.

SOLUCIÓN. Escribamos la integral dada como:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+25}}dx = \int x^2\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+25}}dx\right)$$

y escojamos $u = x^2$ y $dv = \frac{x}{\sqrt{x^2+25}}dx$. Hemos dejado una x en el numerador para dv porque nuestra intención es que la función v la podamos obtener fácilmente:

$$v = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+25}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+25}}dx \overset{z=x^2+25}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{2}\int z^{-\frac{1}{2}}dz$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{z^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{z} = \sqrt{x^2+25}.$$

Tenemos entonces que:

$u = x^2$	$du = 2xdx$
$dv = \frac{x}{\sqrt{x^2+25}}dx$	$v = \sqrt{x^2+25}$

Entonces, aplicando la fórmula de integración por partes nos queda:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+25}}dx = \int udv = uv - \int vdu = x^2\sqrt{x^2+25} - \int \sqrt{x^2+25}(2xdx).$$

Si en la última integral identificamos a z como $x^2 + 25$, estaremos calculando la integral $\int \sqrt{z}dz$ la cual es:

$$\int \sqrt{z}dz = \frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(x^2+25)^{\frac{3}{2}}$$

de modo entonces que la integral original queda:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+25}}dx = x^2\sqrt{x^2+25} - \int \sqrt{x^2+25}(2xdx) = x^2(x^2+25)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}(x^2+25)^{\frac{3}{2}} + c.$$

Este resultado tiene una apariencia distinta al obtenido en el ejemplo 17.1.7. Sin embargo, puesto que (como obtuvimos en el ejemplo 17.1.7) la función $g_1(x) = \frac{1}{3}(x^2+25)^{\frac{3}{2}} - 25(x^2+25)^{\frac{1}{2}}$, y (como obtuvimos en este ejercicio), la función $g_2(x) = x^2(x^2+25)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}(x^2+25)^{\frac{3}{2}}$ tienen la misma derivada, a saber $g_1'(x) = g_2'(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^2+25}}$, se debe tener que la diferencia $g_1(x) - g_2(x)$ es una constante. Verifiquemos este hecho:

$$g_1(x) - g_2(x) = \frac{1}{3}(x^2+25)^{\frac{3}{2}} - 25(x^2+25)^{\frac{1}{2}} - x^2(x^2+25)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}(x^2+25)^{\frac{3}{2}}$$

$$= (x^2+25)^{\frac{3}{2}} - (x^2+25)^{\frac{1}{2}}(x^2+25) = (x^2+25)^{\frac{3}{2}} - (x^2+25)^{\frac{3}{2}} = 0.$$

Así, no solamente $g_1(x)$ y $g_2(x)$ difieren por una constante, sino que *son de hecho la misma función* (con apariencia distinta).

⋆

EJEMPLO 17.2.8. Calcule la integral $\int e^x \operatorname{sen} x dx$.

SOLUCIÓN. Hacemos integración por partes tomando $u = e^x$ y $dv = \operatorname{sen} x dx$. Entonces:

$u = e^x$	$du = e^x dx$
$dv = \operatorname{sen} x dx$	$v = -\cos x$

de modo que:

$$\int e^x \operatorname{sen} x dx = \int u dv = uv - \int v du = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx \quad (1)$$

La integral que debemos ahora resolver es muy parecida a la original: hacemos nuevamente integración por partes tomando $u = e^x$ y $dv = \cos x dx$:

$u = e^x$	$du = e^x dx$
$dv = \cos x dx$	$v = \operatorname{sen} x$

de modo que:

$$\int e^x \cos x dx = \int u dv = uv - \int v du = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x dx \quad (2)$$

Ha aparecido nuevamente la integral original. Aparentemente caímos en un círculo vicioso: el cálculo de $\int e^x \operatorname{sen} x dx$ nos condujo al cálculo de $\int e^x \cos x$, y este último nos llevó de regreso al cálculo de $\int e^x \operatorname{sen} x$. Sin embargo, si sustituimos la expresión (2) en la (1), nos queda:

$$\int e^x \operatorname{sen} x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x dx$$

de donde:

$$2\int e^x \operatorname{sen} x dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x$$

y obtenemos finalmente:

$$\int e^x \operatorname{sen} x dx = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) + c.$$

EJEMPLO 17.2.9. Calcule la integral $\int \operatorname{sen}(\ln x)dx$.

SOLUCIÓN. Hacemos integración por partes, tomando $u = \operatorname{sen}(\ln x)$ y $dv = dx$ (en este caso no hay ninguna otra opción para elegir las partes). Nos queda:

$u = \operatorname{sen}(\ln x)$	$du = (\cos(\ln x))\left(\frac{1}{x}dx\right)$
$dv = dx$	$v = x$

Entonces:

$$\int \operatorname{sen}(\ln x)dx = \int udv = uv - \int vdu = x\operatorname{sen}(\ln x) - \int x(\cos(\ln x))\left(\frac{1}{x}dx\right) dx$$

$$= x\operatorname{sen}(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx.$$

Se presenta una situación similar a la del ejercicio anterior: procedemos nuevamente integrando por partes la última integral, tomando $u = \cos(\ln x)$ y $dv = dx$

$u = \cos(\ln x)$	$du = (-\operatorname{sen}(\ln x))\left(\frac{1}{x}dx\right)$
$dv = dx$	$v = x$

por lo que:

$$\int \cos(\ln x)dx = \int udv = uv - \int vdu = x\cos(\ln x) + \int \operatorname{sen}(\ln x)dx.$$

Aparece de nuevo la integral original. Sustituimos esta última expresión en la que teníamos planteada para la integral $\int \operatorname{sen}(\ln x)dx$:

$$\int \operatorname{sen}(\ln x)dx = x\operatorname{sen}(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx$$

$$= x\operatorname{sen}(\ln x) - \left(x\cos(\ln x) + \int \operatorname{sen}(\ln x)dx\right)$$

$$= x\left(\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)\right) - \int \operatorname{sen}(\ln x)dx$$

de donde:

$$\int \operatorname{sen}(\ln x)dx = \frac{1}{2}x\left(\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)\right) + c.$$

★

EJEMPLO 17.2.10. Calcule la integral $\int \arctan \sqrt[3]{x}dx$.

SOLUCIÓN. Hacemos primeramente el cambio de variable $x = z^3$ para eliminar la raíz cúbica que aparece en la función del integrando. Como $dx = 3z^2dz$ nos queda:

$$\int \arctan \sqrt[3]{x}dx \overset{x=z^3}{=} \int \arctan z(3z^2dz) = 3\int z^2 \arctan z dz.$$

La integral obtenida la resolvemos por partes, tomando $u = \arctan z$ y $dv = z^2dz$. Nos queda:

$u = \arctan z$	$du = \frac{1}{1+z^2}dz$
$dv = z^2dz$	$v = \frac{1}{3}z^3$

Entonces:

$$\int z^2 \arctan z dz = \int udv = uv - \int vdu = \frac{1}{3}z^3 \arctan z - \frac{1}{3}\int \frac{z^3}{1+z^2}dz.$$

La integral resultante la podemos resolver usando la sustitución trigonométrica $z = \tan t$, quedándonos:

$$\int \frac{z^3}{1+z^2}dz \overset{z=\tan t}{=} \int \frac{\tan^3 t}{\sec^2 t}\sec^2 t dt = \int \tan^3 t dz = \int \frac{\operatorname{sen}^3 t}{\cos^3 t}dt$$

$$= \int \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^3 t}\operatorname{sen} t dt = -\int \frac{1-\cos^2 t}{\cos^3 t}(-\operatorname{sen} t dt) \overset{w=\cos t}{=} -\int \frac{1-w^2}{w^3}dw$$

$$= -\int \left(w^{-3} - w^{-1}\right)dw = \ln|w| + \frac{1}{2w^2} = \ln|\cos t| + \frac{1}{2\cos^2 t}.$$

Como $\tan t = z$, tenemos que $\cos t = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$ (¡haga el triángulo rectángulo correspondiente!) Entonces:

$$\int \frac{z^3}{1+z^2}dz$$

$$= \ln|\cos t| + \frac{1}{2\cos^2 t} = \ln\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} + \frac{1}{2\left(\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\right)^2} = \frac{1}{2}(1+z^2) - \ln\sqrt{1+z^2}.$$

Sustituyendo en la expresión en donde apareció la integral anterior, tenemos:

$$\int z^2 \arctan z dz = \frac{1}{3}z^3 \arctan z - \frac{1}{3}\int \frac{z^3}{1+z^2}dz$$

$$= \frac{1}{3}z^3 \arctan z - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}(1+z^2) - \ln\sqrt{1+z^2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(z^3 \arctan z + \ln\sqrt{1+z^2} - \frac{1}{2}(1+z^2)\right).$$

Finalmente, la integral que pedía el ejercicio por resolver es:

$$\int \arctan\sqrt[3]{x}dx = 3\int z^2 \arctan z dz = 3\left[\frac{1}{3}\left(z^3 \arctan z + \ln\sqrt{1+z^2} - \frac{1}{2}(1+z^2)\right)\right]$$

$$= z^3 \arctan z + \ln\sqrt{1+z^2} - \frac{1}{2}(1+z^2)$$

en donde $z = x^{\frac{1}{3}}$. Entonces:

$$\int \arctan\sqrt[3]{x}dx = x\arctan x^{\frac{1}{3}} + \ln\sqrt{1+x^{\frac{2}{3}}} - \frac{1}{2}(1+x^{\frac{2}{3}}) + c.$$

★

EJEMPLO 17.2.11. Calcule la integral $\int \sec^3 x dx$.
SOLUCIÓN. Escribamos la integral dada como:

$$\int \sec^3 x dx = \int \sec x(\sec^2 x dx)$$

y hagamos integración por partes tomando $u = \sec x$ y $dv = \sec^2 x$ (en cuyo caso $v = \int \sec^2 x dx = \tan x$). Nos queda entonces que:

$u = \sec x$	$du = \sec x \tan x dx$
$dv = \sec^2 x dx$	$v = \tan x$

Entonces:

$$\int \sec^3 x dx = \int u dv = uv - \int v du = \sec x \tan x - \int \tan x(\sec x \tan x)dx$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x dx = \sec x \tan x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)dx$$

$$= \sec x \tan x - \int (\sec^3 x - \sec x)\, dx = \sec x \tan x - \int \sec^3 x + \int \sec x dx$$

$$= \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| - \int \sec^3 x dx.$$

Como en el ejercicio anterior, despejamos la integral $\int \sec^3 x dx$ de la expresión que obtuvimos. Llegamos finalmente a:

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|) + c.$$

*

EJERCICIOS (17.2)

En cada uno de los ejercicios 1 al 25, resuelva la integral indicada, usando integración por partes.

1. $\int x \ln 2x dx.$ 2. $\int \ln^2 4x dx.$ 3. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx.$

4. $\int x^4 \ln 2x dx.$ 5. $\int \operatorname{sen}(2\ln x) dx.$ 6. $\int e^{-2x}\cos(4x)dx.$

7. $\int e^x \operatorname{sen}(3x)dx.$ 8. $\int x \operatorname{arcsen} 4x dx.$ 9. $\int x \arctan x dx.$

10. $\int (3x+1)\arctan 2x dx.$ 11. $\int \ln(2x+3)dx.$ 12. $\int xe^{4x}dx.$

13. $\int (3x+2)e^{-x}dx.$ 14. $\int (x^2+5x-1)e^x dx.$ 15. $\int x \operatorname{sen} 3x dx.$

16. $\int x^2 \cos 4x dx.$ 17. $\int (5x-2)\operatorname{senh} x dx.$ 18. $\int (3x+1)\cos 2x dx.$

19. $\int (x+3)\cosh 3x dx.$ 20. $\int (x^2+x+1)\operatorname{sen} x dx.$ 21. $\int x^2 \operatorname{arcsen} x dx.$

22. $\int \operatorname{arcsen}^2 x dx.$ **23.** $\int x \operatorname{sen}^2 3x dx.$ **24.** $\int \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) dx.$

25. $\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$

En los ejercicios 26 al 35, obtenga fórmulas generales para las integrales indicadas.

26. $\int e^{ax} \operatorname{sen} bx dx.$ **27.** $\int e^{ax} \cos bx dx.$ **28.** $\int (ax+b)e^{\alpha x} dx.$

29. $\int (ax^2+bx+c)e^{\alpha x} dx.$ **30.** $\int (ax+b) \ln \alpha x dx.$ **31.** $\int (ax^2+bx+c) \ln \alpha x dx.$

32. $\int (ax+b) \operatorname{sen} \alpha x dx.$ **33.** $\int (ax+b) \cos \alpha x dx.$ **34.** $\int (ax^2+bx+c) \operatorname{sen} \alpha x dx.$

35. $\int (ax^2+bx+c) \cos \alpha x dx.$

En los ejercicios 36 al 38, calcule la integral indicada.

36. $\int xe^x \operatorname{sen} x dx.$ **37.** $\int xe^x \cos x dx.$ **38.** $\int \sec^5 x dx.$

39. Escriba las fórmulas correspondientes a la integral $\int \sec^n x dx$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

40. Calcule $\int \sqrt{1+x^2} dx$, haciendo $x = \tan t$.

41. Calcule $\int (1+x^2)^{\frac{3}{2}} dx$, haciendo $x = \tan t$.

42. Use los resultados de los dos ejercicios anteriores para calcular $\int x^2\sqrt{1+x^2} dx$.

43. ¿Qué ocurre al intentar resolver por partes la integral $\int \frac{e^x}{x} dx$?

44. La integral $\int \frac{e^x}{x} dx$ no puede resolverse en términos de funciones elementales. Considere la integral $I = \int e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx$. Separe en dos integrales $I = I_1 + I_2$, y haga integración por partes en una de ellas (I_1 o I_2) para provocar que la integral que se obtiene de la fórmula de integración por partes, se anule con la otra integral (I_2 o I_1).

45. Use la idea del ejercicio anterior para calcular la integral $\int e^x \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) dx.$

Las integrales de los ejercicios 46 al 50 se resuelven usando integración por partes y "alguna idea adicional", como la comentada en el ejercicio 44. En ellos, usted podrá comprobar si ya domina esta técnica a buen nivel. (Advertencia: Son ejercicios difíciles... si no puede a la primera, descanse un rato y luego vuelva a intentar)

46. $\displaystyle\int \frac{(1+x^2)\cos x + (1+x+x^2)\operatorname{sen} x}{\sqrt{1+x^2}} e^x dx.$

47. $\displaystyle\int \frac{(x+1)(x^2+1)\ln(x^2+1) + 2x^2}{x^2+1} e^x dx.$

48. $\displaystyle\int \frac{2(x^2+x+1) + (2x^3+6x^2+5x+2)\ln x}{2\sqrt{x^2+x+1}} e^x dx.$

49. $\displaystyle\int \frac{(x^2+2)(x^2+3)\cos x + (x^4+3x^3+5x^2+8x+6)\operatorname{sen} x}{\sqrt{x^2+3}} e^x dx.$

50. $\displaystyle\int \left(\frac{(x^2+1)\ln(x^2+1) + 2x}{x^2+1} e^x \arctan x + \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1} e^x \right) dx.$

17.3 CASOS PARTICULARES: POLINOMIOS POR EXPONENCIALES, SENOS O COSENOS

Veamos lo sucedido en los ejemplos 17.2.5 y 17.2.6 de la sección anterior, en los que se mostraron casos en que la técnica de integración por partes se tenía que usar repetidamente.

1. Para resolver la integral $\int x^2 e^x dx$ (ejemplo 17.2.5) se necesitó la aplicación de la técnica de integración por partes 2 veces.
2. Para resolver la integral $\int (3x^3 - 2x^2 + 4x + 2)e^{-x} dx$ (ejemplo 17.2.6) se necesitó la aplicación de la técnica de integración por partes 3 veces.

Podríamos conjeturar que para resolver una integral del tipo $\int P_n(x)e^{\alpha x}dx$ en donde $P_n(x)$ es un polinomio de grado n en x, habrá que aplicar n veces la técnica de integración por partes. Esto es verdadero, pues cada vez que usemos tal técnica, tomando a u como el polinomio que multiplica a $dv = e^{\alpha x}dx$, se obtendrá una integral en la que el polinomio que multiplica a la exponencial es de un grado menor en una unidad al del paso anterior. Así, para quedarnos con una integral en la que esté involucrada solamente la exponencial $e^{\alpha x}$, debemos hacer n integraciones por partes.

Una manera de evitar este posible exceso de cálculos (y de sustituciones en reversa, como ocurrió en el ejemplo 17.2.6) es por medio de un método que expondremos a continuación, el cual, en lugar de demostrar su validez (que no es difícil de hacer), trataremos de mostrar sus bondades operativas.

Para calcular una integral del tipo $\int P_n(x)e^{\alpha x}dx$ en donde $P_n(x)$ es un polinomio de grado n, hacemos una tabla con dos columnas. La columna de la izquierda comienza con el polinomio $P_n(x)$ y la de la derecha con la exponencial $e^{\alpha x}$. Debajo del polinomio $P_n(x)$ empezamos a escribir (en cada línea) sus derivadas sucesivas $P_n'(x)$, $P_n''(x)$, etcétera, y debajo de la exponencial escribimos sus integrales sucesivas $\int e^{\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$, $\int \left(\int e^{\alpha x}dx\right) dx =$

$\int \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha^2}e^{\alpha x}$, etcétera. El resultado de la integral original lo obtenemos multiplicando de manera cruzada, la primera línea de la primera columna por la segunda línea de la segunda columna (esto con signo $+$), la segunda línea de la primera columna por la tercera línea de la segunda columna (esto con signo $-$), etcétera.

Esquemáticamente:

derivando $\downarrow$		$\downarrow$ *integrando*
$P_n(x)$		$e^{\alpha x}$
	$\searrow^{+}$	
$P_n'(x)$		$\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$
	$\searrow^{-}$	
$P_n''(x)$		$\frac{1}{\alpha^2}e^{\alpha x}$
$\vdots$		$\vdots$
$P_n^{(n)}(x)$		$\frac{1}{\alpha^n}e^{\alpha x}$
	$\searrow^{(-)^n}$	
0		$\frac{1}{\alpha^{n+1}}e^{\alpha x}$

O bien, más explícitamente:

Primera columna: derivadas sucesivas del polinomio	Se multiplican por...	**Segunda columna:** integrales sucesivas de la exponencial		Signo con el que aparece el producto en el resultado
$P_n(x)$		$e^{\alpha x}$		
	$\searrow$			
$P_n'(x)$		$\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$	$\rightarrow$	$(+)$
	$\searrow$			
$P_n''(x)$		$\frac{1}{\alpha^2}e^{\alpha x}$	$\rightarrow$	$(-)$
	$\searrow$			
$\vdots$		$\frac{1}{\alpha^3}e^{\alpha x}$	$\rightarrow$	$(+)$
$P_n^{(n)}(x)$		$\vdots$		
	$\searrow$			
0		$\frac{1}{\alpha^{n+1}}e^{\alpha x}$	$\rightarrow$	$(-)^n$

Siendo entonces el resultado:

$$\int P_n(x)e^{\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}P_n(x) - \frac{1}{\alpha^2}e^{\alpha x}P_n'(x) + \ldots + (-1)^n \frac{1}{\alpha^{n+1}}e^{\alpha x}P_n^{(n)}(x)$$

Veamos funcionar estas ideas con los ejemplos 17.2.5 y 17.2.6 que ya resolvimos de la manera tradicional.

EJEMPLO 17.3.1. Calcule la integral del ejemplo 17.2.5, $\int x^2e^x dx$.

SOLUCIÓN. Hacemos nuestro cuadro siguiendo las indicaciones descritas previamente al ejemplo:

x^2		e^x		
	↘			
$2x$		e^x	→	(+)
	↘			
2		e^x	→	(−)
	↘			
0		e^x	→	(+)

El resultado es entonces:

$$\int x^2e^x dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c = (x^2 - 2x + 2)e^x + c$$

como obtuvimos en el ejemplo 17.2.5.

★

EJEMPLO 17.3.2. Calcule la integral del ejemplo 17.2.6, $\int (3x^3 - 2x^2 + 4x + 2)e^{-x}dx$.

SOLUCIÓN. Hacemos nuestro cuadro siguiendo las indicaciones descritas previamente al ejemplo:

$3x^3 - 2x^2 + 4x + 2$		e^{-x}		
	$\searrow$			
$9x^2 - 4x + 4$		$-e^{-x}$	$\rightarrow$	$(+)$
	$\searrow$			
$18x - 4$		e^{-x}	$\rightarrow$	$(-)$
	$\searrow$			
18		$-e^{-x}$	$\rightarrow$	$(+)$
	$\searrow$			
0		e^{-x}	$\rightarrow$	$(-)$

El resultado es entonces:

$$\int (3x^3 - 2x^2 + 4x + 2)e^{-x}dx$$

$$= (3x^3 - 2x^2 + 4x + 2)(-e^{-x}) - (9x^2 - 4x + 4)e^{-x} + (18x - 4)(-e^{-x}) - 18e^{-x}$$

$$= -e^{-x}(3x^3 - 2x^2 + 4x + 2 + 9x^2 - 4x + 4 + 18x - 4 + 18)$$

$$= -e^{-x}(3x^3 + 7x^2 + 18x + 20) + c$$

como habíamos obtenido en el ejemplo 17.2.6.

★

EJEMPLO 17.3.3. Calcule la integral $\int (3x^5 - 2x^2 + 9x - 7)e^{2x}dx$.

SOLUCIÓN. Hacemos nuestro cuadro siguiendo las indicaciones descritas previamente al ejemplo:

$3x^5 - 2x^2 + 9x - 7$		e^{2x}		
	↘			
$15x^4 - 4x + 9$		$\frac{1}{2}e^{2x}$	→	(+)
	↘			
$60x^3 - 4$		$\frac{1}{4}e^{2x}$	→	(−)
	↘			
$180x^2$		$\frac{1}{8}e^{2x}$	→	(+)
	↘			
$360x$		$\frac{1}{16}e^{2x}$	→	(−)
	↘			
360		$\frac{1}{32}e^{2x}$	→	(+)
	↘			
0		$\frac{1}{64}e^{2x}$	→	(−)

El resultado es entonces:

$$\int (3x^5 - 2x^2 + 9x - 7)e^{2x}dx$$

$$= (3x^5 - 2x^2 + 9x - 7)\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) - (15x^4 - 4x + 9)\left(\frac{1}{4}e^{2x}\right) + (60x^3 - 4)\left(\frac{1}{8}e^{2x}\right) -$$

$$-180x^2\left(\frac{1}{16}e^{2x}\right) + 360x\left(\frac{1}{32}e^{2x}\right) - 360\left(\frac{1}{64}e^{2x}\right) =$$

$$= e^{2x}\left(\frac{3}{2}x^5 - x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{7}{2} - \frac{15}{4}x^4 + x - \frac{9}{4} + \frac{15}{2}x^3 - \frac{1}{2} - \frac{45}{4}x^2 + \frac{45}{4}x - \frac{45}{8}\right) + c$$

$$= e^{2x}\left(\frac{3}{2}x^5 - \frac{15}{4}x^4 + \frac{15}{2}x^3 - \frac{49}{4}x^2 + \frac{67}{4}x - \frac{95}{8}\right) + c.$$

Observe que la "técnica tradicional" de integración por partes repetida nos hubiera conducido a aplicar 5 veces esta técnica. Es claro que con este método hay un ahorro considerable de trabajo.

★

Las ideas anteriores ya analizadas se pueden aplicar también al caso de integrales del tipo $\int P_n(x) \operatorname{sen} \alpha x dx$ y $\int P_n(x) \cos \alpha x dx$, como se muestra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 17.3.4. Calcule la integral $\int (x^2+2) \operatorname{sen} x dx$.
SOLUCIÓN. Hacemos la tabla, con el polinomio x^2+2 a la izquierda.

x^2+2		$\operatorname{sen} x$		
	$\searrow$			
$2x$		$-\cos x$	$\rightarrow$	$(+)$
	$\searrow$			
2		$-\operatorname{sen} x$	$\rightarrow$	$(-)$
	$\searrow$			
0		$\cos x$	$\rightarrow$	$(+)$

El resultado es entonces:

$$\int (x^2+2) \operatorname{sen} x dx = (x^2+2)(-\cos x) - 2x(-\operatorname{sen} x) + 2\cos x + c$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + c.$$

$\star$

EJEMPLO 17.3.5. Calcule la integral $\int (x^3 - x^2 + 3x + 2) \cos 4x dx$.
SOLUCIÓN. Hacemos la tabla correspondiente:

$x^3 - x^2 + 3x + 2$		$\cos 4x$		
	$\searrow$			
$3x^2 - 2x + 3$		$\frac{1}{4} \operatorname{sen} 4x$	$\rightarrow$	$(+)$
	$\searrow$			
$6x - 2$		$-\frac{1}{16} \cos 4x$	$\rightarrow$	$(-)$
	$\searrow$			
6		$-\frac{1}{64} \operatorname{sen} 4x$	$\rightarrow$	$(+)$
	$\searrow$			
0		$\frac{1}{256} \cos 4x$	$\rightarrow$	$(-)$

El resultado es entonces:

$$\int (x^3 - x^2 + 3x + 2) \cos 4x dx$$

$$= (x^3 - x^2 + 3x + 2)\left(\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x\right) - (3x^2 - 2x + 3)\left(-\frac{1}{16}\cos 4x\right) +$$
$$+(6x-2)\left(-\frac{1}{64}\operatorname{sen} 4x\right) - 6\left(\frac{1}{256}\cos 4x\right) + c =$$

$$= (\operatorname{sen} 4x)\left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} - \frac{3}{32}x + \frac{1}{32}\right) +$$
$$+(\cos 4x)\left(\frac{3}{16}x^2 - \frac{1}{8}x + \frac{3}{16} - \frac{3}{128}\right) + c =$$

$$= \left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{21}{32}x + \frac{17}{32}\right)\operatorname{sen} 4x + \left(\frac{3}{16}x^2 - \frac{1}{8}x + \frac{21}{128}\right)\cos 4x + c.$$

★

EJEMPLO 17.3.6. Calcule la integral $\int(3x^2 + 2x + 5)\cos^2 2x dx$.

SOLUCIÓN. Es conveniente hacer una modificación al integrando con la identidad trigonométrica $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$. En nuestro caso se tiene $\cos^2 2x = \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)$ de modo que la integral a resolver se ve como:

$$\int(3x^2 + 2x + 5)\cos^2 2x dx = \int(3x^2 + 2x + 5)\left[\frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\int(3x^2 + 2x + 5)dx + \frac{1}{2}\int(3x^2 + 2x + 5)\cos 4x dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^3 + x^2 + 5x\right) + \frac{1}{2}\int(3x^2 + 2x + 5)\cos 4x dx.$$

La integral que aparece en esta última expresión la podemos resolver con las ideas estudiadas en la sección 3:

$3x^2 + 2x + 5$		$\cos 4x$		
	↘			
$6x + 2$		$\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x$	→	$(+)$
	↘			
6		$-\frac{1}{16}\cos 4x$	→	$(-)$
	↘			
0		$-\frac{1}{64}\operatorname{sen} x$	→	$(+)$

El resultado de la integral es entonces:

$$\int (3x^2 + 2x + 5) \cos 4x dx$$

$$= (3x^2 + 2x + 5) \left(\frac{1}{4} \operatorname{sen} 4x \right) - (6x + 2) \left(-\frac{1}{16} \cos 4x \right) + 6 \left(-\frac{1}{64} \operatorname{sen} 4x \right)$$

$$= \left(\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{4} - \frac{3}{32} \right) \operatorname{sen} 4x + \left(\frac{3}{8}x + \frac{1}{8} \right) \cos 4x$$

$$= \left(\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{37}{32} \right) \operatorname{sen} 4x + \left(\frac{3}{8}x + \frac{1}{8} \right) \cos 4x.$$

Entonces, la integral original queda como:

$$\int (3x^2 + 2x - 5) \cos^2 2x dx = \frac{1}{2} (x^3 + x^2 + 5x) + \frac{1}{2} \int (3x^2 + 2x + 5) \cos 4x dx$$

$$= \frac{1}{2} (x^3 + x^2 + 5x) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{37}{32} \right) \operatorname{sen} 4x + \left(\frac{3}{8}x + \frac{1}{8} \right) \cos 4x \right]$$

$$= \frac{1}{2}(x^3 + x^2 + 5x) + \frac{1}{64}(24x^2 + 16x + 37) \operatorname{sen} 4x + \frac{1}{16}(3x + 1) \cos 4x + c.$$

★

EJEMPLO 17.3.7. Calcule la integral $\int xe^{\sqrt[3]{x}}dx$.

SOLUCIÓN. Hacemos primeramente la sustitución $x = z^3$, con objeto de quitar la raiz cúbica que aparece en el integrando. Como en este caso se tiene $dx = 3z^2dz$, nos queda:

$$\int xe^{\sqrt[3]{x}}dx \overset{x=z^3}{=\!=\!=} \int z^3 e^{\sqrt[3]{z^3}}(3z^2dz) = 3 \int z^5 e^z dz.$$

La integral obtenida la podemos calcular con las ideas de la sección 3:

z^5		e^z		
	$\searrow$			
$5z^4$		e^z	$\rightarrow$	$(+)$
	$\searrow$			
$20z^3$		e^z	$\rightarrow$	$(-)$
	$\searrow$			
$60z^2$		e^z	$\rightarrow$	$(+)$
	$\searrow$			
$120z$		e^z	$\rightarrow$	$(-)$
	$\searrow$			
120		e^z	$\rightarrow$	$(+)$
	$\searrow$			
0		e^z	$\rightarrow$	$(-)$

Entonces:

$$\int z^5e^z dz = z^5e^z - 5z^4e^z + 20z^3e^z - 60z^2e^z + 120ze^z - 120e^z$$

$$= (z^5 - 5z^4 + 20z^3 - 60z^2 + 120z - 120)e^z.$$

Como $z = x^{\frac{1}{3}}$, la integral original queda como:

$$\int xe^{\sqrt[3]{x}} dx = 3\int z^5e^z dz = 3(z^5 - 5z^4 + 20z^3 - 60z^2 + 120z - 120)e^z$$

$$= 3\left(x^{\frac{5}{3}} - 5x^{\frac{4}{3}} + 20x - 60x^{\frac{2}{3}} + 120x^{\frac{1}{3}} - 120\right)e^{x^{\frac{1}{3}}} + c.$$

⋆

EJEMPLO 17.3.8. Calcule la integral $\int \frac{\ln^4 x}{x^3}dx$.
SOLUCIÓN. Escribamos la integral dada como:

$$\int \frac{\ln^4 x}{x^3}dx = \int \frac{\ln^4 x}{x^2}\left(\frac{dx}{x}\right).$$

Es conveniente entonces hacer primeramente el cambio de variable $z = \ln x$, con el cual $x = e^z$ y $dz = \frac{dx}{x}$ y entonces la integral dada se ve como:

$$\int \frac{\ln^4 x}{x^3}dx = \int \frac{\ln^4 x}{x^2}\left(\frac{dx}{x}\right) \overset{z=\ln x}{=\!=\!=} \int \frac{z^4}{e^{2z}}dz = \int z^4e^{-2z}dz.$$

La integral obtenida la resolvemos como en el ejercicio anterior:

z^4		e^{-2z}		
	$\searrow$			
$4z^3$		$-\frac{1}{2}e^{-2z}$	$\rightarrow$	$(+)$
	$\searrow$			
$12z^2$		$\frac{1}{4}e^{-2z}$	$\rightarrow$	$(-)$
	$\searrow$			
$24z$		$-\frac{1}{8}e^{-2z}$	$\rightarrow$	$(+)$
	$\searrow$			
24		$\frac{1}{16}e^{-2z}$	$\rightarrow$	$(-)$
	$\searrow$			
0		$-\frac{1}{32}e^{-2z}$	$\rightarrow$	$(+)$

Entonces:

$$\int \frac{\ln^4 x}{x^3}dx = \int z^4 e^{-2z}dz$$

$$= z^4\left(-\frac{1}{2}e^{-2z}\right) - 4z^3\left(\frac{1}{4}e^{-2z}\right) + 12z^2\left(-\frac{1}{8}e^{-2z}\right) - 24z\left(\frac{1}{16}e^{-2z}\right) + 24\left(-\frac{1}{32}e^{-2z}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}e^{-2z}\left(2z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 6z + 3\right).$$

Como $z = \ln x$ (y $x = e^z$), el resultado queda finalmente como:

$$\int \frac{\ln^4 x}{x^3}dx = -\frac{1}{4x^2}\left(2\ln^4 x + 4\ln^3 x + 6\ln^2 x + 6\ln x + 3\right) + c.$$

⋆

EJERCICIOS (17.3)

En los ejercicios 1 al 30, calcule la integral indicada.

1. $\int (3x^2 + 7x + 1)e^x dx.$ **2.** $\int (x^2 - 5x + 1)e^{-x} dx.$ **3.** $\int x^3 e^{2x} dx.$

4. $\int \frac{x^2+3x+4}{e^x}dx.$ 5. $\int \left(\frac{x+1}{e^x}\right)^2 dx.$ 6. $\int x^4e^{-2x}dx.$

7. $\int x^3e^{x-1}dx.$ 8. $\int (x-1)^3e^{x-1}dx.$ 9. $\int (x+1)^3e^{2x}dx.$

10. $\int (xe^{-x}+1)^2dx.$ 11. $\int (e^x+x)^2xdx.$ 12. $\int (xe^x+2)^2e^{-x}dx.$

13. $\int (e^x+x)^2xe^xdx.$ 14. $\int \frac{(x^2+2e^x)^3}{e^x}dx.$ 15. $\int x\operatorname{sen}(4x)dx.$

16. $\int (4x+3)\cos(3x)dx.$ 17. $\int x^2\cos(6x)dx.$ 18. $\int (x+1)^2\cos xdx.$

19. $\int (x+2)^3\operatorname{sen} xdx.$ 20. $\int x^2(\operatorname{sen} x+\cos x)dx.$ 21. $\int x^2\operatorname{senh} xdx.$

22. $\int (x^2+2x+5)(2\operatorname{sen} x+3\cos x)dx.$ 23. $\int (3x-1)^2(3\cos x-\operatorname{sen} x)dx.$

24. $\int x^2\operatorname{sen}^2 xdx.$ (Sugerencia: $\operatorname{sen}^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$.)

25. $\int (x\cos x)^2dx.$ 26. $\int (x^3+2x+1)\operatorname{sen}^2(3x)dx.$

27. $\int (x^2+3x+1)(\operatorname{sen}^2 x-2\cos^2 x)dx.$ 28. $\int (x+2)^2(\operatorname{sen} x+\cos x)^2dx.$

29. $\int (x^2+4x-2)(2\operatorname{senh} x+4\cosh x)dx.$ 30. $\int (x^3+x+1)(3\operatorname{sen} x+4\operatorname{senh} x)dx.$

En los ejercicios 31 al 40, haga primeramente un cambio de variable en la integral indicada, y luego resuelva usando integración por partes y/o la técnica resumida discutida en esta sección.

31. $\int e^{\sqrt{x}}dx.$ 32. $\int \operatorname{sen}\sqrt{x}dx.$ 33. $\int \cos\sqrt{x+3}dx.$

34. $\int x\cosh\sqrt{x+2}dx.$ 35. $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx.$ 36. $\int (3x+2)e^{\sqrt{x+1}}dx.$

37. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx.$ 38. $\int \operatorname{senh}\sqrt[3]{x}dx.$ 39. $\int (x+3)\arctan\sqrt{x}dx.$

40. $\int \sqrt{x+1}\operatorname{senh}\sqrt{x+1}dx.$

EXAMEN DEL CAPÍTULO 17

EXAMEN TIPO (A)

En los ejercicios 1 al 10, calcule la integral indicada usando los procedimientos estudiados en este capítulo.

1. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx.$ **2.** $\int \frac{1}{x^2\sqrt{16+x^2}}dx.$ **3.** $\int \frac{1}{(25x^2-16)^{\frac{3}{2}}}dx.$

4. $\int \frac{1}{(4-25x^2)^2}dx.$ **5.** $\int x^4 \ln x dx.$ **6.** $\int \ln(4+x^2)dx.$

7. $\int \cos(\ln x)dx.$ **8.** $\int e^{2x}\cos 3x dx.$ **9.** $\int (x+2)^3 \operatorname{sen}^2 3x dx.$

10. $\int x^3 \operatorname{senh} x dx.$

EXAMEN TIPO (B)

En los ejercicios 1 al 10, calcule la integral indicada usando los procedimientos estudiados en este capítulo.

1. $\int \frac{\sqrt{9+x^2}}{x^2}dx.$ **2.** $\int \frac{x+2}{x^2\sqrt{16+x^2}}dx.$ **3.** $\int \frac{x^2}{(25x^2-16)^{\frac{3}{2}}}dx.$

4. $\int \frac{x+1}{(4-25x^2)^2}dx.$ **5.** $\int x^2 \ln \sqrt{x} dx.$ **6.** $\int x^2 \ln(4+x^2)dx.$

7. $\int \cos^2(3+\ln x)dx.$ **8.** $\int (e^x+\cos x)^2 dx.$

9. $\int (x+2)^3(\operatorname{sen} 3x+\cos 3x)^2 dx.$

10. $\int (x^4+3x^3-2x^2+19x+2)\operatorname{senh} x dx$ (exprese su resultado en términos de polinomios por exponenciales).

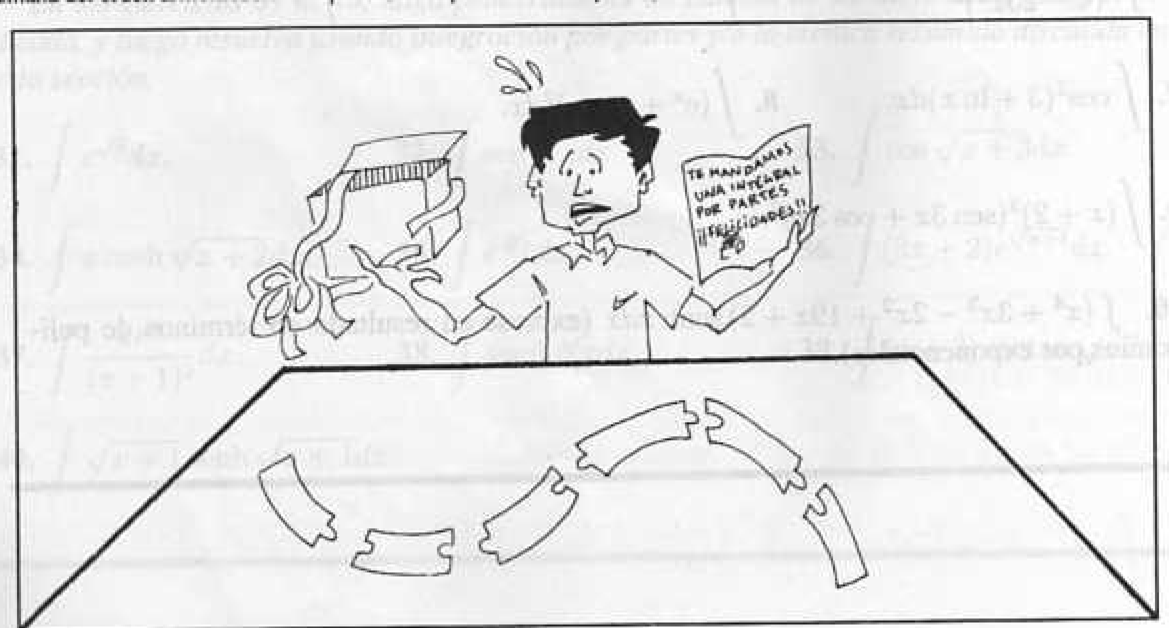
NOTA HISTÓRICA: POINCARÉ.



Jules Henri Poincaré (1854-1912) era considerado al comienzo del siglo XX como el más grande de los matemáticos de su generación. Inició su carrera académica en Caen en 1879, pero dos años más tarde fue nombrado profesor en la Sorbona, donde permaneció el resto de su vida, explicando una disciplina distinta cada año. En sus cursos, cuyas notas publicaron sus alumnos, trató con maestría y originalidad práctica la totalidad de los campos conocidos de la Matemática pura y aplicada, y muchos que él mismo inventó. En total produjo más de 30 libros técnicos sobre Física Matemática y Mecánica Celeste, media docena de libros de divulgación y casi 500 artículos de investigación en Matemática. Fue un pensador rápido, potente e infatigable, no inclinado a perderse en detalles, descrito por uno de sus contemporáneos como "un conquistador, no un colonizador". Disfrutaba de una memoria prodigiosa y habitualmente hacía sus matemáticas mentalmente, paseando de un lado a otro de su despacho, escribiendo las cosas una vez maduras en su cabeza. A la temprana edad de 32 años fue elegido miembro de la Academia de Ciencias.

El primer gran logro de Poincaré en Matemática se produjo en el campo del Análisis Matemático. Generalizó la noción de función periódica creando su teoría de Funciones Automorfas, las cuales aplicó a la resolución de ecuaciones diferenciales con coeficientes algebraicos y mostró cómo pueden utilizarse también para expresar las coordenadas de cualquier punto de una curva algebraica por medio de funciones unievaluadas $x(t)$ y $y(t)$ de un solo parámetro t. Una de las más impactantes contribuciones de Poincaré en el campo de la Física Matemática se encuentra en su famoso artículo sobre la dinámica del electrón, publicado en 1906. Otro punto focal de su pensamiento puede hallarse en sus investigaciones acerca de la mecánica celeste (*Les méthodes nouvelle de la mécanique céleste*, 1892-1899).

La siguiente reflexión de Poincaré deja ver esa manera tan especial con que los grandes científicos ven a su quehacer profesional: "Los científicos estudian la naturaleza no porque sea útil, sino porque encuentran placer en ello, y encuentran placer porque es hermosa. Si no lo fuera, no merecería la pena conocerla, y si la naturaleza no mereciera la pena, la vida tampoco. No me refiero, claro está, a la belleza que estimula los sentidos, la de las cualidades y la de las apariencias; no es que menosprecie tal belleza ... pero ésta nada tiene que ver con la ciencia; me refiero a esa hermosura más profunda que emana del orden armonioso de las partes, susceptible de ser captada por una inteligencia pura."



CAPÍTULO 18
TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN II

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

"El desarrollo del Cálculo infinitesimal durante el siglo XVII *hace pensar mucho más en el despliegue gradual e inevitable de una sinfonía en la cual el Zeitgeist, compositor y director de orquesta a la vez, marcaría el compás: cada uno ejecuta en ella su parte con su propio timbre, pero nadie es dueño de los temas que toca, temas que han sido entrelazados casi inextricablemente por un sabio contrapunto."*

N. Bourbaki

El objetivo de este capítulo es estudiar una importante técnica de integración con la cual se pueden calcular integrales del tipo $\int f(x)dx$ en donde $f(x)$ es una función racional (es decir, $f(x)$ es el cociente de dos funciones polinomiales). Algunos casos de éstos son muy simples y no requieren de explicación adicional alguna. Por ejemplo:

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + c$$

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$$

etcétera. Algunos otros también ya han sido estudiados previamente con recomendaciones específicas para abordarlos. Por ejemplo, para calcular la integral

$$\int \frac{1}{(4+x^2)^2}dx$$

se usa la técnica de sustitución trigonométrica ($x = \tan t$), como se vio en el ejemplo 17.1.4. Sin embargo, casos más generales como:

$$\int \frac{x^2}{x^4 - 3x^2 + 2} dx$$

o

$$\int \frac{x^5 + 3x + 7}{x^4 - 1} dx$$

no han sido aún discutidos. En este capítulo lo haremos.

18.1 FUNCIONES PROPIAS. FUNCIONES SIMPLES

Durante toda el capítulo estaremos refiriéndonos a una función racional $f(x)$ del tipo:

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0}. \qquad \text{(FR)}$$

Diremos que esta función racional es **propia** cuando $n < m$. En el caso contrario, cuando $n \geq m$, diremos que es **impropia**. Así, por ejemplo, las funciones racionales:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{3x^3 + 2x + 1} \text{ y } f(x) = \frac{2x + 4}{x^4 + 3x^3 + 2}$$

son propias, pues el grado del polinomio del numerador es menor que el grado del polinomio del denominador, mientras que las funciones racionales:

$$f(x) = \frac{4x^5 + 7x^3 + 3x + 2}{x^2 + x + 4} \text{ y } f(x) = \frac{2x^3 + 1}{x^3 + 7x + 9}$$

son impropias, pues el grado del polinomio del numerador es no menor que el grado del polinomio del denominador.

Un hecho algebraico que debemos tener presente desde este inicio del estudio de este capítulo es que:

Toda función racional impropia se puede presentar como la suma de una función polinomial más una función racional propia.

En efecto, si la función racional (FR) es impropia, es decir, si $n \geq m$, el algoritmo de la división de polinomios estudiado en el segundo curso de álgebra, nos dice que es posible hacer la división del polinomio del numerador entre el polinomio del denominador, y obtener como cociente un polinomio de grado $n - m$ (observe que éste es un número no negativo), que denotaremos como $C_{n-m}(x)$, y un residuo, el cual, como el algoritmo establece, debe ser un polinomio de grado menor que m, que denotaremos por $R_k(x)$, con $k < m$. Es decir, el algoritmo de la división de polinomios, aplicado al cociente $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, produce:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = C_{n-m}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)}.$$

Observe entonces que la función racional impropia $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ha quedado escrita como la suma del polinomio (o bien, de la función polinomial) $C_{n-m}(x)$ más la función racional $g(x) = \frac{R_k(x)}{Q_m(x)}$, la cual es propia, ya que $k < m$.

EJEMPLO 18.1.1. Escribir la función racional impropia $f(x) = \frac{x^5+3x^4+x^3+2x+4}{x^3+2x+3}$ como la suma de una función polinomial, más una función racional propia.

SOLUCIÓN. Realizando el algoritmo de la división en el cociente indicado en $f(x)$, se obtiene:

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & x^2 & +\ 3x & -\ 1 & & & \\
\hline
x^3+2x+3 & x^5 & +\ 3x^4 & +\ x^3 & + & +\ 2x & +\ 4 \\
 & -x^5 & - & -\ 2x^3 & -\ 3x^2 & & \\
\hline
 & & 3x^4 & -\ x^3 & -\ 3x^2 & +\ 2x & +\ 4 \\
 & & -3x^4 & - & -\ 6x^2 & -\ 9x & \\
\hline
 & & & -\ x^3 & -\ 9x^2 & -\ 7x & +\ 4 \\
 & & & +\ x^3 & + & +\ 2x & +\ 3 \\
\hline
 & & & & -\ 9x^2 & -\ 5x & +\ 7
\end{array}$$

de modo que:

$$f(x) = \frac{x^5+3x^4+x^3+2x+4}{x^3+2x+3} = x^2+3x-1+\frac{-9x^2-5x+7}{x^3+2x+3}.$$

Es decir, la función racional impropia dada $f(x)$ es la suma de la función polinomial $C_2(x) = x^2+3x-1$ más la función racional propia $g(x) = \frac{-9x^2-5x+7}{x^3+2x+3}$.

★

Supongamos que queremos calcular la integral de una función racional $f(x)$. Existen solamente dos posibilidades:

1. La función racional $f(x)$ dada (a integrar), es propia.
2. La función racional $f(x)$ es impropia.

Si ocurriera el caso (2), hemos visto que podemos escribir a $f(x)$ como la suma de una función polinomial más una función racional propia, de modo que, en este caso, la integral de $f(x)$ se escribiría como:

$$\int f(x)dx = \int \left(\begin{array}{c}\text{Función} \\ \text{polinomial}\end{array} + \begin{array}{c}\text{Función racional} \\ \text{propia}\end{array} \right) dx$$

$$= \int \begin{array}{c}\text{Función} \\ \text{polinomial}\end{array} dx + \int \begin{array}{c}\text{Función racional} \\ \text{propia}\end{array} dx.$$

La integral de una función polinomial no tiene problema alguno al calcularse. Vemos entonces que el problema, al integrar una función racional impropia, se reduce al problema de integrar una función racional propia. Así, hemos llegado a la siguiente importante conclusión.

El estudio de la integración de funciones racionales se reduce al estudio de la integración de funciones racionales propias.

Es decir, si sabemos cómo se integran las funciones racionales propias, sabremos cómo se integran **todas** las funciones racionales.

Dentro de las funciones racionales propias, existen algunas de especial importancia que llamaremos **funciones (racionales propias) simples,** o simplemente **funciones (o fracciones) simples.** Existen 4 tipos de ellas.

I. FUNCIONES SIMPLES DEL TIPO 1. Son funciones racionales en las que el numerador es un polinomio de grado cero (una constante) y el denominador es un polinomio de grado uno. Las denotaremos como $f_I(x)$. Éstas son entonces funciones del tipo:

$$f_I(x) = \frac{A}{x-a}$$

en donde A y a son constantes.

II. FUNCIONES SIMPLES DEL TIPO 2. Son funciones racionales en las que el numerador es un polinomio de grado cero (una constante) y el denominador es un polinomio de grado $k \geq 2$, que consiste en un solo factor $x - a$ (que llamaremos **factor lineal**) multiplicado k veces. Es decir, el denominador es de la forma $(x-a)^k$. Denotaremos a estas funciones como $f_{II}(x)$. Éstas son entonces funciones del tipo:

$$f_{II}(x) = \frac{A}{(x-a)^k}$$

en donde A y a son constantes, y $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$.

III. FUNCIONES SIMPLES DEL TIPO 3. Son funciones racionales en las que el numerador es un polinomio de grado no mayor que uno (es decir, es una función lineal o una constante) y el denominador es un polinomio de grado dos con raíces complejas. Es decir, el denominador es de la forma $x^2 + px + q$, en donde $p^2 - 4q < 0$, al cual llamaremos **factor cuadrático irreducible.** Del curso de álgebra sabemos que $p^2 - 4q$ es el llamado "discriminante" de la ecuación $x^2 + px + q = 0$, y que cuando éste es negativo, las raíces de la ecuación cuadrática son complejas. Denotaremos a estas funciones como $f_{III}(x)$. Éstas son entonces funciones del tipo:

$$f_{III}(x) = \frac{Ax+B}{x^2+px+q}$$

en donde A, B, p y q son constantes, y $p^2 - 4q < 0$.

IV. FUNCIONES SIMPLES DEL TIPO 4. Son funciones racionales en las que el numerador es un polinomio de grado no mayor que uno y el denominador consiste en un factor cuadrático irreducible elevado a una potencia entera $k \geq 2$. Denotaremos a estas funciones como $f_{IV}(x)$. Éstas son entonces funciones del tipo:

$$f_{IV}(x) = \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$$

en donde A, B, p y q son constantes, $p^2 - 4q < 0$ y $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$.

EJEMPLO 18.1.2. Diga cuáles de las siguientes funciones racionales propias son simples:

$$\text{a) } f(x) = \frac{5}{x+7} \qquad \text{d) } f(x) = \frac{2x+3}{x^2+1}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{3}{(x-1)^3} \qquad \text{e) } f(x) = \frac{5x+1}{x^2+3x+2}$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{2x+3}{x^2-1} \qquad \text{f) } f(x) = \frac{x+2}{(x^2+x+1)^3}.$$

SOLUCIÓN.

a) La función $f(x) = \frac{5}{x+7}$ es del tipo $f_I(x) = \frac{A}{x-a}$, con $A = 5$ y $a = -7$. Es decir, se trata de una función simple del tipo 1.

b) La función $f(x) = \frac{3}{(x-1)^3}$ es del tipo $f_{II}(x) = \frac{A}{(x-a)^k}$, con $A = 3$, $a = 1$ y $k = 3$. Es decir, se trata de una función simple del tipo 2.

c) La función $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-1}$ tiene un polinomio de grado uno en el numerador, y un polinomio de grado dos en el denominador. Parecería una función simple del tipo 3. Sin embargo, el polinomio cuadrático del denominador x^2-1 no tiene raíces complejas. Es decir, este polinomio no es un factor cuadrático irreducible, pues, viéndolo como x^2+px+q se tiene $p = 0$ y $q = -1$, de donde $p^2 - 4q = 4 > 0$ (y para que el factor x^2+px+q sea un factor cuadrático irreducible, debe tenerse $p^2 - 4q < 0$). Así pues, la función dada no es una función simple.

d) La función $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+1}$ tiene un polinomio de grado uno en el numerador, y el polinomio de grado dos x^2+1 en el denominador. En este caso el polinomio x^2+1 sí es un factor cuadrático irreducible. Es decir, se trata de una función simple del tipo 3, de la forma $f_{III}(x) = \frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, con $A = 2$, $B = 3$, $p = 0$ y $q = 1$, con $p^2 - 4q = -4 < 0$.

e) La función dada $f(x) = \frac{5x+1}{x^2+3x+2}$ tiene el aspecto de una función simple del tipo 3, $f(x) = \frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, con $A = 5$, $B = 1$, $p = 3$ y $q = 2$. Sin embargo, se tiene $p^2 - 4q = (3)^2 - 4(2) = 9 - 8 = 1 > 0$. *Es decir, el factor x^2+3x+2 no es un factor cuadrático irreducible. De hecho, observe que $x^2+3x+2 = (x+2)(x+1)$, de modo que las raíces* de tal factor son reales -1 y -2 (y para que fuera irreducible, no deberían ser reales). Así, la función dada no es simple.

f) La función $f(x) = \frac{x+2}{(x^2+x+1)^3}$ tiene la forma $f(x) = \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, con $A = 1$, $B = 2$, $p = 1$, $q = 1$, $k = 3$ y $p^2 - 4q = 1 - 4 = -3 < 0$. Así, la función dada es una función simple del tipo 4.

★

EJERCICIOS (18.1)

1. Verifique que la función racional $f(x) = \dfrac{7x-5}{x^2-x-2}$ es la suma de las dos funciones simples del tipo 1, $f_1(x) = \dfrac{3}{x-2}$ y $f_2(x) = \dfrac{4}{x+1}$.

2. ¿Es la suma de dos funciones simples una función simple?

3. ¿Es la suma de dos funciones racionales propias una función racional propia?

En los ejercicios 4 al 20, diga si la función racional dada es propia o no. En el caso de que lo sea, diga si es simple (y de qué tipo) o no. Si no es propia, escríbala como la suma de una función polinomial más una función racional propia.

4. $f(x) = \dfrac{2}{x}$. **5.** $f(x) = \dfrac{x}{2}$. **6.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$.

7. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-3x+5}$. **8.** $f(x) = \dfrac{x^3+x+1}{x-1}$. **9.** $f(x) = \dfrac{x^4+x^2+1}{x^5+x^3+x}$.

10. $f(x) = \dfrac{x^2+3x+2}{x^2-x-1}$. **11.** $f(x) = \dfrac{3x+1}{x^2+x+2}$. **12.** $f(x) = \dfrac{5}{x^2-9}$.

13. $f(x) = \dfrac{5}{(x-9)^2}$. **14.** $f(x) = \dfrac{2x+5}{(x^2-1)^3}$. **15.** $f(x) = \dfrac{3x+2}{(x^2+3x+8)^4}$.

16. $f(x) = \dfrac{2x+5}{(x^2+1)^3}$. **17.** $f(x) = \dfrac{\frac{1}{x}+\frac{4}{x-1}}{\frac{x^2+x+1}{x^6+1}}$. **18.** $f(x) = \dfrac{1+\frac{2}{3+\frac{1}{x}}}{x^2+3x+2}$.

19. $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2+x+2}{x^3+1}$. **20.** $f(x) = \dfrac{x^4+2x^2+x+1}{x^2+x+2}$.

18.2 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES SIMPLES

En esta sección estudiaremos cómo se obtienen las integrales de las funciones racionales propias simples. En la próxima sección veremos que para calcular la integral de *cualquier* función racional propia (y por lo tanto, de cualquier función racional), es suficiente con saber integrar las funciones propias simples.

18.2.1 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES SIMPLES DE LOS TIPOS 1 Y 2

Consideremos la función simple del tipo 1, $f(x) = \frac{A}{x-a}$. La integral de esta función se calcula fácilmente, identificando el denominador como una nueva variable u, obteniéndose que:

$$\int \frac{A}{x-a}dx \overset{u=x-a}{\longrightarrow} A\int \frac{1}{u}du = A\ln|u| + c = A\ln|x-a| + c.$$

También, en el caso de una función simple del tipo 2, $f(x) = \frac{A}{(x-a)^k}$, $k \geq 2$, tenemos:

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx \overset{u=x-a}{\longrightarrow} A\int \frac{1}{u^k}du = A\left(\frac{u^{-k+1}}{-k+1}\right) + c = \frac{A}{(1-k)u^{k-1}} + c.$$

Así pues, las integrales de funciones simples de los tipos 1 y 2 son muy fáciles de calcular. Veamos un ejemplo.

EJEMPLO 18.2.1. Calcular las integrales $\int \frac{4}{x+3}dx$ y $\int \frac{5}{(x-2)^4}dx$.

SOLUCIÓN. El cálculo es directo:

$$\int \frac{4}{x+3}dx = 4\ln|x+3| + c$$

y

$$\int \frac{5}{(x-2)^4}dx = 5\left(\frac{(x-2)^{-4+1}}{-4+1}\right) + c = -\frac{5}{3(x-2)^3} + c.$$

★

18.2.2 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES SIMPLES DEL TIPO 3

Consideremos la función simple del tipo 3, $f(x) = \frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ con $p^2 - 4q < 0$. La idea general para resolver esta integral tiene dos partes:

1. Aprovechar la x del numerador (en el caso en que $A \neq 0$) para completar la derivada del denominador (que es $2x+p$), con trucos como multiplicar y dividir por la misma constante no nula, o sumar y restar una constante.
2. Escribir el trinomio del denominador como un binomio al cuadrado más alguna constante (la cual será positiva, como veremos más adelante).

Al dividir la integral como suma de las partes correspondientes a los pasos anteriores, se obtendrá, de la parte (1), un logaritmo natural (del denominador), y, de la parte (2), un arco tangente.

A continuación mostramos los pasos generales a seguir.

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = A\int \frac{x+\frac{B}{A}}{x^2+px+q}dx$$ Sacamos la constante A del numerador (cuando $A \neq 0$)

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+\frac{2B}{A}}{x^2+px+q}dx$$ Multiplicamos por 2 y dividimos entre 2 para obtener un $2x$ en el numerador

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p+\frac{2B}{A}-p}{x^2+px+q}dx$$ Sumamos y restamos p en el numerador para obtener $2x+p$ que es la derivada del denominador

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \frac{2B-Ap}{2}\int \frac{1}{x^2+px+q}dx$$ Separamos en dos integrales

$$= \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + K\int \frac{1}{x^2+px+q}dx$$ Resolvemos la primera integral, y llamamos $K = \dfrac{2B-Ap}{2}$

Tenemos entonces resuelta ya una parte de la integral. Nos debemos de ocupar de $\int \frac{1}{x^2+px+q}dx$. Los pasos son:

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}dx = \int \frac{1}{x^2+px+\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4}}dx$$ Sumamos y restamos $\dfrac{p^2}{4}$ para completar el binomio $\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2$

$$= \int \frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}}dx$$ Escribimos el binomio al cuadrado completado en el paso anterior

$$= \int \frac{1}{u^2+a^2}du$$ Llame $u = x+\dfrac{p}{2}$ y $a^2 = \dfrac{4q-p^2}{4}$, la cual es una constante POSITIVA

$$= \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a}$$ Fórmula de integración obtenida en el capítulo 17

$$= \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\left(x+\frac{p}{2}\right)\right)$$ Sustitución

Así pues, la integral original queda como:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c.$$

La fórmula anterior no es para aprenderse ni para usarse. Simplemente la mostramos como fruto del procedimiento anteriormente descrito para resolver la integral de una función racional simple del tipo 3. Este procedimiento es el que sí debemos recordar y aprender.

EJEMPLO 18.2.2. Calcular la integral $\int \frac{3x+6}{x^2+2x+2}dx$.

SOLUCIÓN. La función a integrar $f(x) = \frac{3x+6}{x^2+2x+2}$ es efectivamente una función racional simple del tipo 3, pues el polinomio cuadrático del denominador x^2+2x+2, en el cual $p=2$ y $q=2$, es tal que $p^2-4q=(2)^2-4(2)=4-8=-4<0$. Sigamos entonces los pasos del procedimiento descrito anteriormente para resolver esta integral:

$$\int \frac{3x+6}{x^2+2x+2}dx = 3\int \frac{x+2}{x^2+2x+2}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+2x+2}dx$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+2+2}{x^2+2x+2}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx + \frac{3}{2}\int \frac{2}{x^2+2x+2}dx$$

$$= \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+2) + 3\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx = \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+2) + 3\int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx$$

$$= \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+2) + 3\arctan(x+1) + c.$$

⋆

EJEMPLO 18.2.3. Calcular la integral $\int \frac{4x+7}{x^2+3x+5}dx$.

SOLUCIÓN. La función $f(x) = \frac{4x+7}{x^2+3x+5}$ es efectivamente una función racional simple del tipo 3, pues el polinomio cuadrático del denominador x^2+3x+5, en el cual $p=3$ y $q=5$, es tal que $p^2-4q=(3)^2-4(5)=9-20=-11<0$. Sigamos entonces los pasos del procedimiento descrito anteriormente para resolver esta integral:

$$\int \frac{4x+7}{x^2+3x+5}dx = 4\int \frac{x+\frac{7}{4}}{x^2+3x+5}dx = \frac{4}{2}\int \frac{2x+2\left(\frac{7}{4}\right)}{x^2+3x+5}dx$$

$$= 2\int \frac{2x+3+\frac{7}{2}-3}{x^2+3x+5}dx = 2\int \frac{2x+3}{x^2+3x+5}dx + 2\int \frac{\frac{1}{2}}{x^2+3x+5}dx$$

$$= 2\ln(x^2+3x+5) + \int \frac{1}{x^2+3x+5}dx = 2\ln(x^2+3x+5) + \int \frac{1}{x^2+3x+\frac{9}{4}+5-\frac{9}{4}}dx$$

$$= 2\ln(x^2+3x+5) + \int \frac{1}{(x+\frac{3}{2})^2+\frac{11}{4}}dx = 2\ln(x^2+3x+5) + \frac{1}{\sqrt{\frac{11}{4}}}\arctan\frac{x+\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{11}{4}}} + c$$

$$= 2\ln(x^2+3x+5) + \frac{2\sqrt{11}}{11}\arctan\frac{(2x+3)\sqrt{11}}{11} + c.$$

*

18.2.3 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES SIMPLES DEL TIPO 4

Las integrales de funciones racionales simples del tipo 4, $f(x) = \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, con discriminante $p^2 - 4q < 0$ y $k \geq 2$, involucran, en general, procedimientos complicados. En un primer curso de Cálculo no se insiste mucho sobre este aspecto. La recomendación de carácter general para abordar el problema de integrar una función simple del tipo 4, es seguir la idea de completar la derivada del trinomio $x^2 + px + q$ (aprovechando la x del numerador) con los mismos trucos usados en el caso de la integración de una función simple del tipo 3, y, en la integral restante, después de completar el trinomio, proceder a hacer sustitución trigonométrica.

Aunque no expondremos un procedimiento general, veremos un par de ejemplos típicos que muestran los pasos a seguir en este tipo de situaciones.

EJEMPLO 18.2.4. Calcular la integral $\int \frac{3x+1}{(x^2+4)^2}dx$.

SOLUCIÓN. La función $f(x) = \frac{3x+1}{(x^2+4)^2}$ es efectivamente una función racional simple del tipo 4 (del tipo $f(x) = \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$), pues el polinomio cuadrático del denominador x^2+4, en el cual $p = 0$ y $q = 4$, es tal que $p^2 - 4q = (0)^2 - 4(4) = -16 < 0$, y $k \geq 2$. Los pasos comentados anteriormente para resolver esta integral se ven como:

$$\int \frac{3x+1}{(x^2+4)^2}dx = 3\int \frac{x+\frac{1}{3}}{(x^2+4)^2}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+2\left(\frac{1}{3}\right)}{(x^2+4)^2}dx$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+\frac{2}{3}}{(x^2+4)^2}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{(x^2+4)^2}dx + \int \frac{1}{(x^2+4)^2}dx.$$

La primera de las dos integrales que aparecen en esta última expresión es fácil de resolver, haciendo $u = x^2 + 4$, pues queda de la forma $\int \frac{1}{u^2}du$, y es igual entonces a $-\frac{1}{u}$ (¿por qué?) Así nuestro resultado se ve, en esta etapa, como:

$$\int \frac{3x+1}{(x^2+4)^2}dx = -\frac{3}{2(x^2+4)} + \int \frac{1}{(x^2+4)^2}dx.$$

Para resolver la integral que queda, procedemos con la sustitución trigonométrica $x = 2\tan t$, en cuyo caso $x^2 + 4 = 4\sec^2 t$ y $dx = 2\sec^2 t dt$. La solución de esta integral se ve entonces como:

$$\int \frac{1}{(x^2+4)^2}dx \overset{x=2\tan t}{=} \int \frac{1}{(4\sec^2 t)^2}(2\sec^2 t dt) = \frac{1}{8}\int \frac{1}{\sec^2 t}dt = \frac{1}{8}\int \cos^2 t dt$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{1}{2}(1+\cos 2t)dt = \frac{1}{16}\left(t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right) = \frac{1}{16}(t + \operatorname{sen} t\cos t)$$

$$= \frac{1}{16}\left(\arctan\frac{x}{2} + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{x^2+4}}\right)\right) = \frac{1}{16}\left(\arctan\frac{x}{2} + \frac{2x}{x^2+4}\right).$$

Entonces la integral original queda como:

$$\int \frac{3x+1}{(x^2+4)^2}dx = -\frac{3}{2(x^2+4)} + \int \frac{1}{(x^2+4)^2}dx$$

$$= -\frac{3}{2(x^2+4)} + \frac{1}{16}\left(\arctan\frac{x}{2} + \frac{2x}{x^2+4}\right) = -\frac{3}{2(x^2+4)} + \frac{1}{16}\arctan\frac{x}{2} + \frac{x}{8(x^2+4)} + c$$

$$= \frac{x-12}{8(x^2+4)} + \frac{1}{16}\arctan\frac{x}{2} + c.$$

★

El siguiente ejemplo muestra un caso más complicado, pero que se resuelve con las mismas ideas.

EJEMPLO 18.2.5. Calcular la integral $\int \frac{x+5}{(x^2+4x+5)^3}dx$.

SOLUCIÓN. Se verifica fácilmente que la función $f(x) = \frac{x+5}{(x^2+4x+5)^3}$ es efectivamente una función racional simple del tipo 4. La solución de la integral requerida en el ejemplo, se obtiene siguiendo las misma ideas del ejemplo anterior:

$$\int \frac{x+5}{(x^2+4x+5)^3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+10}{(x^2+4x+5)^3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4+6}{(x^2+4x+5)^3}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{(x^2+4x+5)^3}dx + 3\int \frac{1}{(x^2+4x+5)^3}dx.$$

La primera de las dos integrales que aparecen en esta última expresión es fácil de resolver, haciendo $u = x^2+4x+5$, pues queda de la forma $\int \frac{1}{u^3}du$, y es igual entonces a $-\frac{1}{2u^2}$ (¿por qué?) Así nuestro resultado se ve, en esta etapa, como:

$$\int \frac{x+5}{(x^2+4x+5)^3}dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2(x^2+4x+5)^2}\right) + 3\int \frac{1}{(x^2+4x+5)^3}dx$$

$$= -\frac{1}{4(x^2+4x+5)^2} + 3\int \frac{1}{(x^2+4x+5)^3}dx.$$

Para resolver la integral que queda, completamos primeramente el trinomio para que aparezca un binomio al cuadrado, y luego procedemos con sustitución trigonométrica. La solución de esta última integral se ve entonces como:

$$\int \frac{1}{(x^2+4x+5)^3}dx = \int \frac{1}{((x+2)^2+1)^3}dx \overset{z=x+2}{=} \int \frac{1}{(z^2+1)^3}dz \overset{z=\tan t}{=}$$

$$= \int \frac{1}{(\sec^2 t)^3}\sec^2 t dt = \int \cos^4 t dt = \int \left(\frac{1}{2}(1+\cos 2t)\right)^2 dt$$

$$= \int \frac{1}{4}\left(1+2\cos 2t+\cos^2 2t\right) dt = \frac{1}{4}\left(\int dt + 2\int \cos 2t dt + \int \cos^2 2t dt\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(t+\operatorname{sen} 2t + \int \frac{1}{2}(1+\cos 4t)dt\right) = \frac{1}{4}\left(t+2\operatorname{sen} t\cos t + \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4t\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4}t+\frac{1}{2}\operatorname{sen} t\cos t+\frac{1}{8}t+\frac{1}{32}\operatorname{sen} 4t = \frac{3}{8}t+\frac{1}{2}\operatorname{sen} t\cos t+\frac{1}{32}(2\operatorname{sen} 2t\cos 2t)$$

$$= \frac{3}{8}t+\frac{1}{2}\operatorname{sen} t\cos t+\frac{1}{16}(2\operatorname{sen} t\cos t)(\cos^2 t-\operatorname{sen}^2 t)$$

$$= \frac{3}{8}t+\frac{1}{2}\operatorname{sen} t\cos t+\frac{1}{8}\operatorname{sen} t\cos t(\cos^2 t-\operatorname{sen}^2 t)$$

$$= \frac{3}{8}\arctan z+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{z^2+1}}\right)+$$

$$+\frac{1}{8}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{z^2+1}}\right)\left(\frac{1}{z^2+1}-\frac{z^2}{z^2+1}\right)=$$

$$= \frac{3}{8}\arctan z+\frac{z}{2(z^2+1)}+\frac{1}{8}\left(\frac{z}{z^2+1}\right)\left(\frac{1-z^2}{z^2+1}\right)$$

$$= \frac{3}{8}\arctan z+\frac{z}{2(z^2+1)}+\frac{z(1-z^2)}{8(z^2+1)^2} = \frac{3}{8}\arctan z+\frac{4z(z^2+1)+z(1-z^2)}{8(z^2+1)^2}$$

$$= \frac{3}{8}\arctan z+\frac{4z^3+4z+z-z^3}{8(z^2+1)^2} = \frac{3}{8}\arctan z+\frac{3z^3+5z}{8(z^2+1)^2}$$

$$= \frac{3}{8}\arctan(x+2)+\frac{3(x+2)^3+5(x+2)}{8((x+2)^2+1)^2}$$

$$= \frac{3}{8}\arctan(x+2) + \frac{3(x^3+6x^2+12x+8)+5(x+2)}{8(x^2+4x+5)^2}$$

$$= \frac{3}{8}\arctan(x+2) + \frac{3x^3+18x^2+36x+24+5x+10}{8(x^2+4x+5)^2}$$

$$= \frac{3}{8}\arctan(x+2) + \frac{3x^3+18x^2+41x+34}{8(x^2+4x+5)^2}.$$

Entonces la integral original queda como:

$$\int \frac{x+5}{(x^2+4x+5)^3}dx = -\frac{1}{4(x^2+4x+5)^2} + 3\int \frac{1}{(x^2+4x+5)^3}dx$$

$$= -\frac{1}{4(x^2+4x+5)^2} + 3\left(\frac{3}{8}\arctan(x+2) + \frac{3x^3+18x^2+41x+34}{8(x^2+4x+5)^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{4(x^2+4x+5)^2} + \frac{9}{8}\arctan(x+2) + \frac{3(3x^3+18x^2+41x+34)}{8(x^2+4x+5)^2}$$

$$= \frac{9}{8}\arctan(x+2) + \frac{3(3x^3+18x^2+41x+34)-2}{8(x^2+4x+5)^2}$$

$$= \frac{9}{8}\arctan(x+2) + \frac{9x^3+54x^2+123x+100}{8(x^2+4x+5)^2} + c.$$

★

EJERCICIOS (18.2)

En los ejercicios 1 al 20, calcule la integral de la función racional propia simple indicada.

1. $\int \frac{5}{x+4}dx.$ **2.** $\int \frac{3}{4x-1}dx.$ **3.** $\int \frac{5}{20x-3}dx.$

4. $\int \frac{1}{(x-1)^3}dx.$ **5.** $\int \frac{4}{(3x+2)^4}dx.$ **6.** $\int \frac{3}{(8x-1)^2}dx.$

7. $\int \frac{x}{x^2+1}dx.$ **8.** $\int \frac{x+2}{x^2+4}dx.$ **9.** $\int \frac{5x+3}{5x^2+7}dx.$

10. $\int \frac{1}{x^2+x+4}dx.$ **11.** $\int \frac{2x+7}{x^2+2x+2}dx.$ **12.** $\int \frac{5x+9}{8x^2+2x+4}dx.$

13. $\int \frac{3x-1}{2x^2+4x+9}dx.$ **14.** $\int \frac{6x+7}{3x^2+7x+10}dx.$ **15.** $\int \frac{3}{x^2+4x+5}dx.$

16. $\int \frac{4x}{x^2+3x+8}dx.$ **17.** $\int \frac{x}{x^2+x+4}dx.$ **18.** $\int \frac{2x+1}{(x^2+4)^2}dx.$

19. $\int \frac{x+4}{(x^2+2x+2)^2}dx.$ **20.** $\int \frac{x+1}{(x^2+1)^3}dx.$

21. Al tratar con el problema de integrar una función racional simple del tipo IV, aparecen de manera natural integrales de la forma:

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx,$$

con $n \geq 2$. En este ejercicio obtendremos una fórmula de reducción, que nos permite expresar la integral I_n en términos de la integral I_{n-1}. Observe primeramente que:

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^n}dx$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[\int \frac{x^2+a^2}{(x^2+a^2)^n}dx - \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}dx\right] = \frac{1}{a^2}\left[I_{n-1} - \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}dx\right].$$

En la última integral, haga integración por partes, tomando $u = x$ y $dv = \frac{x}{(x^2+a^2)^n}dx$, para obtener:

$$\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}dx = \frac{1}{2(1-n)}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}dx\right)$$

$$= \frac{1}{2(1-n)}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} - I_{n-1}\right).$$

Concluya entonces que:

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left[I_{n-1} - \frac{1}{2(1-n)}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} - I_{n-1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{a^2}\left(1+\frac{1}{2(1-n)}\right)I_{n-1} - \frac{1}{2a^2(1-n)}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right)$$

$$= \frac{3-2n}{2a^2(1-n)}I_{n-1} - \frac{x}{2a^2(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}},$$

la cual es una fórmula de reducción en la que se expresa la integral I_n en términos de la integral I_{n-1}. Aplique esta fórmula a la integral $\int \frac{1}{(x^2+4)^2}dx$ que apareció en el ejemplo 18.2.4, para obtener que:

$$\int \frac{1}{(x^2+4)^2}dx = \frac{3-2(2)}{2(4)(1-2)}\int \frac{1}{x^2+4}dx - \frac{x}{2(4)(1-2)(x^2+4)^{2-1}}$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{1}{x^2+4}dx + \frac{x}{8(x^2+4)} = \frac{1}{16}\arctan\frac{x}{2} + \frac{x}{8(x^2+4)},$$

(que es el mismo resultado al que se llegó en el ejemplo mencionado).

22. Use el método del ejercicio anterior para calcular la integral $\int \dfrac{1}{(x^2+9)^3}dx$.

18.3 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES PROPIAS

En la sección anterior hemos visto cómo se integran las funciones racionales propias simples. Veremos en esta sección que esto es suficiente para resolver el problema general de integración de una función racional propia (no necesariamente simple), y, por lo tanto, de una función racional en general (pues, como vimos en la primera sección, este último problema se reduce a la integración de una función polinomial y a la integración de una función racional propia).

El resultado más importante en el que basaremos nuestro procedimiento, es que **toda función racional propia se puede descomponer como suma de fracciones simples.** Así, si $f(x)$ es una función racional propia cualquiera, veremos que:

$$f(x) = \text{suma de fracciones simples}$$

de modo que, por la propiedad de linealidad de la integral indefinida, se tendrá:

$$\text{integral de } f(x) = \text{suma de integrales de las correspondientes fracciones simples}$$

y cada una de las integrales de las funciones racionales propias simples ya la sabemos resolver.

Así pues, el hecho más importante sobre el que trabajaremos en esta sección, es *CÓMO* se efectúa la descomposición de una función racional propia, como suma de fracciones simples. Para hacer sistemático este estudio, lo dividiremos en cuatro casos, que dependen de la estructura del polinomio que aparece en el denominador de la función propia $f(x)$ a descomponer. Digamos que ésta es $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ (en donde $m > n$).

CASO I. EL POLINOMIO $Q_m(x)$ DEL DENOMINADOR DE $f(x)$ CONTIENE SOLAMENTE FACTORES LINEALES SIMPLES (NO REPETIDOS)

En este caso el polinomio $Q_m(x)$ consiste en productos de factores del tipo $x - a$, ninguno de los cuales está repetido (es decir, ninguno de estos factores aparece elevado a alguna potencia mayor o igual que 2; cuando esto ocurre, se dice que el factor lineal correspondiente es **simple**). En este caso, a cada factor de $x - a$ que aparece en el denominador de $f(x)$, le corresponde una función propia del tipo 1, $\frac{A}{x-a}$, en donde A es un coeficiente indeterminado (que se determinará según explicaremos más adelante).

Por ejemplo, si $f(x)$ es de la forma:

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{(x-a)(x-b)}$$

en donde $n < 2$, la descomposición que tendrá esta función racional como suma de fracciones simples es:

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}.$$

Similarmente, si $f(x)$ es de la forma:

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

en donde $n < 3$, la descomposición que tendrá esta función racional como suma de fracciones simples es:

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}.$$

Los coeficientes indeterminados A, B y C se calculan al imponer la condición de que la igualdad anterior debe ser válida para toda x, como se hace en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 18.3.1. Descomponer como suma de fracciones simples, la función racional $f(x) = \frac{7x-5}{x^2-x-2}$.

SOLUCIÓN. Vemos que el denominador de $f(x)$ se puede presentar como $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$. Así, tal denominador es un producto de dos factores lineales simples. A $f(x)$ le corresponde una descomposición del tipo:

$$\frac{7x-5}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}.$$

Para calcular A y B, pasamos multiplicando al lado derecho el denominador del lado izquierdo de la expresión anterior, obteniendo que:

$$7x - 5 = \frac{A}{x-2}(x-2)(x+1) + \frac{B}{x+1}(x-2)(x+1)$$

o bien:

$$7x - 5 = A(x + 1) + B(x - 2).$$

Efectuando los productos indicados y reacomodando, se obtiene:

$$7x - 5 = (A + B)x + A - 2B.$$

Recuerde que para que dos polinomios sean iguales, los coeficientes de las potencias correspondientes de ambos polinomios deben ser las mismas. Así, en la expresión anterior se está afirmando que el polinomio $7x - 5$ debe ser igual al polinomio $(A + B)x + A - 2B$. Para que esto ocurra debe tenerse que:

$$\begin{aligned} A + B &= 7 \\ A - 2B &= -5. \end{aligned}$$

Éste es un sistema de dos ecuaciones lineales con dos indeterminadas A y B, que debemos resolver. Por ejemplo, restando la segunda expresión de la primera, obtenemos que $3B = 12$, de donde $B = 4$. Sustituyendo este valor en cualquiera de las dos expresiones, calculamos $A = 3$. Tenemos entonces que la descomposición de la función racional dada como suma de fracciones simples es:

$$f(x) = \frac{7x - 5}{(x - 2)(x + 1)} = \frac{3}{x - 2} + \frac{4}{x + 1}.$$

En el ejercicio 3 de la sección 1, se pidió comprobar que efectivamente la suma del lado derecho de esta expresión es igual a la función racional indicada en el lado izquierdo. Observe que lo que estamos haciendo ahora es el proceso inverso a lo que se hizo en tal ejercicio: se trata de descomponer el resultado como suma de fracciones simples.

★

Como una aplicación de las ideas anteriores, obtengamos la fórmula general para calcular la integral

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx$$

(si el signo del denominador fuera +, ya sabemos el resultado —lo obtuvimos en el capítulo17—: $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$). Observe que $x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$, de modo que la descomposición que corresponde a la función racional $f(x) = \frac{1}{x^2-a^2}$ es:

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x + a}.$$

Pasando a multiplicar el denominador del miembro izquierdo de esta expresión y simplificando, se obtiene:

$$1 = A(x + a) + B(x - a)$$

o bien:

$$1 = (A+B)x + aA - aB$$

de donde se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ aA - aB &= 1 \end{aligned}$$

De la primera de estas expresiones se tiene $B = -A$. Sustituyendo en la segunda, llegamos a $aA - a(-A) = 1$, de donde $A = \frac{1}{2a}$, y por lo tanto $B = -\frac{1}{2a}$. Así, la función racional por integrar queda descompuesta como:

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{\frac{1}{2a}}{x-a} + \frac{-\frac{1}{2a}}{x+a} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right).$$

Entonces:

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2}dx = \frac{1}{2a}\int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right) dx = \frac{1}{2a}(\ln|x-a| - \ln|x+a|)$$

o bien, finalmente:

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c.$$

EJEMPLO 18.3.2. Calcular la integral $\int \frac{2x^2+3x-1}{x^3-6x^2+5x}dx$.

SOLUCIÓN. El denominador de la función a integrar $f(x) = \frac{2x^2+3x-1}{x^3-6x^2+5x}$ se ve como

$$x^3 - 6x^2 + 5x = x(x^2 - 6x + 5) = x(x-1)(x-5).$$

Así, la descomposición que corresponde a la función racional $f(x)$ es:

$$f(x) = \frac{2x^2+3x-1}{x(x-1)(x-5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-5}.$$

Calculemos los coeficientes indeterminados A, B y C. Se tiene:

$$2x^2 + 3x - 1 = A(x-1)(x-5) + Bx(x-5) + Cx(x-1).$$

Desarrollando los productos indicados en el lado derecho de esta expresión, se obtiene:

$$2x^2 + 3x - 1 = Ax^2 - 6Ax + 5A + Bx^2 - 5Bx + Cx^2 - Cx$$

o bien:

$$2x^2 + 3x - 1 = (A+B+C)x^2 + (-6A - 5B - C)x + 5A.$$

Igualando los coeficientes correspondientes de los polinomios involucrados en esta expresión, obtenemos el sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 indeterminadas A, B y C:

$$\begin{aligned} A + B + C &= 2 \\ -6A - 5B - C &= 3 \\ 5A &= -1. \end{aligned}$$

De la última ecuación obtenemos $A = -\frac{1}{5}$, de modo que las dos primeras se transforman en:

$$\begin{aligned} B + C &= \tfrac{11}{5} \\ -5B - C &= \tfrac{9}{5}. \end{aligned}$$

Sumando estas expresiones se obtiene $-4B = \frac{11}{5} + \frac{9}{5} = 4$, de donde $B = -1$, y así $C = \frac{11}{5} + 1 = \frac{16}{5}$. La descomposición de la función a integrar queda entonces como:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 1}{x(x-1)(x-5)} = \frac{-\frac{1}{5}}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{\frac{16}{5}}{x-5}.$$

NOTA: El cálculo de los coeficientes indeterminados en la expresión

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 1}{x(x-1)(x-5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-5}$$

puede hacerse (en todas las situaciones del caso I) de otro modo. Empezamos igualmente multiplicando el denominador al lado derecho y simplificando:

$$2x^2 + 3x - 1 = A(x-1)(x-5) + Bx(x-5) + Cx(x-1).$$

Es en este momento que el procedimiento toma otro giro: en lugar de hacer las operaciones del lado derecho de esta expresión, reacomodar los términos resultantes, igualar los coeficientes de los polinomios y resolver el sistema de ecuaciones que se obtenga, se puede proceder a dar valores concretos de la x que nos permitan calcular directamente los coeficientes. Por ejemplo, si en la expresión anterior (que debe ser válida para cualquier x), hacemos $x = 0$, se obtiene:

$$2(0)^2 + 3(0) - 1 = A(0-1)(0-5) + B(0)(0-5) + C(0)(0-1).$$

O sea: $-1 = 5A$, de donde $A = -\frac{1}{5}$, como habíamos obtenido antes. Si ahora hacemos $x = 1$, se llega a:

$$2(1)^2 + 3(1) - 1 = A(1-1)(1-5) + B(1)(1-5) + C(1)(1-1).$$

O sea: $4 = -4B$, de donde $B = -1$. Por último, si hacemos $x = 5$, se llega a:

$$2(5)^2 + 3(5) - 1 = A(5-1)(5-5) + B(5)(5-5) + C(5)(5-1).$$

O sea: $64 = 20C$, de donde $C = \frac{64}{20} = \frac{16}{5}$. Esta manera de obtener los valores de los coeficientes es, en general, más eficiente que la comentada anteriormente.

Regresando a nuestro problema original, tenemos ya descompuesta la función a integrar $f(x)$ como suma de fracciones simples. Entonces:

$$\int \frac{2x^2+3x-1}{x^3-6x^2+5x}dx = \int \left(\frac{-\frac{1}{5}}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{\frac{16}{5}}{x-5} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{5}\int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x-1}dx + \frac{16}{5}\int \frac{1}{x-5}dx$$

$$= -\frac{1}{5}\ln|x| - \ln|x-1| + \frac{16}{5}\ln|x-5| + c.$$

★

EJEMPLO 18.3.3. Calcule la integral $\int \frac{x+2}{x^2+8x+7}dx$.

SOLUCIÓN. El denominador de la función a integrar $f(x) = \frac{x+2}{x^2+8x+7}$ se puede escribir como $x^2+8x+7 = (x+1)(x+7)$, de modo que la descomposición en fracciones simples que le corresponde es:

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+8x+7} = \frac{x+2}{(x+1)(x+7)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+7}$$

de donde (pasando a multiplicar el denominador al lado derecho):

$$x+2 = A(x+7) + B(x+1).$$

Si $x=-1$, nos queda $1 = 6A$, de donde $A = \frac{1}{6}$. Si $x=-7$, nos queda $-5 = -6B$, de donde $B = \frac{5}{6}$. Así, $f(x)$ se escribe como:

$$\frac{x+2}{x^2+8x+7} = \frac{\frac{1}{6}}{x+1} + \frac{\frac{5}{6}}{x+7}$$

de modo que:

$$\int \frac{x+2}{x^2+8x+7}dx = \int \left(\frac{\frac{1}{6}}{x+1} + \frac{\frac{5}{6}}{x+7} \right) dx = \frac{1}{6}\int \frac{1}{x+1}dx + \frac{5}{6}\int \frac{1}{x+7}dx$$

$$= \frac{1}{6}\ln|x+1| + \frac{5}{6}\ln|x+7| + c.$$

★

EJEMPLO 18.3.4. Calcule la integral $\int \frac{x^3+2}{x^2+8x+7}dx$.

SOLUCIÓN. La función a integrar en este ejercicio se parece mucho a la del ejercicio anterior. Sin embargo, no podemos proceder a la descomposición en fracciones simples, porque en este caso la función racional dada no es una función racional propia. Habrá entonces que efectuar primero la división correspondiente, como fue indicado en la sección 1.

$$\begin{array}{r|rrrr} & x & -\ 8 & & \\ \hline x^2+8x+7 & x^3 & + & + & +\ 2 \\ & -x^3 & -\ 8x^2 & -\ 7x & \\ \hline & & -\ 8x^2 & -\ 7x & +\ 2 \\ & & +\ 8x^2 & +\ 64x & +\ 56 \\ \hline & & & 57x & +\ 58 \end{array}$$

Entonces:

$$\frac{x^3+2}{x^2+8x+7} = x - 8 + \frac{57x+58}{x^2+8x+7}$$

de modo que:

$$\int \frac{x^3+2}{x^2+8x+7}dx = \int (x-8)dx + \int \frac{57x+58}{x^2+8x+7}dx = \frac{1}{2}x^2 - 8x + \int \frac{57x+58}{x^2+8x+7}dx.$$

Ahora sí, procedemos a hacer la descomposición de la función racional propia que quedó en la integral de la última expresión:

$$\frac{57x+58}{x^2+8x+7} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+7}$$

de donde:

$$57x + 58 = A(x+7) + B(x+1).$$

Si $x = -1$, se tiene $1 = 6A$, de donde $A = \frac{1}{6}$. Si $x = -7$, se tiene $-341 = -6B$, de donde $B = \frac{341}{6}$. Así, se tiene:

$$\int \frac{57x+58}{x^2+8x+7}dx = \int \frac{\frac{1}{6}}{x+1}dx + \int \frac{\frac{341}{6}}{x+7}dx = \frac{1}{6}\ln|x+1| + \frac{341}{6}\ln|x+7| + c$$

y la integral original queda entonces como:

$$\int \frac{x^3+2}{x^2+8x+7}dx = \frac{1}{2}x^2 - 8x + \int \frac{57x+58}{x^2+8x+7}dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - 8x + \frac{1}{6}\ln|x+1| + \frac{341}{6}\ln|x+7| + c.$$

★

EJEMPLO 18.3.5. Calcule la integral $\int \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx$.

SOLUCIÓN. La función en el integrando se descompone en fracciones simples como:

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}.$$

Pasando el denominador a multiplicar al lado derecho se tiene:

$$1 = A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2).$$

Dando los valores $x = -1$, $x = -2$ y $x = -3$, se pueden calcular directamente los coeficientes A, B y C, respectivamente:

$$\begin{aligned} x = -1 &\Rightarrow 1 = 2A \Rightarrow A = \tfrac{1}{2} \\ x = -2 &\Rightarrow 1 = -B \Rightarrow B = -1 \\ x = -3 &\Rightarrow 1 = 2C \Rightarrow C = \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

La descomposición de la función racional a integrar queda entonces como:

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{\frac{1}{2}}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{\frac{1}{2}}{x+3}.$$

Entonces:

$$\int \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx - \int \frac{1}{x+2}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+3}dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x+1| - \ln|x+2| + \frac{1}{2}\ln|x+3| + c.$$

⋆

CASO II. EL POLINOMIO $Q_m(x)$ DEL DENOMINADOR DE $f(x)$ CONTIENE SOLAMENTE FACTORES LINEALES, ALGUNOS DE ELLOS REPETIDOS

En este caso el polinomio $Q_m(x)$ tiene también solamente factores del tipo $x - a$, como en el caso I, a diferencia que alguno de ellos puede aparecer elevado a alguna potencia $k \geq 2$. En esta situación, a cada factor lineal $x - a$ del denominador que aparezca elevado a la k, le corresponderá una suma de k fracciones simples de los tipos 1 y 2, de la siguiente manera:

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{...(x-a)^k...} = ... + \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + ... + \frac{A_k}{(x-a)^k} + ...$$

Por ejemplo, si $P_n(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que 3, se tiene:

$$\frac{P_n(x)}{(x-a)^2(x-b)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-b} + \frac{D}{(x-b)^2}$$

en donde A, B, C y D son coeficientes indeterminados. Similarmente, si $n \leq 5$, se tiene:

$$\frac{P_n(x)}{(x-a)(x-b)^2(x-c)^3} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{(x-b)^2} + \frac{D}{x-c} + \frac{E}{(x-c)^2} + \frac{F}{(x-c)^3}.$$

EJEMPLO 18.3.6. Calcular la integral $\int \frac{3x^2+5x-1}{x(x+2)^2}dx$.

SOLUCIÓN. Vemos que en el denominador de la función a integrar $f(x)$ aparece el factor lineal simple x y el factor lineal $x+2$ repetido dos veces. Entonces la descomposición correspondiente es:

$$f(x) = \frac{3x^2+5x-1}{x(x+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}.$$

Pasamos a multiplicar el denominador al lado derecho, para obtener:

$$3x^2+5x-1 = A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx.$$

Con $x=0$ esta expresión se ve como $-1 = 4A$, de donde $A = -\frac{1}{4}$. Con $x=-2$, se ve como $1 = -2C$, de donde $C = -\frac{1}{2}$. Falta calcular el valor de B. Podemos dar algún otro valor a x, y despejar B. Por ejemplo, si $x=1$, tenemos:

$$7 = 9A + 3B + C = -\frac{9}{4} + 3B - \frac{1}{2} = 3B - \frac{11}{4}$$

de donde $B = \frac{13}{4}$. Entonces la descomposición de $f(x)$ se ve como:

$$f(x) = \frac{3x^2+5x-1}{x(x+2)^2} = \frac{-\frac{1}{4}}{x} + \frac{\frac{13}{4}}{x+2} + \frac{-\frac{1}{2}}{(x+2)^2}.$$

Así, la integral requerida es:

$$\int \frac{3x^2+5x-1}{x(x+2)^2}dx = \int \left(\frac{-\frac{1}{4}}{x} + \frac{\frac{13}{4}}{x+2} + \frac{-\frac{1}{2}}{(x+2)^2}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{1}{x}dx + \frac{13}{4}\int \frac{1}{x+2}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+2)^2}dx$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|x| + \frac{13}{4}\ln|x+2| + \frac{1}{2(x+2)} + c.$$

⋆

EJEMPLO 18.3.7. Calcule la integral $\int \left(\frac{x}{x^2-9x+8}\right)^2 dx$.

SOLUCIÓN. El denominador se factoriza como $x^2-9x+8 = (x-1)(x-8)$. La función a integrar es entonces:

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2(x-8)^2}$$

que se descompone como suma de fracciones simples como:

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x-8)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-8} + \frac{D}{(x-8)^2}$$

de donde:

$$x^2 = A(x-1)(x-8)^2 + B(x-8)^2 + C(x-1)^2(x-8) + D(x-1)^2.$$

Evitamos el desarrollo de las operaciones indicadas, dando valores concretos a x. Los valores convenientes son $x = 1$ y $x = 8$, con los cuales se obtiene:

$$x = 1 \Rightarrow 1 = 49B \Rightarrow B = \frac{1}{49}$$

$$x = 8 \Rightarrow 64 = 49D \Rightarrow D = \frac{64}{49}$$

Si $x = 0$ obtenemos la expresión:

$$(0)^2 = A(0-1)(0-8)^2 + B(0-8)^2 + C(0-1)^2(0-8) + D(0-1)^2$$

$$= -64A + 64B - 8C + D = -64A + \frac{64}{49} - 8C + \frac{64}{49}.$$

O sea:

$$8A + C = \frac{16}{49}.$$

Si tomamos ahora $x = 2$, obtenemos:

$$(2)^2 = A(2-1)(2-8)^2 + B(2-8)^2 + C(2-1)^2(2-8) + D(2-1)^2$$

$$= 36A + 36B - 6C + D = 36A + \frac{36}{49} - 6C + \frac{64}{49}.$$

O sea:

$$6A - C = \frac{16}{49}.$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones:

$$8A + C = \frac{16}{49}$$

$$6A - C = \frac{16}{49}$$

obtenemos $A = \frac{16}{343}$ y $C = -\frac{16}{343}$. Entonces, la descomposición de la función en el integrando se ve como:

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x-8)^2} = \frac{\frac{16}{343}}{x-1} + \frac{\frac{1}{49}}{(x-1)^2} - \frac{\frac{16}{343}}{x-8} + \frac{\frac{64}{49}}{(x-8)^2}.$$

Entonces la integral queda como:

$$\int \left(\frac{x}{x^2 - 9x + 8} \right)^2 dx = \int \frac{x^2}{(x-1)^2(x-8)^2} dx$$

$$= \int \frac{\frac{16}{343}}{x-1}dx + \int \frac{\frac{1}{49}}{(x-1)^2}dx - \int \frac{\frac{16}{343}}{x-8}dx + \int \frac{\frac{64}{49}}{(x-8)^2}dx$$

$$= \frac{16}{343}\ln|x-1| - \frac{1}{49(x-1)} - \frac{16}{343}\ln|x-8| - \frac{64}{49(x-8)}$$

$$= \frac{16}{343}\ln\left|\frac{x-1}{x-8}\right| - \frac{65x-72}{49(x^2-9x+8)} + c.$$

★

CASO III. EL POLINOMIO $Q_m(x)$ DEL DENOMINADOR DE $f(x)$ CONTIENE FACTORES CUADRÁTICOS IRREDUCIBLES, NINGUNO DE ELLOS REPETIDO

En este caso en el polinomio del denominador $Q_m(x)$ aparecen factores cuadráticos del tipo x^2+px+q, con $p^2-4q<0$ (condición que indica que el factor cuadrático es irreducible). A cada uno de estos factores que aparezca en el denominador, le corresponde una función simple del tipo 3 de la forma $\frac{Ax+b}{x^2+px+q}$. Es decir, se tiene:

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x)}{...(x^2+px+q)...} = ... + \frac{Ax+B}{x^2+px+q} + ...$$

Por ejemplo, si $n<3$,

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

lo cual es una combinación de los casos I y III. Similarmente, si $n<4$

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{(x+2)(x+3)^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1}$$

que es una combinación de los casos I, II y III.

EJEMPLO 18.3.8. Calcular la integral $\int \frac{x^2-3x-1}{x(x^2+4)}dx$.

SOLUCIÓN. La descomposición que le corresponde a la función racional a integrar es de la forma:

$$\frac{x^2-3x-1}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

Pasando a multiplicar el denominador, se obtiene:

$$x^2-3x-1 = A(x^2+4) + (Bx+C)x = Ax^2+4A+Bx^2+Cx = (A+B)x^2+Cx+4A$$

de donde se obtiene el sistema:

$$A + B = 1$$
$$C = -3$$
$$4A = -1$$

cuya solución es $A = -\frac{1}{4}$, $B = \frac{5}{4}$, $C = -3$. La descomposición del integrando queda entonces como:

$$\frac{x^2 - 3x - 1}{x(x^2 + 4)} = \frac{-\frac{1}{4}}{x} + \frac{\frac{5}{4}x - 3}{x^2 + 4}.$$

Entonces:

$$\int \frac{x^2 - 3x - 1}{x(x^2 + 4)} dx = \int \left(\frac{-\frac{1}{4}}{x} + \frac{\frac{5}{4}x - 3}{x^2 + 4} \right) dx = -\frac{1}{4} \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{\frac{5}{4}x - 3}{x^2 + 4} dx$$

$$= -\frac{1}{4} \ln|x| + \int \frac{\frac{5}{4}x - 3}{x^2 + 4} dx.$$

La integral indicada es una integral de una función simple del tipo 3 que ya sabemos resolver. Se tiene:

$$\int \frac{\frac{5}{4}x - 3}{x^2 + 4} dx = \frac{5}{4} \int \frac{x - \frac{12}{5}}{x^2 + 4} dx = \frac{5}{8} \int \frac{2x - \frac{24}{5}}{x^2 + 4} dx$$

$$= \frac{5}{8} \int \frac{2x}{x^2 + 4} dx - 3 \int \frac{1}{x^2 + 4} dx = \frac{5}{8} \ln(x^2 + 4) - \frac{3}{2} \arctan \frac{x}{2} + c.$$

Entonces, la integral original queda como:

$$\int \frac{x^2 - 3x - 1}{x(x^2 + 4)} dx = -\frac{1}{4} \ln|x| + \frac{5}{8} \ln(x^2 + 4) - \frac{3}{2} \arctan \frac{x}{2} + c.$$

★

EJEMPLO 18.3.9. Calcule la integral $\int \frac{x}{x^3 - 1} dx$.

SOLUCIÓN. El denominador de la función racional en el integrando se puede factorizar como (diferencia de cubos) $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$. Observe que el factor $x^2 + x + 1$ (de la forma $x^2 + px + q$, con $p = q = 1$) es un factor cuadrático irreducible, pues $p^2 - 4q = -3 < 0$. Entonces la descomposición que corresponde a esta función en suma de fracciones simples es:

$$\frac{x}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}.$$

Pasamos el denominador a multiplicar al lado derecho:

$$x = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1) = Ax^2 + Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx - C$$

$$= (A + B)x^2 + (A - B + C)x + A - C.$$

Se obtiene entonces:

$$\left.\begin{array}{r} A+B=0 \\ A-B+C=1 \\ A-C=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=\frac{1}{3} \\ B=-\frac{1}{3} \\ C=\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

La descomposición queda entonces como:

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{x^2+x+1}$$

Entonces:

$$\int \frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx.$$

La integral que queda aún por resolver corresponde a la integral de una función simple del tipo 3. Resolvámosla:

$$\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1-3}{x^2+x+1}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)\arctan\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c.$$

Entonces:

$$\int \frac{x}{x^3-1}dx = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c.$$

★

EJEMPLO 18.3.10. Calcule la integral $\int \frac{3x^2+5x+1}{x^4-1}dx$.

SOLUCIÓN. El denominador de la función racional a integrar se factoriza como (diferencia de cuadrados) $x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$, de modo que la descomposición que le corresponde es del tipo:

$$\frac{3x^2+5x+1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

de donde:

$$3x^2+5x+1 = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)(x+1).$$

Fijando valores de x, es posible calcular directamente dos de los cuatro coeficientes indeterminados por calcular. De hecho, si $x=1$, la expresión anterior toma la forma $9=4A$, de donde $A=\frac{9}{4}$, y si $x=-1$, se tiene $-1=-4B$, de donde $B=\frac{1}{4}$. Para calcular los coeficientes C y D que hacen falta, podemos, en lugar de desarrollar los productos indicados en la expresión anterior, dar otros dos valores a la x y generar así un sistema de dos ecuaciones lineales con dos indeterminadas (C y D). Por ejemplo, si $x=0$, se obtiene:

$$3(0)^2+5(0)+1 = A(0+1)(0^2+1) + B(0-1)(0^2+1) + (C(0)+D)(0-1)(0+1)$$

o sea:

$$1 = A - B - D = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} - D = 2 - D$$

de donde $D=1$. Damos algún otro valor a x, digamos $x=2$. Se obtiene:

$$3(2)^2+5(2)+1 = A(2+1)(2^2+1) + B(2-1)(2^2+1) + (2C+D)(2-1)(2+1)$$

o sea:

$$23 = 15A + 5B + 3(2C+D) = (15)\left(\frac{9}{4}\right) + (5)\left(\frac{1}{4}\right) + 6C + 3(1) = 38 + 6C$$

de donde $C=-\frac{5}{2}$.

Entonces la descomposición de la función a integrar en suma de fracciones simples se ve como:

$$\frac{3x^2+5x+1}{x^4-1} = \frac{\frac{9}{4}}{x-1} + \frac{\frac{1}{4}}{x+1} + \frac{-\frac{5}{2}x+1}{x^2+1}.$$

La integral es entonces:

$$\int \frac{3x^2+5x+1}{x^4-1}dx = \int \frac{\frac{9}{4}}{x-1}dx + \int \frac{\frac{1}{4}}{x+1}dx + \int \frac{-\frac{5}{2}x+1}{x^2+1}dx$$

$$= \frac{9}{4}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}dx - \frac{5}{4}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx$$

$$= \frac{9}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{5}{4}\ln(x^2+1) + \arctan x + c.$$

⋆

EJEMPLO 18.3.11. Calcule la integral $\int \frac{1}{x^4+3x^2+2}dx$.

SOLUCIÓN. El denominador del integrando se puede factorizar como $x^4+3x^2+2 = (x^2+1)(x^2+2)$, de donde se ve que se trata del producto de dos factores cuadráticos irreducibles. La descomposición correspondiente es entonces de la forma:

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2}$$

de donde:

$$1 = (Ax+B)(x^2+2) + (Cx+D)(x^2+1)$$

$$= Ax^3 + 2Ax + Bx^2 + 2B + Cx^3 + Cx + Dx^2 + D$$

$$= (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + (2A+C)x + 2B + D.$$

Se obtiene entonces el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} A+C&=0\\ B+D&=0\\ 2A+C&=0\\ 2B+D&=1 \end{aligned}$$

De las dos primeras ecuaciones vemos que $A=-C$ y $B=-D$. Sustituyendo en la tercera y cuarta ecuaciones, respectivamente, se obtiene: $2(-C)+C=0$, de donde $C=0$, y $2(-D)+D=1$, de donde $D=-1$. Así, la solución del sistema es $A=C=0$, $B=1$, $D=-1$. La descomposición del integrando queda como:

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+2}.$$

Entonces:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)}dx = \int \frac{1}{x^2+1}dx - \int \frac{1}{x^2+2}dx$$

$$= \arctan x - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + c.$$

★

CASO IV. EL POLINOMIO $Q_m(x)$ DEL DENOMINADOR DE $f(x)$ CONTIENE FACTORES CUADRÁTICOS IRREDUCIBLES, ALGUNO(S) DE ELLOS REPETIDO(S)

En este caso en el polinomio $Q_m(x)$ del denominador aparecen también factores cuadráticos irreducibles $x^2 + px + q$, pero algunos de ellos elevados a una potencia $k \geq 2$ (es decir, repetidos k veces). A cada factor del tipo $(x^2 + px + q)^k$ del denominador, le corresponderá una suma de k fracciones simples de los tipos 3 y 4 de la siguiente manera:

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x)}{...(x^2 + px + q)^k...}$$

$$= ... + \frac{A_1 x + B_1}{x^2 + px + q} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2 + px + q)^2} + ... + \frac{A_k x + B_k}{(x^2 + px + q)^k}...$$

Por ejemplo, si $n < 6$

$$\frac{P_n(x)}{(x^2+1)(x^2+3)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 3} + \frac{Ex + F}{(x^2 + 3)^2}.$$

Similarmente, si $n < 9$

$$\frac{P_n(x)}{(x+2)(x-5)^2(x^2+x+3)(x^2+2x+8)^2}$$

$$= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-5} + \frac{C}{(x-5)^2} + \frac{Dx + E}{x^2 + x + 3} + \frac{Fx + G}{x^2 + 2x + 8} + \frac{Hx + I}{(x^2 + 2x + 8)^2},$$

lo cual es una combinación de los cuatro casos discutidos anteriormente.

EJEMPLO 18.3.12. Calcular la integral $\int \frac{x^3+2}{(x^2+9)^2} dx$.

SOLUCIÓN. La descomposición del integrando se ve como:

$$\frac{x^3 + 2}{(x^2 + 9)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 9} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 9)^2}.$$

Pasando a multiplicar el denominador al lado derecho, se obtiene:

$$x^3 + 2 = (Ax + B)(x^2 + 9) + Cx + D = Ax^3 + 9Ax + Bx^2 + 9B + Cx + D$$

o sea:

$$x^3 + 2 = Ax^3 + Bx^2 + (9A + C)x + 9B + D$$

de donde:

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B &= 0 \\ 9A + C &= 0 \\ 9B + D &= 2 \end{aligned}$$

sistema cuya solución es $A = 1$, $B = 0$, $C = -9$, $D = 2$. Entonces el integrando queda descompuesto como:

$$\frac{x^3+2}{(x^2+9)^2} = \frac{x}{x^2+9} + \frac{-9x+2}{(x^2+9)^2}$$

y así, la integral requerida en el ejemplo queda:

$$\int \frac{x^3+2}{(x^2+9)^2}dx = \int \frac{x}{x^2+9}dx + \int \frac{-9x+2}{(x^2+9)^2}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+9) + \int \frac{-9x+2}{(x^2+9)^2}dx.$$

La integral indicada en la última expresión es la de una función simple del tipo 4. Procedemos a resolverla con las indicaciones vistas en la sección anterior:

$$\int \frac{-9x+2}{(x^2+9)^2}dx = -9\int \frac{x-\frac{2}{9}}{(x^2+9)^2}dx = -\frac{9}{2}\int \frac{2x-\frac{4}{9}}{(x^2+9)^2}dx$$

$$= -\frac{9}{2}\int \frac{2x}{(x^2+9)^2}dx + 2\int \frac{1}{(x^2+9)^2}dx = \frac{9}{2(x^2+9)} + 2\int \frac{1}{(x^2+9)^2}dx.$$

Esta última integral la resolvemos con la sustitución trigonométrica $x = 3\tan t$. Nos queda:

$$\int \frac{1}{(x^2+9)^2}dx \overset{x=3\tan t}{=\!=\!=} \int \frac{1}{(9\sec^2 t)^2}(3\sec^2 t dt) = \frac{1}{27}\int \cos^2 t dt$$

$$= \frac{1}{27}\int \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{27}\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t\right) = \frac{1}{27}\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\cos t\right)$$

$$= \frac{1}{27}\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right)\left(\frac{3}{\sqrt{x^2+9}}\right)\right) = \frac{1}{54}\arctan\frac{x}{3} + \frac{x}{18(x^2+9)}.$$

Entonces:

$$\int \frac{-9x+2}{(x^2+9)^2}dx = \frac{9}{2(x^2+9)} + 2\int \frac{1}{(x^2+9)^2}dx$$

$$= \frac{9}{2(x^2+9)} + 2\left(\frac{1}{54}\arctan\frac{x}{3} + \frac{x}{18(x^2+9)}\right) = \frac{2x+81}{18(x^2+9)} + \frac{1}{27}\arctan\frac{x}{3} + c.$$

Y así, la integral original queda:

$$\int \frac{x^3+2}{(x^2+9)^2}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+9) + \int \frac{-9x+2}{(x^2+9)^2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+9) + \frac{2x+81}{18(x^2+9)} + \frac{1}{27}\arctan\frac{x}{3} + c.$$

★

EJERCICIOS (18.3)

En los ejercicios 1 al 10, escriba la estructura de la descomposición de la función racional propia dada como suma de fracciones simples. (No calcule los coeficientes de la descomposición, solamente indique la forma de ésta.)

1. $f(x) = \dfrac{x^2}{x(x^2+1)}$.

2. $f(x) = \dfrac{x^2+7x+8}{x(x^2+1)}$.

3. $f(x) = \dfrac{1}{x(x-1)(x-2)}$.

4. $f(x) = \dfrac{1}{x(x-1)^2(x-2)^3}$.

5. $f(x) = \dfrac{x^3+9x^2+7x+12}{(x^2-1)^2}$.

6. $f(x) = \dfrac{x^5+7x^4-2x^3+3x^2+7x+1}{(x^3-1)^2}$.

7. $f(x) = \dfrac{1}{(x^4-1)^2}$.

8. $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+x+2)^2}$.

9. $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+2x+1)^3}$.

10. $f(x) = \dfrac{1}{(x^6-1)^2}dx$.

En los ejercicios 11 al 40, calcule la integral indicada.

11. $\displaystyle\int \frac{2(2x-5)}{x^2-6x+8}dx$.

12. $\displaystyle\int \frac{7x+8}{2x^2+5x+2}dx$.

13. $\displaystyle\int \frac{11x^2-43x+36}{x(x-2)(x-3)}dx$.

14. $\displaystyle\int \frac{3x^2-5x+3}{x(x-1)^2}dx$.

15. $\displaystyle\int \frac{7x^2-9x+5}{x(x-1)^2}dx$.

16. $\displaystyle\int \frac{5x^2-6x+5}{(x^2-1)^2}dx$.

17. $\displaystyle\int \frac{x^2+x+6}{(x^2+1)(x+5)}dx$.

18. $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{(x-1)^3}dx$.

19. $\displaystyle\int \frac{18x^2+21x+10}{(3x+1)^3}dx$.

20. $\displaystyle\int \frac{2x^2+3x-1}{(x^2+1)(x-1)}dx$.

21. $\displaystyle\int \frac{1}{x^4-1}dx$.

22. $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2}dx$.

23. $\displaystyle\int \frac{6x^3+13x^2-36x+20}{(x^2-4)^2}dx.$

24. $\displaystyle\int \frac{6x^3-18x^2+23x-30}{(x^2+4)(x^2-5x+6)}dx.$

25. $\displaystyle\int \frac{5x^3+6x^2-5x+9}{(x^2+2x+2)(x-1)^2}dx.$

26. $\displaystyle\int \frac{5x^3+7x^2+19x+27}{x^4+8x^2+15}dx.$

27. $\displaystyle\int \frac{4x^3+27x^2+62x+44}{(x^2+7x+15)(x^2+2x+2)}dx.$

28. $\displaystyle\int \frac{4(x^3+6x^2+9x+6)}{(x^2+3)(x+3)^2}dx.$

29. $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+x+4}{(x^2+4)(x^2+1)}dx.$

30. $\displaystyle\int \frac{3x^2+2x-2}{(x-1)(x^2+x+1)}dx.$

31. $\displaystyle\int \frac{5x^3+9x+10}{3(x^2+3)(x-1)^2}dx.$

32. $\displaystyle\int \frac{2x^4+15x^3+44x^2+60x+41}{(x^2+2x+3)(x+2)^3}dx.$

33. $\displaystyle\int \frac{2x^3+7x^2+14x+11}{(x^2+2x+2)^2}dx.$

34. $\displaystyle\int \frac{3x^3+x^2+3x+5}{(x^2+1)^2}dx.$

35. $\displaystyle\int \frac{x^5+x^4+9x^3+5x^2+17x+4}{(x^2+4)^2(x^2+1)}dx.$

36. $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^4+x^2+1)^2}dx.$

37. $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^2+1)^2(x^4+1)^2}dx.$

38. $\displaystyle\int \frac{3}{x(x^8+2x^4+2)^2}dx.$

39. $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^4-1)}dx.$ (Sugerencia: Multiplique y divida entre x, y haga el cambio de variable $u=x^2$.)

40. $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^3-1)(x^6+1)}dx.$ (Sugerencia: Multiplique y divida entre x^2.)

18.4 INTEGRACIÓN DE DIVERSAS FUNCIONES. REPASO DE LAS TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

En esta sección vamos a presentar algunos tipos de funciones cuyas integrales se reducen, después de un cambio de variable adecuado, al problema de integración de funciones racionales que hemos discutido en este capítulo. Más específicamente consideraremos el problema de integración de algunas funciones irracionales y de algunas funciones trigonométricas.

Cuando se tiene una función irracional $f(x)$ a integrar, en la que aparecen una o varias raíces del tipo $\sqrt[n]{\varphi(x)}$, una idea general que suele ser útil es hacer un cambio de variable de la forma $\varphi(x) = z^m$, en donde m es un exponente que sea divisible entre n, con el cual podremos deshacernos de la raíz $\sqrt[n]{\varphi(x)}$, pues ésta quedaría como $\sqrt[n]{\varphi(x)} = \sqrt[n]{z^m} = z^{\frac{m}{n}} = z^k$, en donde ahora k es un entero (pues m es divisible entre n). Con este procedimiento obtendríamos, en principio, la integral de una función racional en la nueva variable z.

Veamos algunos casos concretos en los que se vea funcionar esta idea.

EJEMPLO 18.4.1. Calcular la integral $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$.

SOLUCIÓN. Procuramos eliminar las raíces del integrando. Si hacemos $x = z^6$, tendríamos $\sqrt{x} = \sqrt{z^6} = z^3$ y $\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{z^6} = z^2$. Entonces:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx \overset{x=z^6}{\longrightarrow}= \int \frac{1}{z^3+z^2}(6z^5dz) = 6\int \frac{z^3}{z+1}dz.$$

La integral que se ha obtenido es la de una función racional de z, y se resuelve muy fácilmente: notando que (haciendo la división correspondiente de los polinomios):

$$\frac{z^3}{z+1} = z^2 - z + 1 - \frac{1}{z+1},$$

nos queda:

$$\int \frac{z^3}{z+1}dz = \int \left(z^2 - z + 1 - \frac{1}{z+1}\right)dz = \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{2}z^2 + z - \ln|z+1| + c.$$

Entonces:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx = 6\int \frac{z^3}{z+1}dz = 6\left(\frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{2}z^2 + z - \ln|z+1|\right) + c$$

$$= 2z^3 - 3z^2 + 6z - 6\ln|z-1| + c$$

$$= 2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} - 6\ln\left|x^{\frac{1}{6}} - 1\right| + c.$$

★

EJEMPLO 18.4.2. Calcule la integral $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x+2}+x}dx$.

SOLUCIÓN. Para deshacernos de la raíz cúbica del integrando, hacemos $x + 2 = z^3$. Se tiene entonces $x = z^3 - 2$ y $dx = 3z^2dz$. Nos queda:

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{x+2}+x}dx \overset{x+2=z^3}{\longrightarrow}= \int \frac{z^3-2}{z+z^3-2}(3z^2dz) = 3\int \frac{z^5-2z^2}{z^3+z-2}dz.$$

Tenemos ahora la integral de una función racional que ya sabemos resolver. Como ésta es impropia, hacemos primeramente la división de los polinomios involucrados. El resultado es:

$$\frac{z^5-2z^2}{z^3+z-2} = z^2 - 1 + \frac{z-2}{z^3+z-2}$$

de modo que:

$$\int \frac{z^5 - 2z^2}{z^3 + z - 2} dz = \int (z^2 - 1) dz + \int \frac{z - 2}{z^3 + z - 2} dz = \frac{1}{3} z^3 - z + \int \frac{z - 2}{z^3 + z - 2} dz.$$

Ahora ya se tiene la integral de una función racional propia, $f(z) = \frac{z-2}{z^3+z-2}$. Debemos factorizar el denominador para saber qué tipo de descomposición como suma de fracciones simples se tiene que hacer. Es fácil identificar a $z = 1$ como una raíz del polinomio $z^3 + z - 2$ del denominador. Así que $z - 1$ debe ser un factor. Haciendo la correspondiente división (o división sintética, si se quiere), llegamos a que $z^3 + z - 2 = (z - 1)(z^2 + z + 2)$. El factor $z^2 + z + 2$, que es del tipo $z^2 + pz + q$, con $p = 1$ y $q = 2$, es un factor cuadrático irreducible, pues $p^2 - 4q = (1)^2 - 4(2) = -7 < 0$. Entonces el integrando de la última integral se descompone como:

$$\frac{z - 2}{z^3 + z - 2} = \frac{z - 2}{(z - 1)(z^2 + z + 2)} = \frac{A}{z - 1} + \frac{Bz + C}{z^2 + z + 2}.$$

Pasamos a multiplicar el denominador al lado derecho:

$$z - 2 = A(z^2 + z + 2) + (Bz + C)(z - 1) = Az^2 + Az + 2A + Bz^2 - Bz + Cz - C$$

$$= (A + B)z^2 + (A - B + C)z + 2A - C$$

de donde se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ A - B + C &= 1 \\ 2A - C &= -2 \end{aligned}$$

De la primera ecuación se obtiene $A = -B$, que sustituida en la segunda queda $2A + C = 1$. Resolviendo esta última con la tercera ecuación (por ejemplo, sumándolas), se obtiene $4A = -1$, de donde $A = -\frac{1}{4}$. Sustituyendo en la tercera ecuación se llega a $2\left(\frac{-1}{4}\right) - C = -2$, de donde $C = \frac{3}{2}$. Finalmente, $B = -A = \frac{1}{4}$. La solución del sistema anterior es entonces $A = -\frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{4}$ y $C = \frac{3}{2}$. La descomposición procurada es:

$$\frac{z - 2}{z^3 + z - 2} = \frac{-\frac{1}{4}}{z - 1} + \frac{\frac{1}{4}z + \frac{3}{2}}{z^2 + z + 2}$$

y entonces:

$$\int \frac{z - 2}{z^3 + z - 2} dz = -\frac{1}{4} \int \frac{1}{z - 1} dz + \int \frac{\frac{1}{4}z + \frac{3}{2}}{z^2 + z + 2} dz$$

$$= -\frac{1}{4} \ln|z - 1| + \frac{1}{4} \int \frac{z + 6}{z^2 + z + 2} dz = -\frac{1}{4} \ln|z - 1| + \frac{1}{8} \int \frac{2z + 12}{z^2 + z + 2} dz$$

$$= -\frac{1}{4} \ln|z - 1| + \frac{1}{8} \int \frac{2z + 1 + 11}{z^2 + z + 2} dz$$

de modo que

$$= -\frac{1}{4}\ln|z-1| + \frac{1}{8}\int \frac{2z+1}{z^2+z+2}dz + \frac{11}{8}\int \frac{1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|z-1| + \frac{1}{8}\ln(z^2+z+2) + \frac{11}{8}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{7}{4}}}\arctan\frac{z+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{7}{4}}}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|z-1| + \frac{1}{8}\ln(z^2+z+2) + \frac{11}{4\sqrt{7}}\arctan\frac{2z+1}{\sqrt{7}} + c.$$

Entonces:

$$\int \frac{z^5-2z^2}{z^3+z-2}dz = \frac{1}{3}z^3 - z + \int \frac{z-2}{z^3+z-2}dz$$

$$= \frac{1}{3}z^3 - z - \frac{1}{4}\ln|z-1| + \frac{1}{8}\ln(z^2+z+2) + \frac{11}{4\sqrt{7}}\arctan\frac{2z+1}{\sqrt{7}} + c.$$

Finalmente, se tiene:

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{x+2}+x}dx = 3\int \frac{z^5-2z^2}{z^3+z-2}dz =$$

$$= 3\left[\frac{1}{3}z^3 - z - \frac{1}{4}\ln|z-1| + \frac{1}{8}\ln(z^2+z+2) + \frac{11}{4\sqrt{7}}\arctan\frac{2z+1}{\sqrt{7}}\right] + c$$

$$= z^3 - 3z - \frac{3}{4}\ln|z-1| + \frac{3}{8}\ln(z^2+z+2) + \frac{33}{4\sqrt{7}}\arctan\frac{2z+1}{\sqrt{7}} + c$$

y, como $z = (x+2)^{\frac{1}{3}}$, el resultado final queda como:

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{x+2}+x}dx$$

$$= x + 2 - 3(x+2)^{\frac{1}{3}} - \frac{3}{4}\ln\left|(x+2)^{\frac{1}{3}} - 1\right| +$$

$$+\frac{3}{8}\ln\left((x+2)^{\frac{2}{3}} + (x+2)^{\frac{1}{3}} + 2\right) + \frac{33}{4\sqrt{7}}\arctan\frac{2(x+2)^{\frac{1}{3}}+1}{\sqrt{7}} + c.$$

★

EJEMPLO 18.4.3. Calcule la integral $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5\sqrt[3]{x}+4\sqrt[6]{x}}dx$, haciendo la sustitución $x = z^6$.

SOLUCIÓN. Si $x = z^6$, se tiene $dx = 6z^5dz$, y entonces:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5\sqrt[3]{x}+4\sqrt[6]{x}}dx \overset{x=z^6}{=} \int \frac{z^3}{z^3+5z^2+4z}(6z^5dz) = 6\int \frac{z^7}{z^2+5z+4}dz.$$

El integrando que aparece en la última integral es ya una función racional. Puesto que ésta es impropia, hacemos primeramente la división de los polinomios correspondientes, obteniendo:

$$\frac{z^7}{z^2+5z+4} = z^5-5z^4+21z^3-85z^2+341z-1365+\frac{5461z+5460}{z^2+5z+4}.$$

Entonces:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5\sqrt[3]{x}+4\sqrt[6]{x}}dx = 6\int \frac{z^7}{z^2+5z+4}dz$$

$$= 6\int \left(z^5-5z^4+21z^3-85z^2+341z-1365+\frac{5461z+5460}{z^2+5z+4}\right)dz$$

$$= 6\left(\frac{1}{6}z^6-z^5+\frac{21}{4}z^4-\frac{85}{3}z^3+\frac{341}{2}z^2-1365z+\int \frac{5461z+5460}{z^2+5z+4}dz\right).$$

La integral que ha quedado indicada es la de una función racional propia. El denominador se factoriza como $z^2+5z+4=(z+1)(z+4)$, de modo que la descomposición en fracciones simples se ve como:

$$\frac{5461z+5460}{(z+1)(z+4)} = \frac{A}{z+1}+\frac{B}{z+4}$$

de donde:

$$5461z+5460 = A(z+4)+B(z+1).$$

Con $z=-1$, se obtiene $-1=3A$, de donde $A=-\frac{1}{3}$. Con $z=-4$, se obtiene $-16384=-3B$, de donde $B=\frac{16384}{3}$. Entonces:

$$\int \frac{5461z+5460}{(z+1)(z+4)}dz = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{z+1}dz+\frac{16384}{3}\int \frac{1}{z+4}dz$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|z+1|+\frac{16384}{3}\ln|z+4|.$$

Así pues, la integral original queda como:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5\sqrt[3]{x}+4\sqrt[6]{x}}dx$$

$$= z^6-6z^5+\frac{63}{2}z^4-170z^3+1023z^2-8190z+6\int \frac{5461z+5460}{z^2+5z+4}dz$$

$$= z^6 - 6z^5 + \frac{63}{2}z^4 - 170z^3 + 1023z^2 - 8190z + 6\left(-\frac{1}{3}\ln|z+1| + \frac{16384}{3}\ln|z+4|\right)$$

$$= z^6 - 6z^5 + \frac{63}{2}z^4 - 170z^3 + 1023z^2 - 8190z - 2\ln|z+1| + 32768\ln|z+4|.$$

Como $z = x^{\frac{1}{6}}$, el resultado final se ve como:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 5\sqrt[3]{x} + 4\sqrt[6]{x}}dx$$

$$= x - 6x^{\frac{5}{6}} + \frac{63}{2}x^{\frac{2}{3}} - 170x^{\frac{1}{2}} + 1023x^{\frac{1}{3}} - 8190x^{\frac{1}{6}} - \\ -2\ln\left(x^{\frac{1}{6}} + 1\right) + 32768\ln\left(x^{\frac{1}{6}} + 4\right) + c.$$

$\star$

Otro tipo de integrales que podemos reducir siempre al caso de la integración de una función racional es el de funciones racionales en $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, es decir, funciones que involucran cocientes de "polinomios" en las variables $\operatorname{sen} x$ y/o $\cos x$, como por ejemplo, $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{2+\cos x+3\operatorname{sen} x}$, $g(x) = \frac{\operatorname{sen}^2 x+\cos x}{3\operatorname{sen} x+4\cos x+1}$, etcétera.

Para integrar este tipo de funciones se recomienda, en general, una sustitución que reduce el problema al de una integral de una función racional. Tal sustitución es:

$$\tan\frac{x}{2} = t$$

la cual es conocida como **sustitución universal.** De ella obtenemos que $x = 2\arctan t$ y por lo tanto $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$. Veamos cuáles son las expresiones para $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ según esta sustitución. Con la ayuda de un triángulo rectángulo, con un ángulo agudo siendo $\frac{x}{2}$ con tangente igual a t, vemos que

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad \text{y} \quad \cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Usando las identidades del seno y coseno del ángulo doble, obtenemos:

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right) = \frac{2t}{1+t^2},$$

y

$$\cos x = \cos\left(2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 - \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

En resumen, debemos tener presente que de la sustitución universal se desprende:

$$\tan\frac{x}{2}=t \longrightarrow \begin{cases} dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt \\ \operatorname{sen} x=\dfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

Al hacer estas sustituciones en la integral por resolver, obtendremos la integral de una función racional en t.

EJEMPLO 18.4.4. Calcule la integral $\int \frac{1}{\operatorname{sen} x+2\cos x+3}dx$.

SOLUCIÓN. Haciendo la sustitución universal $\tan\frac{x}{2}=t$, con la cual, como hemos visto, se tiene: $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$, $\operatorname{sen} x=\frac{2t}{1+t^2}$ y $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, obtenemos:

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen} x+2\cos x+3}dx \overset{\tan\frac{x}{2}=t}{=\!=\!=} \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}+2\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)+3}\left(\frac{2}{1+t^2}dt\right)$$

$$=2\int \frac{1}{2t+2(1-t^2)+3(1+t^2)}dt=2\int \frac{1}{t^2+2t+5}dt=2\int \frac{1}{(t+1)^2+4}dt$$

$$=2\left(\frac{1}{2}\right)\arctan\frac{t+1}{2}+c=\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{2}+c.$$

★

EJEMPLO 18.4.5. Calcule la integral $\int \frac{3\cos x-4\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x+\cos x+1}dx$.

SOLUCIÓN. Haciendo la sustitución universal $\tan\frac{x}{2}=t$, con la cual se tiene entonces: $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$, $\operatorname{sen} x=\frac{2t}{1+t^2}$ y $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, obtenemos:

$$\int \frac{3\cos x-4\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x+\cos x+1}dx \overset{\tan\frac{x}{2}=t}{=\!=\!=} \int \frac{3\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)-4\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}+1}\left(\frac{2}{1+t^2}dt\right)$$

$$=2\int \frac{3(1-t^2)-4(2t)}{(2t+1-t^2+1+t^2)(1+t^2)}dt=\int \frac{-3t^2-8t+3}{(t+1)(t^2+1)}dt.$$

Hemos llegado así a la integral de una función racional. Descomponemos en fracciones parciales el integrando:

$$\frac{-3t^2-8t+3}{(t+1)(t^2+1)}=\frac{A}{t+1}+\frac{Bt+C}{t^2+1}$$

de donde:

$$-3t^2-8t+3=A(t^2+1)+(Bt+C)(t+1)=(A+B)t^2+(B+C)t+A+C$$

de donde a su vez:

$$\left.\begin{array}{r}A+B=-3\\B+C=-8\\A+C=3\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}A=4\\B=-7\\C=-1.\end{array}\right.$$

Así:

$$\frac{-3t^2-8t+3}{(t+1)(t^2+1)}=\frac{4}{t+1}+\frac{-7t-1}{t^2+1}$$

y entonces:

$$\int\frac{3\cos x-4\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x+\cos x+1}dx\overset{\tan\frac{x}{2}=t}{=\!=\!=}\int\frac{-3t^2-8t+3}{(t+1)(t^2+1)}dt=\int\left(\frac{4}{t+1}+\frac{-7t-1}{t^2+1}\right)dt$$

$$=4\int\frac{1}{t+1}dt-\frac{7}{2}\int\frac{2t}{t^2+1}dt-\int\frac{1}{t^2+1}dt=4\ln|t+1|-\frac{7}{2}\ln(t^2+1)-\arctan t+c$$

$$=4\ln\left|\tan\frac{x}{2}+1\right|-\frac{7}{2}\ln(\tan^2\frac{x}{2}+1)-\arctan\tan\frac{x}{2}+c$$

$$=4\ln\left|\tan\frac{x}{2}+1\right|-\frac{7}{2}\ln\sec^2\frac{x}{2}-\frac{x}{2}+c=4\ln\left|\tan\frac{x}{2}+1\right|+7\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|-\frac{x}{2}+c.$$

★

En algunas ocasiones la sustitución universal puede conducir a integrales de funciones racionales muy complicadas de resolver, como por ejemplo, cuando en la función a integrar existen solamente potencias pares de $\operatorname{sen}x$ y/o $\cos x$. En tal caso, se recomienda hacer, en lugar de la sustitución universal, la sustitución $\tan x=t$.

Veamos un ejemplo.

EJEMPLO 18.4.6. Calcule la integral $\int\frac{\cos^2 x}{2\operatorname{sen}^2x+4\cos^2x+1}dx$.

SOLUCIÓN. Si hiciéramos la sustitución universal obtendríamos:

$$\int\frac{\cos^2 x}{2\operatorname{sen}^2x+4\cos^2x+1}dx\overset{\tan\frac{x}{2}=t}{=\!=\!=}\int\frac{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2}{2\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2+4\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2+1}\left(\frac{2}{1+t^2}dt\right)$$

$$=2\int\frac{(1-t^2)^2}{[2(2t)^2+4(1-t^2)^2+(1+t^2)^2]\,(1+t^2)}dt=2\int\frac{t^4-2t^2+1}{(5t^4+2t^2+5)(1+t^2)}dt.$$

Ciertamente la función que obtuvimos en el integrando es una función racional que **teóricamente** sabemos cómo integrar: habrá que factorizar el denominador como producto de factores lineales y/o cuadráticos irreducibles, hacer la descomposición en fracciones parciales correspondiente, etcétera. Observe que en el denominador hay un polinomio de grado 6, y en principio entonces, la descomposición en fracciones simples nos conduciría a resolver

un sistema de 6 ecuaciones con 6 incógnitas. Además, se nos presenta el problema no sencillo de factorizar el polinomio de grado $5t^4 + 2t^2 + 5$, el cual debe ser el producto de dos factores cuadráticos irreducibles (¿por qué?)

Veamos que la sustitución $\tan x = t$ nos conduce a un problema menos complicado. Según esta sustitución, tenemos (con la ayuda de un triángulo rectángulo con un ángulo agudo igual a x cuya tangente es t):

$$\operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad \text{y} \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

y, como $x = \arctan t$, también tenemos $dx = \frac{1}{1+t^2}dt$. Entonces:

$$\int \frac{\cos^2 x}{2\operatorname{sen}^2 x + 4\cos^2 x + 1}dx \overset{\tan x = t}{\longrightarrow} = \int \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}{2\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 + 1}\left(\frac{1}{1+t^2}dt\right)$$

$$= \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t^2}{1+t^2} + \frac{4}{1+t^2} + 1}\left(\frac{1}{1+t^2}dt\right) = \int \frac{1}{(3t^2+5)(1+t^2)}dt.$$

Es claro que el trabajo que se avecina con la integral que obtuvimos es más simple que el que hubiéramos tenido que hacer con la sustitución universal. Hagámoslo:

$$\frac{1}{(3t^2+5)(1+t^2)} = \frac{At+B}{3t^2+5} + \frac{Ct+D}{1+t^2}$$

de donde:

$$\begin{aligned} 1 &= (At+B)(1+t^2) + (Ct+D)(3t^2+5) \\ &= At + At^3 + B + Bt^2 + 3Ct^3 + 5Ct + 3Dt^2 + 5D \\ &= (A+3C)t^3 + (B+3D)t^2 + (A+5C)t + B + 5D. \end{aligned}$$

Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} A + 3C = 0 \\ B + 3D = 0 \\ A + 5C = 0 \\ B + 5D = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = 0 \\ B = -\frac{3}{2} \\ C = 0 \\ D = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

La descomposición queda como:

$$\frac{1}{(3t^2+5)(1+t^2)} = \frac{-\frac{3}{2}}{3t^2+5} + \frac{\frac{1}{2}}{1+t^2}.$$

La integral queda entonces:

$$\int \frac{\cos^2 x}{2\operatorname{sen}^2 x + 4\cos^2 x + 1}dx \overset{\tan x = t}{\longrightarrow} = \int \frac{1}{(3t^2+5)(1+t^2)}dt$$

$$= \int \left(\frac{-\frac{3}{2}}{3t^2+5} + \frac{\frac{1}{2}}{1+t^2} \right) dt = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+\frac{5}{3}} dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{3}}}\right) \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{\frac{5}{3}}}\right) + \frac{1}{2}\arctan t$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} \arctan\left(\sqrt{\frac{3}{5}} \tan x\right) + \frac{1}{2} \arctan \tan x$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} \arctan\left(\sqrt{\frac{3}{5}} \tan x\right) + c.$$

⋆

Un último ejemplo, en el que una sustitución adecuada conduce a resolver una integral de una función racional.

EJEMPLO 18.4.7. Calcule la integral $\int \frac{1}{e^{2x}+8e^x+12} dx$.

SOLUCIÓN. En el denominador de la función a integrar se encuentran involucradas funciones exponenciales e^x, cuya derivada es ella misma. Para buscar esta derivada, multiplicamos y dividimos el integrando por e^x, y hacemos el cambio de variable $z = e^x$, quedándonos:

$$\int \frac{1}{e^{2x}+8e^x+12} dx = \int \frac{1}{e^{2x}+8e^x+12}\left(\frac{e^x}{e^x}\right) dx$$

$$= \int \frac{1}{e^x(e^{2x}+8e^x+12)}(e^x dx) \overset{z=e^x}{=\!=} \int \frac{1}{z(z^2+8z+12)} dz.$$

Tenemos ahora la integral de la función racional $f(z) = \frac{1}{z(z^2+8z+12)}$. Como el denominador de esta función es $z(z^2+8z+12) = z(z+2)(z+6)$, la descomposición como suma de fracciones simples se ve como:

$$\frac{1}{z(z+2)(z+6)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+2} + \frac{C}{z+6}.$$

Pasando a multiplicar el denominador al lado derecho, se obtiene:

$$1 = A(z+2)(z+6) + Bz(z+6) + Cz(z+2)$$

de donde:

$$\begin{aligned} z=0 &\Rightarrow 1=12A &\Rightarrow A=\tfrac{1}{12} \\ z=-2 &\Rightarrow 1=-8B &\Rightarrow B=-\tfrac{1}{8} \\ x=-6 &\Rightarrow 1=24C &\Rightarrow C=\tfrac{1}{24}. \end{aligned}$$

La descomposición se ve como:

$$\frac{1}{z(z+2)(z+6)}=\frac{\frac{1}{12}}{z}+\frac{-\frac{1}{8}}{z+2}+\frac{\frac{1}{24}}{z+6}.$$

Entonces:

$$\int\frac{1}{z(z+2)(z+6)}dz=\frac{1}{12}\int\frac{1}{z}dz-\frac{1}{8}\int\frac{1}{z+2}dz+\frac{1}{24}\int\frac{1}{z+6}dz$$

$$=\frac{1}{12}\ln|z|-\frac{1}{8}\ln|z+2|+\frac{1}{24}\ln|z+6|+c.$$

Como $z=e^x$, la integral original queda como:

$$\int\frac{1}{e^{2x}+8e^x+12}dx\overset{z=e^x}{=\!=\!=}\int\frac{1}{z(z^2+8z+12)}dz$$

$$=\frac{1}{12}\ln|z|-\frac{1}{8}\ln|z+2|+\frac{1}{24}\ln|z+6|+c$$

$$=\frac{1}{12}\ln e^x-\frac{1}{8}\ln(e^x+2)+\frac{1}{24}\ln(e^x+6)+c$$

$$=\frac{1}{12}x-\frac{1}{8}\ln(e^x+2)+\frac{1}{24}\ln(e^x+6)+c.$$

⋆

Con lo que hemos discutido en el capítulo anterior y en el presente, tenemos ya un buen arsenal para poder derribar una gran cantidad de problemas de cálculo de integrales indefinidas. En los ejercicios de esta sección, proponemos, a manera de recapitulación, 100 ejercicios de integrales por resolver, involucrando desde las ideas y métodos más sencillos vistos en el capítulo 14, hasta los que acabamos de estudiar en esta sección, además de algunos ejercicios adicionales de ecuaciones diferenciales en cuya solución se tiene que echar mano de las ideas y métodos mencionados.

EJERCICIOS (18.4)

En los ejercicios 1 al 100, calcule la integral indefinida indicada.

1. $\int \frac{x-1}{x} dx.$
2. $\int \frac{x}{x-1} dx.$
3. $\int \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 dx.$
4. $\int \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 dx.$
5. $\int \sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})^2 dx.$
6. $\int \frac{2+x+3\arctan^3 x}{1+x^2} dx.$
7. $\int \frac{1+3\ln x}{x} dx.$
8. $\int \frac{e^{4x}+3e^{2x}+e^{-x}}{4e^x} dx.$
9. $\int \frac{\ln(2x)+\ln^2 x}{3x} dx.$
10. $\int \operatorname{senh}(3x+8) dx.$
11. $\int e^x \cosh x dx.$
12. $\int e^{2x} \cos(4e^{2x}+5) dx.$
13. $\int \tan(\ln x)\frac{dx}{x}.$
14. $\int \operatorname{senh}^2 \ln x dx.$
15. $\int (\operatorname{sen} 3x + \cos 3x)^2 dx.$
16. $\int \frac{(1.5)^x + x^{1.5}}{3} dx.$
17. $\int \frac{e^x}{\operatorname{sen} e^x} dx.$
18. $\int x \sec^2(8x^2+1) dx.$
19. $\int x^2\sqrt{1+4x^3} dx.$
20. $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$
21. $\int 2^x x^2 dx.$
22. $\int \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\cos x + \operatorname{sen} x + 8} dx.$
23. $\int \sec^4(3x+2) dx.$
24. $\int \frac{2+5\tan^3 x}{\cos^2 x} dx.$
25. $\int \frac{\ln\ln x}{x\ln x} dx.$
26. $\int \frac{\ln\ln x}{x} dx.$
27. $\int \frac{1}{x\cos\ln x} dx.$
28. $\int \frac{1}{\sqrt{17-8x^2}} dx.$
29. $\int \frac{x}{(x^2+100)^2} dx.$
30. $\int \frac{x^2}{(x^2+100)^2} dx.$
31. $\int \frac{x^3}{(x^2+100)^2} dx.$
32. $\int x^2 \operatorname{sen}^2 x^3 dx.$
33. $\int x^3 \operatorname{sen}^2 x^2 dx.$
34. $\int \frac{x^2}{(4-x)^3} dx.$
35. $\int \frac{1}{x^2+x+1} dx.$
36. $\int \frac{7x+9}{3x^2+2x+5} dx.$
37. $\int \frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}} \left(\frac{dx}{x}\right).$
38. $\int \frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}} \left(\frac{dx}{x^2}\right).$
39. $\int \frac{e^{\ln x + \frac{1}{x}}}{x^3} dx.$
40. $\int x \operatorname{sen} 3x \cos 3x dx.$
41. $\int (x \operatorname{sen} x + 1)^2 dx.$
42. $\int (2x^2+2x)e^{2x-1} dx.$

43. $\int x(2\ln x+1)dx.$ **44.** $\int \frac{24x-13}{(3x-2)(2x-1)}dx.$ **45.** $\int \frac{x^2+3x+7}{(x^2+1)(x+2)}dx.$

46. $\int e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)dx.$ **47.** $\int \arctan\sqrt{x-1}dx.$ **48.** $\int \sqrt{\frac{x-2}{x-3}}dx.$

49. $\int 3^x e^x \operatorname{sen} x dx.$ **50.** $\int e^{2x}\left(2x^{-3}-3x^{-4}\right)dx.$ **51.** $\int \left(\frac{2x}{\ln x}-\frac{x}{\ln^2 x}\right)dx.$

52. $\int \frac{x}{x^4-1}dx.$ **53.** $\int \frac{e^x}{\ln x}\left(1-\frac{1}{x\ln x}\right)dx.$ **54.** $\int \frac{1}{x(x^4-1)}dx.$

55. $\int \ln\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)dx.$ **56.** $\int \frac{1}{x^4-16}dx.$ **57.** $\int x\ln\left(1+\sqrt{9+x^2}\right)dx.$

58. $\int \frac{2x(1-2x^6)}{(1+x^6)^2}dx.$ **59.** $\int \frac{2(x^3+x+1)}{(1+x^2)}dx.$ **60.** $\int \frac{x^2+4x+1}{(x^2+x+1)^2}dx.$

61. $\int \frac{2(x^2+3x+1)}{(x^2+2x+2)^2}dx.$ **62.** $\int \frac{2x(2x^2+3)}{(x^2+1)(x^2+2)}dx.$ **63.** $\int \frac{1}{3\operatorname{sen} x+4}dx.$

64. $\int (\operatorname{sen} x+\cos x)^3dx.$ **65.** $\int \frac{1}{3\operatorname{sen}^2 x+4}dx.$ **66.** $\int \frac{\operatorname{sen} x}{4\operatorname{sen} x+5}dx.$

67. $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{4\operatorname{sen}^2 x+5}dx.$ **68.** $\int \frac{\operatorname{sen} x}{4\operatorname{sen}^2 x+5}dx.$ **69.** $\int \frac{2}{3+\tan^2 x}dx.$

70. $\int \frac{\tan x}{3\tan x+8}dx.$ **71.** $\int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+5}dx.$ **72.** $\int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{(x-1)^3}+5}dx.$

73. $\int \frac{1}{e^{3x}+1}dx.$ **74.** $\int \frac{e^{2x}}{e^{3x}+4e^x-5}dx.$ **75.** $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^3 x}dx.$

76. $\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^2 x}dx.$ **77.** $\int \operatorname{sen}^2 x\cos^3 x dx.$ **78.** $\int \operatorname{sen}^3 x\cos^5 x dx.$

79. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^5 x}dx.$ **80.** $\int \frac{\cos^5 x}{\operatorname{sen}^3 x}dx.$ **81.** $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^3 x\cos^5 x}dx.$

82. $\int \operatorname{sen}^2 x\cos^4 x dx.$ **83.** $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^4 x}dx.$ **84.** $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x\cos^4 x}dx.$

85. $\int \frac{\cos^4 x}{\operatorname{sen}^2 x}dx.$ **86.** $\int x^2e^{2x}\operatorname{sen} x dx.$ **87.** $\int x^2e^{3x}\operatorname{senh}(2x)dx.$

88. $\int \frac{4(x^2-4x+7)}{15-8x-14x^2+8x^3-x^4}dx.$ **89.** $\int e^x\left((x^2+2x)\ln x+x\right)dx.$

90. $\displaystyle\int \frac{e^x(x^2-x+1)}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}dx.$ **91.** $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x(3\cos x+2)}dx.$

92. $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen} x+6\cos x-2}dx.$ **93.** $\displaystyle\int \frac{1+\cos x}{3\operatorname{sen} x+2\cos x+7}dx.$

94. $\displaystyle\int \left(\operatorname{arcsen} x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx.$ **95.** $\displaystyle\int \frac{4x^3+7x^2-14x-2}{(x^2+2x+2)(x^2-3x+2)}dx.$

96. $\displaystyle\int \frac{3x^3+12x^2+20x+15}{(x^2+2x+2)(1-x^2)}dx.$ **97.** $\displaystyle\int \frac{2x(2x^6+3x^4+x^2-2)}{(x^4+2x^2+2)(x^4+3x^2+2)}dx.$

98. $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen} x(3\cos^2 x+2\cos x+1)}dx.$

99. $\displaystyle\int \frac{x^6+6x^5+7x^4+12x^3+8x^2+6x-16}{(x^2+4)^2(x^2+1)^2}dx.$

100. $\displaystyle\int e^{\operatorname{sen} x}(\cos x+x\operatorname{sen} x+x\cos^2 x)\sec^2 x\,dx.$

En los ejercicios 101 al 120, determine una función $y=f(x)$ que cumpla la condición dada.

101. $y'=0.$ **102.** $y''=0.$ **103.** $y''=1.$

104. $y^{(5)}=5.$ **105.** $y'''=x.$ **106.** $y^{(4)}=3x+2.$

107. $y''=3x^2+1.$ **108.** $y^{(7)}=e^x.$ **109.** $y'''=xe^x.$

110. $y''=e^x\cos x.$ **111.** $y''=x\operatorname{sen} x.$ **112.** $y''=(x^2-2x+1)e^{-x}.$

113. $y'''=x^2\cos x.$ **114.** $y''=\ln x.$ **115.** $y''=x^2\ln x.$

116. $y''=\arctan x.$ **117.** $y''=x\sqrt{1+x^2}.$ **118.** $y''=xe^x\operatorname{sen} x.$

119. $y'''=\dfrac{1}{(3x+2)^5}.$ **120.** $y'''=\dfrac{x}{(x^2-1)^2}.$

121. Demuestre que $\displaystyle\int \frac{1}{(\operatorname{sen} x+\cos x)^2}dx=\frac{1}{2}\tan\left(x-\tfrac{\pi}{4}\right)+c.$

122. Demuestre que $\displaystyle\int \frac{1}{(\operatorname{sen} x-\cos x)^2}dx=\frac{1}{2}\tan\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right)+c.$

123. Demuestre que $\displaystyle\int \frac{1}{a^2\cos^2 x+b^2\operatorname{sen}^2 x}dx=\frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{b}{a}\tan x\right)+c.$

124. Use el resultado del ejercicio anterior para obtener que $\int \frac{1}{a^2+b^2\cos^2 x}dx = \frac{1}{a\sqrt{a^2+b^2}}\arctan\left(\frac{a\tan x}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)+c$.

125. Demuestre que $\int \frac{1}{a^2\cos^2 x - b^2\operatorname{sen}^2 x}dx = \frac{1}{2ab}\ln\left(\frac{b\tan x + a}{b\tan x - a}\right)+c$.

En cada uno de los ejercicios 126 al 134, demuestre (usando integración por partes), la validez de las fórmulas de reducción indicadas (llamadas así por establecer relaciones entre integrales I_n que dependen de un parámetro n, en términos de integrales del mismo tipo I_k con $k < n$).

126. $I_n = \int (a^2-x^2)^n dx = \frac{x(a^2-x^2)^n}{2n+1} + \frac{2na^2}{2n+1}I_{n-1}$.

127. $I_n = \int \ln^n x dx = x\ln^n x - nI_{n-1}$.

128. $I_n = \int x^m \ln^n x dx = \frac{x^{m+1}\ln^n x}{m+1} - \frac{n}{m+1}I_{n-1}, (m \neq -1)$.

129. $I_n = \int x^n e^x dx = x^n e^x - nI_{n-1}$.

130. $I_n = \int \operatorname{sen}^n x dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x}{n} + \frac{n-1}{n}I_{n-2}$.

131. $I_n = \int \cos^n x dx = \frac{\cos^{n-1} x\operatorname{sen} x}{n} + \frac{n-1}{n}I_{n-2}$.

132. $I_n = \int e^{ax}\operatorname{sen}^n x dx = \frac{e^{ax}\operatorname{sen}^{n-1} x(a\operatorname{sen} x - n\cos x)}{a^2+n^2} + \frac{n(n-1)}{a^2+n^2}I_{n-2}$.

133. $I_n = \int \tan^n x dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - I_{n-2}$.

134. $I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{x^2+a}}dx = \frac{1}{n}x^{n-1}\sqrt{x^2+a} - \frac{n-1}{n}I_{n-2}$.

135. Demuestre la validez de la fórmula de integración por partes para la integral definida: si u y v son funciones derivables, entonces:

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du.$$

En los ejercicios 136 al 160, use los resultados de los ejercicios anteriores (y, posiblemente, un cambio de variable), para calcular la integral definida indicada.

136. $\int_0^1 (1-x^2)^3 dx.$ **137.** $\int_0^{\frac{1}{4}} (1-2x^2)^4 dx.$ **138.** $\int_0^{\frac{1}{2}} (3-x^2)^5 dx.$

139. $\int_1^e \ln^4 x dx.$ **140.** $\int_1^e \ln^3 3x dx.$ **141.** $\int_e^{2e} \ln^4 2x dx.$

142. $\int_1^e x \ln^3 x dx.$ **143.** $\int_1^{e^2} (x \ln x)^4 dx.$ **144.** $\int_1^{\frac{\pi}{2}} x^2 \ln^3 2x dx.$

145. $\int_0^{e-1} x^2 \ln^3(x+1) dx.$ **146.** $\int_0^e x^3 \ln^4(2x+3) dx.$ **147.** $\int_0^1 x^3 e^x dx.$

148. $\int_0^1 x^3 e^{3x} dx.$ **149.** $\int_0^{0.25} x^4 e^{4x} dx.$ **150.** $\int_0^\pi e^x \operatorname{sen}^2 x dx.$

151. $\int_0^\pi e^{2x} \operatorname{sen}^4 2x dx.$ **152.** $\int_0^\pi e^{-2x} \operatorname{sen}^4 4x dx.$ **153.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 x dx.$

154. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 2x dx.$ **155.** $\int_0^\pi \operatorname{sen}^5 \frac{x}{2} dx.$ **156.** $\int_0^\pi \operatorname{sen}^6 x dx.$

157. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x dx.$ **158.** $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \tan^5 2x dx.$ **159.** $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} dx.$

160. $\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{2x^2+4}} dx.$

161. Sea n un entero positivo. Demuestre que:

$$\int_0^a (a^2-x^2)^n dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} a^{2n+1},$$

en donde: $(2n)!! = (2)(4)(6)...(2n)$ y $(2n+1)!! = (1)(3)(5)...(2n+1)$.

162. Sea n un entero positivo impar. Demuestre que:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{(n-1)!!}{n!!}.$$

163. Sea n un entero positivo par. Demuestre que:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2}.$$

164. Sea n un entero positivo impar. Demuestre que:

$$\int_0^{\pi} x \operatorname{sen}^n x dx = \frac{(n-1)!!}{n!!}\pi.$$

165. Sea n un entero positivo par. Demuestre que:

$$\int_0^{\pi} x \operatorname{sen}^n x dx = \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi^2}{2}.$$

En los ejercicios 166 al 175 hallar la solución general de la ecuación diferencial de variables separables dada.

166. $y' = xy(x^2 + y^2 + x^2y^2 + 1)$.

167. $e^x y' = x^2 y$.

168. $e^x \operatorname{sen} y = y' \sec x$.

169. $e^{x+y} y' = x^2$.

170. $y' xy \ln x = e^y$.

171. $y' = \dfrac{xy}{(x^2+1)(y^2+4)}$.

172. $y' = \dfrac{(x^2+1)(y^2+2)}{(x^2+4)(y^2+9)}$.

173. $y' = \dfrac{(x+1)(y+2)}{(x^2+4)(y^2+9)}$.

174. $y' = \dfrac{(x^2+1)(y^2+2)}{(x+4)(y+9)}$.

175. $\sqrt{x}y^3 y' = e^{\sqrt{x}+y^2}$.

En los ejercicios 176 al 185, determine la solución general de la ecuación diferencial lineal de primer orden dada (véase ejercicio 31 de la sección 1 del capítulo 15).

176. $y' + 2y = 3x$.

177. $3y' + 4y = e^x$.

178. $xy' + 2y = (1+x^2)^{-1}$.

179. $xy' + 3y = e^{2x}$.

180. $y' + 3xy = x^3$.

181. $y' + 2xy = x \cos x^2$.

182. $y' - y = x^3 e^x \sqrt{1+x^2}$.

183. $y' + 8y = x^2 \cos x$.

184. $(x^2+1)y' + 2xy = x \arctan x$.

185. $\sqrt{1+x^2}y' + x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}y = (9+x^2)^{-2}$.

186. Una ecuación diferencial del tipo $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, en donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones continuas dadas de x, se llama **ecuación diferencial lineal de segundo orden homogénea.** Suponga que la función $y_1 = y_1(x)$ es una solución (no idénticamente nula) de la ecuación. Es decir, suponga que $y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0$ es una identidad. Demuestre que la función $y_2 = y_2(x)$ dada por:

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)dx} dx$$

es también una solución de la ecuación. Esta fórmula es conocida como **fórmula de reducción del orden.**

En cada uno de los ejercicios 187 al 205:

a) Verifique que la función $y_1 = y_1(x)$ es una solución de la ecuación diferencial lineal de segundo orden dada.

b) Use la fórmula de reducción del orden establecida en el ejercicio 186, para obtener la función $y_2 = y_2(x)$. Verifique que esta función satisface también la ecuación diferencial dada.

187. $y'' + 5y' - 6y = 0$, $y_1 = e^x$.

188. $y'' + y = 0$, $y_1 = \operatorname{sen} x$.

189. $x^2y'' - xy' + y = 0$, $y_1 = x$.

190. $y'' + 2y' + y = 0$, $y_1 = e^{-x}$.

191. $y'' - 6y' + 9y = 0$, $y_1 = xe^{3x}$.

192. $y'' - 6y' + 8y = 0$, $y_1 = e^{2x}$.

193. $y'' + 9y = 0$, $y_1 = \cos 3x$.

194. $y'' + 7y' = 0$, $y_1 = 1$.

195. $x^2y'' + xy' - y = 0$, $y_1 = x$.

196. $y'' + 8y' + 16y = 0$, $y_1 = xe^{-4x}$.

197. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$, $y_1 = x^2$.

198. $(1 - x)y'' + xy' - y = 0$, $y_1 = x$.

199. $xy'' - (2x + 1)y' + (x + 1)y = 0$, $y_1 = x^2e^x$.

200. $x^2(1 - \ln x)y'' + xy' - y = 0$, $y_1 = \ln x$.

201. $x(x + 1)y'' - (2x + 1)y' - (x^2 + 3x + 1)y = 0$, $y_1 = x^2e^x$.

202. $y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0$, $y_1 = e^{x^2}$.

203. $xy'' - 2(x + 1)y' + (x + 2)y = 0$, $y_1 = e^x$.

204. $(\cos x - \operatorname{sen} x)y'' + (2 \operatorname{sen} x)y' - (\cos x + \operatorname{sen} x)y = 0$, $y_1 = e^x$.

205. $(x^2 \ln^2 x)y'' - 2x \ln x(\ln x + 1)y' + (2 \ln^2 x + 3 \ln x + 2)y = 0$, $y_1 = x \ln x$.

206. Una ecuación diferencial del tipo $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ en donde $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$ son funciones continuas dadas de x, se llama **ecuación diferencial lineal de segundo orden no homogénea.** Una solución particular de esta ecuación se puede calcular por medio de la **fórmula de variación de parámetros:**

$$y_p = -y_1 \int \frac{y_2 R(x)}{W(y_1, y_2)} dx + y_2 \int \frac{y_1 R(x)}{W(y_1, y_2)} dx,$$

en donde y_1 y y_2 son dos soluciones (ninguna de ellas múltiplo de la otra) de la ecuación $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ (llamada ecuación homogénea asociada), $W(y_1, y_2)$ es el **wronskiano** de y_1 y y_2, definido como:

$$W(y_1, y_2) = \det \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'.$$

Demuestre, sustituyendo directamente la fórmula de y_p anteriormente indicada, que ésta efectivamente satisface la ecuación diferencial lineal de segundo orden no homogénea $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$.

En los ejercicios 207 al 225, use la fórmula de variación de parámetros establecida en el ejercicio 206 para determinar una solución de la ecuación diferencial lineal de segundo orden no homogénea dada. (Se proporcionan las dos soluciones y_1 y y_2 de la ecuación homogénea asociada correspondiente. Observe que, según el ejercicio 186, bastaría con dar una de ellas: la otra se puede obtener con la fórmula de reducción del orden establecida en el ejercicio mencionado.)

207. $y'' + y = x$, $y_1 = \operatorname{sen} x$, $y_2 = \cos x$.

208. $y'' + 3y' - 4y = x + 2$, $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-4x}$.

209. $y'' - 2y' + y = e^{3x}$, $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$.

210. $y'' + y = \cos x$, $y_1 = \operatorname{sen} x$, $y_2 = \cos x$.

211. $y'' - y = 3e^x$, $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$.

212. $y'' - 6y' + 5y = x^2$, $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{5x}$.

213. $y'' + 6y' + 9y = xe^{-3x}$, $y_1 = e^{-3x}$, $y_2 = xe^{-3x}$.

214. $y'' + y' = \operatorname{sen}^2 x$, $y_1 = 1$, $y_2 = e^{-x}$.

215. $y'' + 16y = x \operatorname{sen} 4x$, $y_1 = \operatorname{sen} 4x$, $y_2 = \cos 4x$.

216. $y'' + 7y' + 12y = x^2 + x + 1$, $y_1 = e^{-3x}$, $y_2 = e^{-4x}$.

217. $y'' + 10y' + 16y = (2x^2 + 3x + 1)e^{-2x}$, $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = e^{-8x}$.

218. $y'' + 10y' + 25y = x^2 e^{-5x}$, $y_1 = e^{-5x}$, $y_2 = xe^{-5x}$.

219. $y'' + 2y' + 2y = e^x \cos x$, $y_1 = e^x \operatorname{sen} x$, $y_2 = e^x \cos x$.

220. $y'' - 6y' + 13y = x^2$, $y_1 = e^{3x} \operatorname{sen} 2x$, $y_2 = e^{3x} \cos 2x$.

221. $y'' - 10y' + 74y = \cos 7x$, $y_1 = e^{5x} \operatorname{sen} 7x$, $y_2 = e^{5x} \cos 7x$.

222. $y'' + y = 2 \sec^3 x$, $y_1 = \operatorname{sen} x$, $y_2 = \cos x$.

223. $y'' + 2y' + y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x^3}$, $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = xe^{-x}$.

224. $y'' + 4y = 6\tan x + 2\tan^3 x$, $y_1 = \operatorname{sen} 2x$, $y_2 = \cos 2x$.

225. $y'' - 12y' + 36y = 30x^4 e^{6x}$, $y_1 = e^{6x}$, $y_2 = xe^{6x}$.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 18

EXAMEN TIPO (A)

Calcule la integral indicada en los ejercicios 1 al 10.

1. $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2 + x + 1}\,dx.$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)}\,dx.$

3. $\displaystyle\int \frac{3x^2 + 8x - 1}{(x^2 - 1)^2}\,dx.$

4. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2 + 16}\,dx.$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{(e^{2x} + 1)e^x}\,dx.$

6. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}\,dx.$

7. $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}\,dx.$

8. $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)^4}\,dx$, descomponiendo en fracciones simples el integrando.

9. $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)^4}\,dx$, haciendo el cambio de variable $x - 1 = z$.

10. $\displaystyle\int \frac{x}{(x^4 + 3x^2 + 2)^2}\,dx$. (Sugerencia: Haga primeramente el cambio de variable $x^2 = z$.)

EXAMEN TIPO (B)

Calcule la integral indicada en los ejercicios 1 al 10.

1. $\displaystyle\int \frac{2x + 7}{(x-2)^3}\,dx.$

2. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x(\cos^2 x + 1)}\,dx.$

3. $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+4}dx.$

4. $\displaystyle\int \frac{1}{e^{3x}-1}dx.$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+\sqrt{x}+1)^2}dx.$

6. $\displaystyle\int \frac{1}{x(\ln^4 x-16)}dx.$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)}dx.$

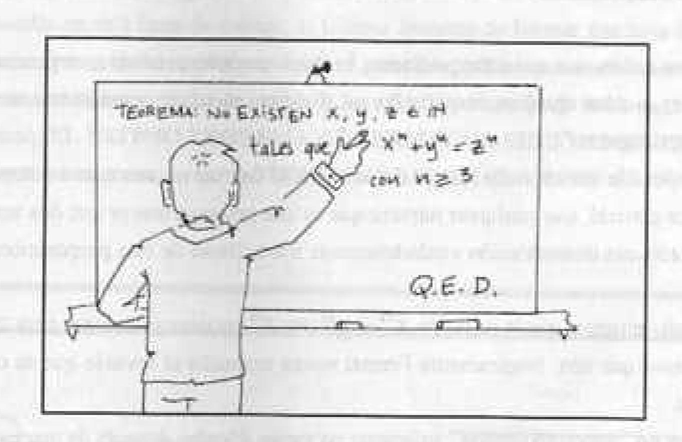
8. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+2}+3\sqrt[3]{x+2}}dx.$

9. $\displaystyle\int \frac{1}{3\operatorname{sen} x+4\cos x+5}dx.$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{3\operatorname{sen}^2 x+4\cos^2 x+5}dx.$

NOTA HISTÓRICA: FERMAT

SU ÚLTIMO TEOREMA Y UNA HISTORIA INCREÍBLE DE FIN DE SIGLO



En Matemática hay problemas que uno tarda fracciones de segundos en resolver, por ejemplo, si nos preguntamos por la derivada de la función $y = x^2$ tardaremos menos de un segundo en dar la respuesta. Hay algunos otros que quizás nos demanden algunos minutos de trabajo para poder dar con su solución. Ejemplos de ellos pueden ser algunos de los ejercicios propuestos del capítulo 5 o del capítulo 6 de este libro. Hay todavía algunos otros problemas que nos pueden llevar horas en resolver, y es probable que en este libro le hayan ya aparecido ejemplos de éstos. Existen también problemas en Matemática que pueden demandar días enteros de trabajo (el ejercicio 35 de la sección 5 del capítulo 11 puede ser un ejemplo de este tipo de problemas). Pero los hay también los que necesitan semanas o meses de trabajo intelectual para poderlos resolver. O años. Normalmente una tesis doctoral en Matemática es la solución de un problema "de un par de años". En la nota histórica del capítulo 3 dimos un ejemplo de un problema (expresar en radicales las raíces de una ecuación polinomial de grado mayor o igual que cinco) que estuvo varios cientos de años sin resolver, hasta que alguien demostró que ya no era necesario seguir buscando la solución, porque ésta no existía. En esta nota histórica, la última de este libro, queremos hablar de uno de los problemas más famosos en Matemática, que a su vez fue un problema que tardó alrededor

de tres siglos y medio en resolverse, y que a nosotros, los que vivimos este fin de siglo XX y (probablemente) el inicio del XXI, nos ha tocado la suerte de ser testigos de su solución. Hablaremos del célebre ÚLTIMO TEOREMA DE FERMAT.

Pierre de Fermat (1601-1665) fue un reconocido matemático francés que hizo aportaciones relevantes en la Teoría de Probabilidades y, sobre todo, en lo que ahora conocemos como Teoría de Números. Se le considera de hecho uno de los iniciadores de esta rama de la Matemática contemporánea. Como estudioso que era de la ciencia numérica, Fermat estudió profundamente una de las obras maestras de la Matemática griega (siglo III d.C.). Nos referimos a la "Arithmetica" de Diofanto. En ella se estudian lo que hoy conocemos como "Ecuaciones Diofantinas", que en general, son ecuaciones en las que solamente se involucran números enteros positivos (naturales). Ejemplos de ellas son ecuaciones del tipo $x^n + y^n = z^n$ en donde n es un número natural dado y x, y y z son (las incógnitas) también números naturales. El objetivo del estudio de estas ecuaciones es encontrar valores de las incógnitas x, y y z que la satisfagan. Por ejemplo, poniendo $n = 1$ en la ecuación $x^n + y^n = z^n$, ésta nos lleva a estudiar la ecuación $x + y = z$, la cual tiene una infinidad de soluciones triviales (por ejemplo, $x = 2$, $y = 5$ y $z = 7$). El caso $n = 2$ no es tan simple, pero también había sido ya estudiado por los pitagóricos: se trata de encontrar soluciones en los enteros positivos de la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$. El lector debe identificar esta expresión como el Teorema de Pitágoras en un triángulo rectángulo de catetos x y y, e hipotenusa z. Existen también una infinidad de soluciones en este caso. De hecho, conociendo una de ellas, por ejemplo $x = 3$, $y = 4$ y $z = 5$ (pues $3^2 + 4^2 = 5^2$), podemos construir una infinidad de soluciones de la forma $x = 3k$, $y = 4k$ y $z = 5k$, con k entero positivo (de donde surge, por ejemplo, la solución $x = 6$, $y = 8$, $z = 10$). Era natural preguntarse si para el caso $n = 3$, es decir, para la ecuación $x^3 + y^3 = z^3$, se podían encontrar soluciones enteras positivas. Esta pregunta se la hizo Fermat al estudiar la obra de Diofanto. Se sabe que en el margen de su ejemplar de la Arithmetica (ejemplar que desgraciadamente se extravió), Fermat anotó la siguiente frase, que transcribimos en latín, tal y como Fermat la escribió:

"Cubem autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos ejusdem nominis fas est dividire, cujus rei demonstrationem mirabilem sana detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet."

("Por otra parte, es imposible que un cubo sea igual a la suma de dos cubos, una cuarta potencia sea igual a la suma de dos cuartas potencias, o, en general, que cualquier número que es una potencia mayor que dos sea la suma de dos números de esa forma. He encontrado una demostración verdaderamente maravillosa de esta proposición para la cual este margen es demasiado estrecho.")

Fermat estaba afirmando entonces que la ecuación $x^n + y^n = z^n$ no tiene soluciones para x, y y z enteros positivos, cuando n es un entero mayor que dos. Seguramente Fermat nunca sospechó el revuelo que su comentario iba a provocar en los siguientes 350 años.

El hecho es que Fermat no "encontró tiempo" suficiente en varias décadas después de que escribió tal comentario para tomar una hoja limpia, sin márgenes estrechos, y escribir la demostración que decía tener.

El hecho es que esa conjetura, que por el respeto y cariño que se tiene a Fermat ha sido conocida como "El Último Teorema de Fermat" (¡sin ser un teorema!), ha ocupado el trabajo intelectual de muchísimos matemáticos que han dejado su vida entera buscando una demostración de la afirmación de Fermat —sin conseguirlo— (en esta lista de matemáticos se encuentran varios de los gigantes de la Matemática de los siglos XVIII y XIX, como Euler y Gauss, los cuales pudieron obtener solamente resultados parciales de la demostración, —para algunos valores de n).

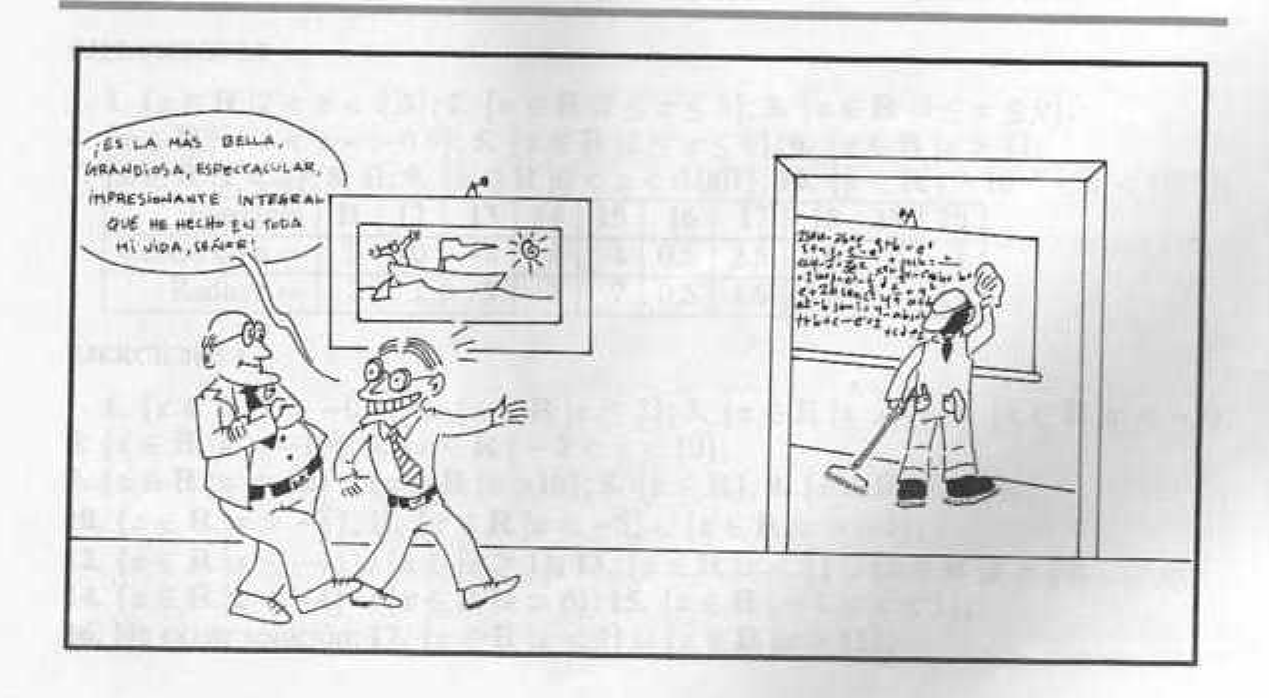
El hecho es que hasta el año de 1993, los esfuerzos de los matemáticos por conseguir una demostración del Último Teorema de Fermat solamente habían conseguido probar que para "muchos" valores de n efectivamente el Teorema era cierto: para varios cientos de miles de valores de n se sabía ya que no existían enteros positivos x, y, z tales que $x^n + y^n = z^n$. Sin embargo, el Teorema afirma que para **ninguna** n mayor que 2, la ecuación $x^n + y^n = z^n$ tiene soluciones enteras positivas. Y esta afirmación seguía sin ser demostrada.

El hecho es que, hasta ese año de 1993, el Último Teorema de Fermat había roto el récord de "demostraciones fallidas" hechas por matemáticos de este siglo: con toda la poderosa herramienta matemática desarrollada en el siglo XX se intentaba,

por varios caminos, establecer una demostración del Teorema. Muchos matemáticos creyeron tenerla. Quizás gritaban como Arquímedes: "¡Eureka!" Enviaban su demostración para arbitraje (una comisión internacional que avala la validez de los resultados nuevos en Matemática), y, en poco tiempo, los árbitros encontraban errores en los argumentos empleados. Se dice que la comisión de árbitros, con el fin de evitarse tanto trabajo al redactar las contestaciones de los demostradores del Teorema, ya habían mandado imprimir unos formatos que decían: "Estimado/a Sr./Sra.____________: Hemos recibido su demostración del Último Teorema de Fermat ... En la línea______ página______ encontrará el primer error... ."

El hecho es que en el mes de junio de 1993, el matemático de 40 años Andrew Wiles, formado en la Universidad de Cambridge (Inglaterra) y profesor de la Universidad de Princeton (Estados Unidos), pidió dar una serie de conferencias en su Alma Mater. Le programaron tres largas pláticas (lunes, miércoles y viernes) en el *"Newton Institute of Mathematical Sciences"* de la Universidad de Cambridge. En su primera plática sembró cierta expectación entre los oyentes, la cual creció en la conferencia del miércoles. El viernes, ante un gran auditorio en el que se encontraba el asesor de su tesis doctoral (Dr. John Coates) y el director del Instituto (Dr. Peter Goddard), Wiles comenzó pausadamente su plática. Después de escribir una serie de resultados en el pizarrón, los cuales eran identificados como eslabones de la demostración del Último Teorema de Fermat, Wiles terminó escribiendo el final de su argumento que demostraba por completo el Teorema. Con una sonrisa nerviosa, Wiles dejó el gis y dijo: "será mejor que pare aquí", saliendo del aula. Con miradas nerviosas entre los asistentes, se hizo un tenso silencio, que fue roto segundos después por algunos tímidos aplausos. Teléfonos, faxes y correos electrónicos se pusieron a funcionar, mandando mensajes a los principales centros matemáticos de todo el mundo. La noticia se recibió con muchas reservas. ¿Otra demostración fallida? Todo apuntaba a que en esta ocasión no sería así, pues el trabajo de Wiles se basaba en cierta conjetura (conocida como la "conjetura de Taniyama-Shimura"), y en ciertos trabajos posteriores (acerca de unos objetos matemáticos conocidos como "curvas elípticas"), y se sabía que probando ciertas afirmaciones producidas en esta línea de trabajo, el Último Teorema de Fermat quedaría demostrado. Y eso fue lo que hizo Wiles. De cualquier forma, hubo mucha prudencia al principio, y fue hasta varios meses después cuando se dio la noticia oficial: después de tres siglos y medio de espera (y para júbilo y regocijo de todos quienes nos dedicamos a esta bellísima ciencia matemática), **EL ÚLTIMO TEOREMA DE FERMAT HA SIDO DEMOSTRADO.**

A partir de ahora, tal teorema es conocido como TEOREMA DE FERMAT-WILES.



RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS

RESPUESTAS AL CAPÍTULO 1

EJERCICIOS 1.1

1. V; **2.** F; **3.** V; **4.** F; **5.** F;

Ejercicio	x	¿Racional? ¿Irracional?	¿Positivo? ¿Negativo?	$\|x\|$	Si $x \in$ Q, su expresión como cociente de dos enteros
6	$0.\overline{1}$	Racional	Positivo	x	$\frac{1}{9}$
7	$-0.1010010001\ldots$	Irracional	Negativo	$-x$	———
8	$0.10101010\ldots$	Racional	Positivo	x	$\frac{10}{99}$
9	$12.12\overline{31}$	Racional	Positivo	x	$\frac{120019}{9900}$
10	$1-3.121212\ldots$	Racional	Negativo	$-x$	$-\frac{210}{99}$

13. $<$; **14.** $>$; **15.** $<$; **16.** $>$; **17.** $<$; **18.** $<$; **19.** $>$; **20.** $>$; **21.** $<$; **22.** $>$; **23.** $>$.

EJERCICIOS 1.2

1. $\{x \in \mathbf{R} \,|2 < x < 2.3\}$; **2.** $\{x \in \mathbf{R} \,|2 \le x \le 5\}$; **3.** $\{x \in \mathbf{R} \,|0 \le x \le 9\}$;
4. $\{x \in \mathbf{R} \,|-1 < x < -0.5\}$; **5.** $\{x \in \mathbf{R} \,|2 \le x \le 6\}$; **6.** $\{x \in \mathbf{R} \,|x > 1\}$;
7. $\{x \in \mathbf{R} \,|x < 3\}$; **8.** R; **9.** $\{x \in \mathbf{R} \,|0 < x < 0.001\}$; **10.** $\{x \in \mathbf{R} \,|-10^{-5} < x < 10^{-5}\}$;

Ejercicio	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
Centro en $a =$	2	0	-5	4	4	0.5	2.5	6.5	5	1
Radio $r =$	3	1	9	3	7	0.5	4.5	6.5	6	11

EJERCICIOS 1.3

1. $\{x \in \mathbf{R} \,|x > -0.5\}$; **2.** $\{x \in \mathbf{R} \,|x \le 3\}$; **3.** $\{x \in \mathbf{R} \,|x > \frac{8}{3}\}$; **4.** $\{x \in \mathbf{R} \,|x < -2\}$;
5. $\{x \in \mathbf{R} \,|x > -10\}$; **6.** $\{x \in \mathbf{R} \,|-2 < x < 10\}$;
7. $\{x \in \mathbf{R} \,|x < -2\} \cup \{x \in \mathbf{R} \,|x > 10\}$; **8.** $\{x \in \mathbf{R}\}$; **9.** $\{x \in \mathbf{R} \,|x < \frac{5}{2}\}$;
10. $\{x \in \mathbf{R} \,|x > -\frac{2}{5}\}$; **11.** $\{x \in \mathbf{R} \,|x < -3\} \cup \{x \in \mathbf{R} \,|x > -1\}$;
12. $\{x \in \mathbf{R} \,|x \le -4\} \cup \{x \in \,|x \ge 1\}$; **13.** $\{x \in \mathbf{R} \,|x < \frac{2}{3}\} \cup \{x \in \mathbf{R} \,|x > \frac{3}{2}\}$;
14. $\{x \in \mathbf{R} \,|x < -4\} \cup \{x \in \mathbf{R} \,|x > 6\}$; **15.** $\{x \in \mathbf{R} \,|-1 < x < 1\}$;
16. No existe solución; **17.** $\{x \in \mathbf{R} \,|x < 2\} \cup \{x \in \mathbf{R} \,|x > 11\}$;

18. $\{x \in \mathbf{R} \,|x < -7\} \cup \{x \in \mathbf{R} \,|x > -5\}$; **19.** $\{x \in \mathbf{R} \,| -2 < x < 2\}$;
20. $\{x \in \mathbf{R} \,| -\frac{\sqrt{21}+5}{2} < x < \frac{\sqrt{21}-5}{2}\}$; **21.** $\{x \in \mathbf{R} \,| -1 < x < 2\}$;
22. $\{x \in \mathbf{R} \,|x < 6\} \cup \{x \in \mathbf{R} \,|x > 10\}$; **23.** $\{x \in \mathbf{R} \,| -\frac{3}{2} < x < 2\}$;
24. $\{x \in \mathbf{R} \,|x < -\frac{25}{7}\} \cup \{x \in \mathbf{R} \,|x > -3\}$; **25.** $\{x \in \mathbf{R} \,| -\frac{23}{8} < x < -\frac{7}{3}\}$.

EJERCICIOS 1.4

1. $f(0) = -2, f(1) = 3$; **2.** $f(-a) = -a^3 + 2a + 4$; **3.** $\frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) = 2x^4 + x^2 + 4$, $\frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = -x^3 + x$; **4.** $f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2, x \neq 0$; **5.** $f(0) = 0$; **6.** $f(2) = f(-2) = 2$; **7.** $f(1) = \frac{1}{2}, f(0) = 0$; **8.** $f(1) = 0, f(0) = -1$; **9.** $f(1) = 1, f(0) = 0$; **10.** $f(0) = 0$, $f(1) = 7, f(4) = 50$; **11.** $f(-2) = -1, f(0) = -4, f(3) = 11$; **12.** $f(0) = 2, f(1) = 5$; **13.** $f(1) = f(3) = 4$; **14.** $f(-3) = -6, f(0) = 5, f(3) = 2$; **15.** $f(-1) = 1, f(0) = 0$, $f(1) = 1$; **16.** $f(-.4) = \frac{3}{2}, f(2) = f(3) = 4, f(10) = 10$; **17.** $f(-1) = 0, f(2) = 2$; **18.** $f(-1) = \sqrt{2}, f(-0.1) = \sqrt{1.1}, f(0.1) = 10, f(5) = 25$; **19.** $f(-1) = -1, f(1) = 2$, $f(2) = 3, f(3) = 4$; **20.** $f(-1.1) = -1.1, f(0) = -1, f(1) = 2, f(6) = 18$; **21.** $f(5) = 6$; **22.** $f(x) = 5x^2 - 3x - 2$; **23.** $f(x) = \frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{17}{4}$; **26.** $\{x \in \mathbf{R}\}$; **27.** $\{x \in \mathbf{R}\}$; **28.** $\{x \in \mathbf{R}\}$; **29.** $\{x \in \mathbf{R} \mid x \neq \pm\sqrt{3}\}$; **30.** $\{x \in \mathbf{R} \,|x > -2\}$; **31.** $\{x \in \mathbf{R} \,|x > 0\}$; **32.** $\{x \in \mathbf{R} \,|0 < x < 1\}$; **33.** $\{x \in \mathbf{R} \,|x \leq -2\} \cup \{x \in \mathbf{R} \,|x \geq 2\}$; **34.** $\{x \in \mathbf{R} \,| -2 < x < 2\}$; **35.** $\{x \in \mathbf{R}\}$; **36.** $\{x \in \mathbf{R} \,|x < 0\} \cup \{x \in \mathbf{R} \,|x > 1\}$; **37.** $\{x \in \mathbf{R} \,| -1 < x < 1\}$; **38.** $\{x \in \mathbf{R} \,|x > 1\}$; **39.** $\{x \in \mathbf{R}\}$; **40.** $\{x \in \mathbf{R} \,|x > 0\}$.

EJERCICIOS 1.5

1. No puede ser la gráfica de una función $y = f(x)$; **2.** No puede ser la gráfica de una función $y = f(x)$; **3.** No puede ser la gráfica de una función $y = f(x)$; **4.** Es la gráfica de la función $y = f(x) = \frac{1}{3}(4-x)$; **5.** Es la gráfica de la función $y = f(x) = \frac{4}{x}$; **6.** Es la gráfica de la función $y = f(x) = \frac{1}{3}(1 - x^2)$; **7.** No puede ser la gráfica de una función $y = f(x)$; **8.** No puede ser la gráfica de una función $y = f(x)$; **9.** Es la gráfica de la función $y = f(x) = -1$; **10.** Es la gráfica de la función $y = f(x) = \sqrt{4 - (x-1)^2}$; **11.** p pertenece, q no pertenece; **12.** Ninguno pertenece; **13.** Ambos pertenecen; **14.** p pertenece, q no pertenece; **15.** p pertenece, q no pertenece; **16.** p no pertenece, q pertenece; **17.** p no pertenece, q pertenece; **18.** Ambos pertenecen; **19.** Ambos pertenecen; **20.** Ninguno pertenece; **21.** $k = -2$; **22.** $a = 1, b = 0$; **23.** $a = 1, b = c = 0$; **24.** $\left(-\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$.

EJERCICIOS 1.6

1. -3; **2.** -15; **3.** 0; **4.** -36; **5.** $-3(f(x) + 4)$; **6.** 0; **7.** 3; **8.** 34; **9.** $-\frac{27}{28}$; **10.** $\frac{3}{8}f(x)$; **11.** 2; **12.** 3; **13.** 15; **14.** $-8(1 + x^2)$; **15.** $2(3 + 6x - 4x^2)$; **16.** $\frac{5}{9}$; **17.** $-\frac{16}{23}$; **18.** -2; **19.** -2; **20.** -17; **21.** $3x^4 + 6x^2 + 10$; **22.** 1; **23.** -1159; **24.** $-\frac{5}{4}$; **25.** $\frac{5(x^{16}+4x^{12}+8x^8+8x^4+2)}{14(6x^4+5)}$;

26. $(f+g)(x) = 2x^2 - 1$, $(fg)(x) = x^4 - x^2 - 12$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2+3}{x^2-4}$, $(f \circ g)(x) = x^4 - 8x^2 + 19$, $(g \circ f)(x) = x^4 + 6x^2 + 5$. El dominio de $f+g$, fg, $f \circ g$ y $g \circ f$ son todos los reales. El dominio de $\frac{f}{g}$ es $\mathbf{R} - \{\pm 2\}$;

27. $(f+g)(x) = x^3 + 2x^2$, $(fg)(x) = 2x^5$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{2}x$, $(f \circ g)(x) = 8x^6$, $(g \circ f)(x) = 2x^6$. El dominio de $f+g$, fg, $f \circ g$ y $g \circ f$ son todos los reales. El dominio de $\frac{f}{g}$ es $\mathbf{R} - \{0\}$;

28. $(f+g)(x) = x^4 + x^3 - 1$, $(fg)(x) = x^3(x^4-1)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^3}{x^4-1}$, $(f \circ g)(x) = (x^4-1)^3$, $(g \circ f)(x) = x^{12} - 1$. El dominio de $f+g$, fg, $f \circ g$ y $g \circ f$ son todos los reales. El dominio de $\frac{f}{g}$ es $\mathbf{R} - \{\pm 1\}$;

29. $(f+g)(x) = 2x+5$, $(fg)(x) = x^2+5x+6$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x+2}{x+3}$, $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x+5$. El dominio de $f+g$, fg, $f \circ g$ y $g \circ f$ son todos los reales. El dominio de $\frac{f}{g}$ es $\mathbf{R} - \{-3\}$;

30. $(f+g)(x) = 10x+3$, $(fg)(x) = 21x^2+29x-10$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{3x+5}{7x-2}$, $(f \circ g)(x) = 21x-1$, $(g \circ f)(x) = 21x+33$. El dominio de $f+g$, fg, $f \circ g$ y $g \circ f$ son todos los reales. El dominio de $\frac{f}{g}$ es $\mathbf{R} - \{\frac{2}{7}\}$;

31. $(f+g)(x) = \sqrt{x}+x^2$, $(fg)(x) = x^{\frac{5}{2}}$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x^{-\frac{3}{2}}$, $(f \circ g)(x) = |x|$, $(g \circ f)(x) = x$. El dominio de $f+g$, fg y $g \circ f$ son los reales no negativos. El dominio $f \circ g$ son todos los reales. El dominio de $\frac{f}{g}$ son los reales positivos;

32. $(f+g)(x) = \sqrt{x+4}+\sqrt{5-x}$, $(fg)(x) = \sqrt{x+4}\sqrt{5-x}$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{5-x}}$, $(f \circ g)(x) = \sqrt{\sqrt{5-x}+4}$, $(g \circ f)(x) = \sqrt{5-\sqrt{x+4}}$. El dominio de $f+g$ y fg es el intervalo $[-4,5]$. El dominio de $\frac{f}{g}$ es el intervalo $[-4,5)$. El dominio de $f \circ g$ es el intervalo $(-\infty, 5]$. El dominio de $g \circ f$ es el intervalo $[-4, 21]$;

33. $(f+g)(x) = \operatorname{sgn} x + x^2$, $(fg)(x) = x^2 \operatorname{sgn} x$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\operatorname{sgn} x}{x^2}$, $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. El dominio de $f+g$, fg, $f \circ g$ y $g \circ f$ son todos los reales. El dominio de $\frac{f}{g}$ es $\mathbf{R} - \{0\}$;

34. $(f+g)(x) = \frac{1}{x}+\frac{2}{x}$, $(fg)(x) = \frac{2}{x^2}$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{2}$, $(f \circ g)(x) = \frac{x}{2}$, $(g \circ f)(x) = 2x$. El dominio de $f+g$, fg, $\frac{f}{g}$, $f \circ g$ y $g \circ f$ es $\mathbf{R} - \{0\}$;

35. $(f+g)(x) = 1-x^2+|x|$, $(fg)(x) = (1-x^2)\,|x|$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1-x^2}{|x|}$, $(f \circ g)(x) = 1-x^2$, $(g \circ f)(x) = |1-x^2|$. El dominio de $f+g$, fg, $f \circ g$ y $g \circ f$ son todos los reales. El dominio de $\frac{f}{g}$ es $\mathbf{R} - \{0\}$;

36. $(f+g)(x) = \begin{cases} 5x+5 & \text{si } x < 1 \\ x^3+x+2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, $(fg)(x) = \begin{cases} 4x^2+11x+6 & \text{si } x < 1 \\ x^3(x+2) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, $f(g(x)) = \begin{cases} 4x+11 & \text{si } x < -1 \\ (x+2)^3 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$;

37. $(f+g)(x) = \begin{cases} x^2+x-2 & \text{si } x < 0 \\ x^2+x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, $(fg)(x) = \begin{cases} (x-1)(x^2-1) & \text{si } x < 0 \\ (x+1)(x^2-1) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, $f(g(x)) = \begin{cases} x^2-2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x^2 & \text{si } x \leq -1 \text{ o } x \geq 1 \end{cases}$;

38. $(f+g)(x) = \begin{cases} 5x+3 & \text{si } x \leq 0 \\ 4x+6 & \text{si } x > 0 \end{cases}$, $(fg)(x) = \begin{cases} 6x^2+7x+2 & \text{si } x \leq 0 \\ -5x^2+6x+8 & \text{si } x > 0 \end{cases}$,

$$f(g(x)) = \begin{cases} 6x+5 & \text{si } x \le -\frac{1}{2} \\ 10x+9 & \text{si } -\frac{1}{2} < x \le 0 \\ -5x+14 & \text{si } 0 < x < 2 \\ -3x+8 & \text{si } x \ge 2 \end{cases};$$

39. $(f+g)(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < -1 \\ 5x+4 & \text{si } -1 \le x < 0 \\ 6x+4 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$,

$(fg)(x) = \begin{cases} x(x+1) & \text{si } x < -1 \\ x(4x+4) & \text{si } -1 \le x < 0 \\ 2x(4x+4) & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$, $f(g(x)) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < -1 \\ 2(4x+4) & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$;

40. $(f+g)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$, $(fg)(x) = \begin{cases} x^2(-x^2+1) & \text{si } x < 0 \\ -x^2(x^2-1) & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$,

$$f(g(x)) = \begin{cases} (-x^2+1)^2 & \text{si } x < -1 \\ -(-x^2+1)^2 & \text{si } -1 \le x < 0 \\ (x^2-1)^2 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ -(x^2-1)^2 & \text{si } x \ge 1 \end{cases};$$

41. $(f+g)(x) = \begin{cases} x+7 & \text{si } x < -1 \\ 3x+5 & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ 2x+2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$,

$$(fg)(x) = \begin{cases} -6x^2+11x+10 & \text{si } x < -1 \\ 25x-10x^2 & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ -8x^2+26x-15 & \text{si } x \ge 1 \end{cases},$$

$$f(g(x)) = \begin{cases} -8x+17 & \text{si } x < 2 \\ 25-10x & \text{si } 2 \le x \le 3 \\ -6x+17 & \text{si } x > 3 \end{cases};$$

42. $(f+g)(x) = \begin{cases} x^2+x+2 & \text{si } x < 0 \\ 2x^2+2 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ x^3+x^2+2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$,

$(fg)(x) = \begin{cases} x^3+2x & \text{si } x < 0 \\ x^4+2x^2 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ x^5+2x^3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, $f(g(x)) = (x^2+2)^3$;

43. $(f+g)(x) = \begin{cases} x^2+x-2 & \text{si } x < 0 \\ 2x^2-2 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ x^3+x^2-2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$,

$$(fg)(x) = \begin{cases} x^3-2x & \text{si } x < 0 \\ x^4-2x^2 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ x^5-2x^3 & \text{si } x > 1 \end{cases},$$

$$f(g(x)) = \begin{cases} (x^2+2)^3 & \text{si } x < -\sqrt{3} \text{ o } x > \sqrt{3} \\ (x^2+2)^2 & \text{si } -\sqrt{3} \le x \le -\sqrt{2} \text{ o } \sqrt{2} \le x \le \sqrt{3} \\ x^2+2 & \text{si } -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \end{cases};$$

44. $(f+g)(x)=\begin{cases} -x^2+x+1 & \text{si } x<-1 \\ x^3-x^2+1 & \text{si } -1\le x<0 \\ x^3+x^2-1 & \text{si } 0\le x\le 1 \\ x^2+2x-2 & \text{si } x>1 \end{cases}$,

$(fg)(x)=\begin{cases} -x^3+x & \text{si } x<-1 \\ -x^5+x^3 & \text{si } -1\le x<0 \\ x^5-x^3 & \text{si } 0\le x\le 1 \\ 2x^3-x^2-2x+1 & \text{si } x>1 \end{cases}$,

$f(g(x))=\begin{cases} -x^2+1 & \text{si } x<-\sqrt{2} \\ (-x^2+1)^3 & \text{si } -\sqrt{2}\le x<0 \\ (x^2-1)^3 & \text{si } 0\le x\le \sqrt{2} \\ 2x^2-3 & \text{si } x>\sqrt{2} \end{cases}$;

45. $(f+g)(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<-1 \\ x^5+x^4 & \text{si } -1\le x\le 1 \\ 3x-1 & \text{si } x>1 \end{cases}$,

$(fg)(x)=\begin{cases} -x^2 & \text{si } x<-1 \\ x^9 & \text{si } -1\le x\le 1 \\ 2x^2-x & \text{si } x>1 \end{cases}$,

$f(g(x))=\begin{cases} -x & \text{si } x<-1 \\ x^9 & \text{si } -1\le x\le 1 \\ 2x-1 & \text{si } x>1 \end{cases}$;

46. Todas son iguales a $F(x)=x^{rst}$; **47.** $(f\circ f)(x)=x$, definida en $\mathbb{R}-\{0\}$; **48.** $(f\circ f\circ f)(x)=x$, definida en $\mathbb{R}-\{0,1\}$; **50.** $(f\circ g)(x)=c$, $(g\circ f)(x)=g(c)$; **51.** $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)=g(x)$; **52.** $f_1(x)=\sqrt{x}$, $f_2(x)=1+x$, $f_3(x)=\sqrt{x}$, $f_4(x)=1+x$, $f_5(x)=\sqrt{x}$, $f_6(x)=1+x$; **53.** $f_1(x)=2x$, $f_2(x)=x^{-2}$, $f_3(x)=1+x$, $f_4(x)=x^{-1}$, $f_5(x)=4+x$, $f_6(x)=\frac{1}{x}$; **54.** $f_1(x)=3x$, $f_2(x)=\sqrt{x}$, $f_3(x)=4+x$, $f_4(x)=2x$, $f_5(x)=x^3$, $f_6(x)=1+x$, $f_7(x)=\sqrt{x}$, $f_8(x)=4+x$, $f_9(x)=5x$, $f_{10}(x)=x^2$;
55. $f_1(x)=\ln x$, $f_2(x)=2+x$, $f_3(x)=x^2$, $f_4(x)=\ln x$, $f_5(x)=1+x$, $f_6(x)=x^2$;
56. $f_1(x)=2+x$, $f_2(x)=x^2$, $f_3(x)=\ln x$, $f_4(x)=1+x$, $f_5(x)=\sqrt{x}$, $f_6(x)=4+x$, $f_7(x)=3x$, $f_8(x)=x^2$; **57.** $f_1(x)=\ln x$, $f_2(x)=1+x$, $f_3(x)=\ln x$, $f_4(x)=1+x$, $f_5(x)=\ln x$; **58.** $f_1(x)=\sqrt{x}$, $f_2(x)=1+x$, $f_3(x)=\sqrt[3]{x}$, $f_4(x)=2+x$, $f_5(x)=\sqrt[4]{x}$, $f_6(x)=3+x$; **59.** $f_1(x)=x^5$, $f_2(x)=1+x$, $f_3(x)=x^4$, $f_4(x)=2+x$, $f_5(x)=\sqrt{x}$, $f_6(x)=3+x$, $f_7(x)=x^2$; **60.** $f_1(x)=\frac{1}{2}x$, $f_2(x)=\sqrt{x}$, $f_3(x)=3+x$, $f_4(x)=x^4$, $f_5(x)=\ln x$, $f_6(x)=3+x$, $f_7(x)=2x$, $f_8(x)=x^4$.

EJERCICIOS 1.7

1. Algebraica; **2.** Trascendente; **3.** Verdadero; **4.** Falso; **5.** a) par, b) par, c) impar, d) ni par ni impar, e) ni par ni impar; **10.** $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$, $\varphi(x)=2x^2-4$ (par), $\psi(x)=x^3+3x$ (impar); **11.** $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$, $\varphi(x)=\frac{1}{2}(2^x+2^{-x})$ (par), $\psi(x)=\frac{1}{2}(2^x-2^{-x})$ (impar).

EJERCICIOS 1.8

1. $\frac{7}{8}$; **2.** $\frac{3\sqrt{7}}{7}$; **3.** $\frac{12\sqrt{10}}{49}$; **4.** $\frac{4\sqrt{77}}{73}$; **5.** $\frac{2}{15}\left(1-\sqrt{42}\right)$; **6.** $\frac{1}{15}\left(8-3\sqrt{5}\right)$; **7.** $-\frac{1}{53}\left(484+102\sqrt{13}\right)$;

8. $\frac{15}{8}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$; **9.** $\frac{\sqrt{165}}{49}-\frac{141}{392}$; **10.** $-\frac{22\sqrt{7}}{675}-\frac{3577}{4050}$.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 1 (TIPO A)

1. Falso; **2.** Sí pertenece al rango, pues $f(2)=f(-2)=1$; **3.** $x=1$ y $x=2$; **4.** 7; **5.** $\frac{1+x-2x^2}{1+x^2}$; **6.** a) $\{x\in \mathbb{R}\,|x<-4 \text{ o } x>4\}$, b) $\mathbb{R}$; **8.** a) 15, b) 1; **9.** $f_1(x)=2+x$, $f_2(x)=3x$, $f_3(x)=x^2$, $f_4(x)=\operatorname{sen} x$, $f_5(x)=1+x$, $f_6(x)=3x$, $f_7(x)=\sqrt{x}$, $f_8(x)=4+x$, $f_9(x)=7x$, $f_{10}(x)=x^3$; **10.** a) par, b) impar.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 1 (TIPO B)

1. $\frac{1}{9}(5x^2-78x+360)$; **2.** $a\geq 2b$; **3.** $x=0$, $x=-7$ y $x=-11$; **4.** -431; **5.** $-\frac{3x^3+17x^2+22x+8}{5x^4+16x^3+17x^2+8x+4}$; **6.** a) el intervalo abierto (a,b), en donde $a=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{17}+1\right)$, $b=\frac{1}{2}\left(\sqrt{17}-1\right)$, b) $\mathbb{R}$; **9.** $\frac{x}{\sqrt{1+37x^2}}$.

RESPUESTAS AL CAPÍTULO 2

EJERCICIOS 2.1

1.

x	$f(x)=x^2-2x+4$	x	$f(x)=x^2-2x+4$
0.5	3.25	1.5	3.25
0.9	3.01	1.1	3.01
0.99	3.0001	1.01	3.0001
0.999	3.000001	1.001	3.000001
0.9999	3.00000001	1.0001	3.00000001

$\lim_{x\to 1} f(x)=3$;

2.

x	$f(x)=sgn(x^2-1)$	x	$f(x)=sgn(x^2-1)$
0.5	-1	1.5	1
0.9	-1	1.1	1
0.99	-1	1.01	1
0.999	-1	1.001	1
0.9999	-1	1.0001	1

$\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe;

3. Falso; **4.** Falso; **5.** Falso;

6. a) No existe $f(1)$,

b)

x	$f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x-1}$	x	$f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x-1}$
0.9	3.9	1.1	4.01
0.99	3.99	1.01	4.01
0.999	3.999	1.001	4.001

$\lim_{x\to 1} f(x) = 4$;

7. a) No existe $f(1)$,

b)

x	$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$	x	$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$
0.9	0.48	1.1	0.51
0.99	0.49	1.01	0.501
0.999	0.4999	1.001	0.5001

$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{2}$;

8. a) No existe $f(0)$,

b)

x	$f(x)=\frac{1-\cos x}{x}$	x	$f(x)=\frac{1-\cos x}{x}$
−0.1	−0.00001	0.1	0.00001
−0..1	−0.000001	0.01	0.000001
−0.001	−0.0000001	0.001	0.0000001

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$;

9. a) No existe $f(0)$,

b)

x	$f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}$	x	$f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}$
−0.1	0.49958	0.1	0.49958
−0..1	0.49999	0.01	0.49999

$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$.

EJERCICIOS 2.2

1. Cualquier $\delta > 0$; **2.** Cualquier $\delta > 0$; **3.** $\delta \le \frac{0.02}{3}$; **4.** $\delta \le 0.01$; **5.** $\delta \le 0.2$; **6.** $\delta \le \frac{0.02}{3}$; **7.** $\delta \le 0.015$; **8.** $\delta \le 0.02$; **9.** $\delta \le \frac{\sqrt{410}}{10} - 2$; **10.** $\delta \le 5 \times 10^{-3}$; **11.** $\delta \le \frac{\sqrt{410}}{10} - 2$; **12.** $\delta \le \frac{\sqrt[3]{150}}{5} - 1$; **13.** $\delta \le \frac{\sqrt[3]{216900}}{30} - 2$; **14.** $\delta \le \frac{\sqrt[3]{150}}{5} - 1$; **15.** $\delta \le \frac{\sqrt[4]{750}}{5} - 1$; **16.** $\delta = \frac{\varepsilon}{|m|}$; **17.** $\delta \le \min\left(\sqrt{a^2+\varepsilon} - a, a - \sqrt{a^2-\varepsilon}\right)$.

EJERCICIOS 2.3

1. 19; **2.** $\frac{1}{3}$; **3.** 0; **4.** 0; **5.** 1; **6.** $\sqrt{3}$; **7.** 0; **8.** 1; **9.** 0; **10.** 1; **11.** 0; **12.** $1+\left(2+(3+4^4)^3\right)^2$; **13.** 24; **14.** $\frac{5}{2}$; **15.** $\frac{25}{63}$; **16.** a) nada, b) 1, c) -6, d) $-\frac{3}{2}$; **17.** $\frac{1}{2}$; **19.** a) 10, b) 7, c) 8, d) $\frac{9}{10}$, e) $\frac{9}{5}$.

EJERCICIOS 2.4

1. 6; **2.** 3; **3.** $-\frac{7}{2}$; **4.** $\frac{4}{7}$; **5.** -2; **6.** $\frac{1}{6}$; **7.** $\frac{12}{5}$; **8.** $\frac{3}{4}$; **9.** $-\frac{4}{3}$; **10.** 2; **11.** $\frac{5}{6}$; **12.** $\frac{8}{15}$; **13.** $\frac{17}{15}$; **14.** $\frac{5}{6}$; **15.** $\frac{25}{81}$; **16.** $\frac{11}{3}$; **17.** $\frac{1}{6}$; **18.** $\frac{19}{13}$; **19.** $\frac{3}{22}$; **20.** $\frac{34}{47}$; **21.** $\frac{8}{23}$; **22.** $-\frac{81}{40}$; **23.** $-\frac{34}{27}$; **24.** $\frac{49}{50}$; **25.** $-\frac{37}{24}$; **26.** $\frac{1}{6}$; **27.** $\frac{1}{8}$; **28.** 30; **29.** $\frac{1}{2}$; **30.** $-\frac{1}{9}$; **31.** 1; **32.** $-\frac{1}{10}$; **33.** $\frac{11\sqrt{2}}{12}$; **34.** $-\frac{5}{8}$; **35.** $\frac{1}{3}$; **36.** $\frac{4}{3}$; **37.** $\frac{1}{27}$; **38.** $\frac{5}{918}$; **39.** $-\frac{16}{3}$; **40.** $\frac{1}{6}$; **41.** 11; **42.** 27; **43.** 109; **44.** 0; **45.** $-\frac{3}{4}$; **46.** $-\frac{1}{9}$; **47.** -4; **48.** $-\frac{4}{27}$; **49.** $\frac{1}{2}$; **50.** $-\frac{2\sqrt[3]{5}}{15}$.

EJERCICIOS 2.5

1. 1; **2.** $\frac{3}{4}$; **3.** $\frac{2}{9}$; **4.** 1; **5.** $\frac{7}{3}$; **6.** 1; **7.** $\frac{1}{27}$; **8.** $\frac{9}{8}$; **9.** $\frac{32}{25}$; **10.** $\frac{1}{4}$; **11.** 0; **12.** 0; **13.** $\frac{8}{27}$; **14.** $\frac{9}{25}$; **15.** $\frac{4}{9}$; **16.** $\frac{3}{8}$; **17.** -1; **18.** 0; **19.** $\frac{9}{2}$; **20.** 8; **21.** 1; **22.** 0; **23.** $\frac{3}{2}$; **24.** 2; **25.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$; **26.** 6; **27.** 0; **28.** -1; **29.** 0; **30.** 0; **31.** 0; **32.** 0; **33.** 1; **34.** 0; **35.** 4; **36.** $\frac{\pi}{2}+1$; **37.** -1; **38.** 4; **39.** 0; **40.** $\frac{8(\pi-2)}{\pi^2}$.

EJERCICIOS 2.6

1. $+\infty$; **2.** $+\infty$; **3.** $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$; **4.** $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$; **5.** $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$; **6.** $+\infty$; **7.** $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$; **8.** $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$; **9.** $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$; **10.** $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$.

EJERCICIOS 2.7

1. ∞; **2.** 0; **3.** 1; **4.** $\frac{1}{3}$; **5.** $\frac{1}{32}$; **6.** ∞; **7.** 0; **8.** 1; **9.** 1; **10.** 1; **11.** 0; **12.** $\frac{10}{3}$; **13.** 3; **14.** ∞; **15.** -1; **16.** -1; **17.** 0; **18.** 0; **19.** ∞; **20.** 0; **21.** ∞; **22.** $\frac{1}{2}$; **23.** 0; **24.** 0; **25.** 0.

EJERCICIOS 2.8

1. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 5$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 8$; **2.** $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$; **3.** $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$; **4.** $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} f(x) = -2$; **5.** $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = 4$, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 8$; **6.** $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 7$; **7.** $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 5$; **8.** $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$; **9.** $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 4$; **10.** $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x) = 1$.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 2 (TIPO A)

1. $\lim_{x\to 2}(3x^2+2x+1)=6$ significa que dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $0<|x-2|<\delta$, entonces $|(3x^2+2x+1)-6|<\varepsilon$; **2.** $\sqrt{3}+1$; **3.** 2; **4.** $\frac{3}{19}$; **5.** $\frac{2}{5}$; **6.** $\frac{4}{3}$; **7.** 3; **8.** $\frac{5}{8}$; **9.** $\frac{2}{9}$; **10.** 1.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 2 (TIPO B)

1. $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}=3$ significa que dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $0<|x-2|<\delta$, entonces $\left|\frac{x^3-8}{x^2-4}-3\right|<\varepsilon$; **2.** a) $f(x)=\operatorname{sgn}x$, $a=0$, b) $f(x)=\frac{x^3-8}{x^2-4}$, $a=2$, c) $f(x)=\operatorname{sgn}x$, $a=0$, d) $g(x)=f(x)=x$, $a=0$, e) $g(x)=f(x)=x$, $a=0$; **3.** $\frac{4}{3}$; **4.** 1; **5.** 12; **6.** $\frac{32}{27}$; **7.** $\frac{2}{9}$; **8.** $\frac{98}{75}$; **9.** $\frac{29}{3}$; **10.** 0.

RESPUESTAS AL CAPÍTULO 3

EJERCICIOS 3.1

1. Discontinua, pues $f(1)$ no existe; **2.** Continua, pues $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)=0$; **3.** Continua, pues $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$; **4.** Discontinua, pues $\lim_{x\to 0}f(x)$ no existe; **5.** Continua, pues $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)=2$; **6.** Discontinua, pues $\lim_{x\to 1}f(x)=\frac{3}{4}\neq 1=f(1)$; **7.** Discontinua, pues $\lim_{x\to 0}f(x)=1\neq 0=f(0)$; **8.** Discontinua, pues $\lim_{x\to 0}f(x)=3\neq 2=f(0)$; **9.** Discontinua, pues $\lim_{x\to 0}f(x)$ no existe; **10.** Discontinua, pues $\lim_{x\to 0}f(x)$ no existe; **11.** Discontinua en $x=1$ y en $x=-8$; **12.** Siempre es continua; **13.** Discontinua en $x=2$; **14.** Discontinua en $x=0$; **15.** Siempre es continua; **16.** Siempre es continua; **17.** Discontinua en $x=0$; **18.** Discontinua en $x=-1$; **19.** Discontinua en $x=1$; **20.** Discontinua en $x=-1$ y en $x=\pi$; **21.** $A=\frac{1}{2}$; **22.** $A=1$; **23.** $A=\frac{2}{3}$; **24.** $A=\frac{1}{2}$; **25.** $A=\frac{\pi}{2}$; **26.** $A=0$; **27.** $A=-2$; **28.** $A=1$; **29.** $A=1$; **30.** $A=3$; **31.** $A=\frac{3}{2}$, $B=\frac{1}{2}$; **32.** $A=-\frac{3}{2}$, $B=-\frac{1}{2}$; **33.** $A=2$, $B=0$; **34.** $A=2$, $B=6$; **35.** $A=\frac{1}{6}$, $B=-\frac{1}{6}$; **36.** $\lim_{x\to a}f(x)=A$.

EJERCICIOS 3.2

1. b) $\varphi(a)=f(a)+2g(a)$, c) $\lim_{x\to a}\varphi(x)=f(a)+2g(a)$; **2.** b) $\psi(a)=3f(a)g(a)$, c) $\lim_{x\to a}\psi(x)=3f(a)g(a)$; **3.** c) Considere por ejemplo $f(x)=\operatorname{sgn}x$. En este caso el límite $\lim_{x\to 0}\varphi(x)$ no existe; **4.** c) Considere por ejemplo $f(x)=\operatorname{sgn}x$. En este caso el límite $\lim_{x\to 0}\varphi(x)$ no existe; **5.** b) $g(x)=-sgn(x^2)$, c) $g(x)=0$ (hay una infinidad de respuestas); **6.** b) $g(x)=-(x^2+1)\operatorname{sgn}x$, c) $g(x)=0$ (hay una infinidad de respuestas).

EJERCICIOS 3.3

1. Es discontinua en $(-2,5)$, pues lo es en $x=0\in(-2,5)$; **2.** Es continua en $(2,5)$; **3.** Es continua en $(0,1)$ (es la función constante $y=1$); **4.** Es discontinua en $(0,2)$, pues lo

es en $x = 1 \in (0, 2)$; **5.** Es discontinua en $[0, 1]$, pues lo es en $x = 0 \in [0, 1]$; **6.** Es continua en $(0, 1)$; **7.** Es discontinua en $[-1, 0]$, pues lo es en $x = 0 \in [-1, 0]$; **8.** Es continua en $(-1, 0)$; **9.** Es discontinua en $(-2, 2)$, pues lo es en $x = \pm 1 \in (-2, 2)$; **10.** Es continua en $(-2, 2)$ (lo es, de hecho, en $\mathbb{R}$).

EJERCICIOS 3.4

1. Verdadero; **2.** Falso; **3.** Falso; **4.** Falso; **5.** Máximo absoluto $= f(\beta)$, mínimo absoluto $= f(\alpha)$; **6.** Máximo absoluto $= f(\alpha)$, Mínimo absoluto $= f(\beta)$; **7.** $M = f(3) = 9$, $m = f(1) = 1$; **8.** $M = f(-2) = 4$, $m = f(1) = 1$; **9.** $x_0 = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$; **10.** La función $f(x) = \operatorname{sgn} x$ no es continua en $[-2, 2]$; **11.** Verdadero; **14.** $x = 0.6716$; **15.** $i = 0.1664$.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 3 (TIPO A)

1. No hay puntos de discontinuidad; **2.** $x = 1, x = -1$; **3.** Sí, pues $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$; **4.** No, pues $\lim_{x\to 1} f(x) = 3 \neq 4 = f(1)$; **5.** $A = 2$; **6.** $A = 4$; **8.** $M = f(1) = -1$, $m = f(5) = -9$.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 3 (TIPO B)

1. $x = \pm 1$; **2.** $x = 0, x = 1$; **3.** Sí, pues $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{7}{17} = f(1)$; **4.** Sí, pues $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{3} = f(0)$; **5.** $A = \sqrt{2}$; **6.** $A = B = \frac{1}{4}$; **7.** $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$; **8.** $f(x) = \begin{cases} x(4x^2 - 3) & \text{si } x \neq 0 \\ -0.5 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, $M = f(-0.5) = 1$, $m = f(0.5) = -1$; **9.** $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $g(x) = x^2$, $a = 0$.

RESPUESTAS AL CAPÍTULO 4

EJERCICIOS 4.1

1. $6x - y - 2 = 0$; **2.** $5.1x - y - 1.1 = 0$; **3.** $5.01x - y - 1.01 = 0$; **4.** $5x - y - 1 = 0$; **5.** Es ella misma; **6.** Es ella misma; **7.** Es ella misma; **8.** Es ella misma; **9.** $4x - y - 2 = 0$; **10.** $4x - y + 2 = 0$; **11.** $3x - y + 2 = 0$; **12.** $8x - y - 6 = 0$; **13.** $x + y - 2 = 0$; **14.** $x + y + 2 = 0$; **15.** $x - 2y + 1 = 0$; **16.** $x - 2y + 9 = 0$; **17.** $4x + y - 6 = 0$; **18.** $x - y = 0$; **19.** $x + y - \pi = 0$; **20.** $x + y - \frac{\pi}{2} = 0$; **21.** $x = a \pm \sqrt{a^2 - b}$, $y = x^2$.

EJERCICIOS 4.2

1. $v|_{t=0} = 1$ m/s, $v|_{t=1} = 7$ m/s; **2.** $v|_{t=0} = 3$ m/s, $v|_{t=1} = 9$ m/s; **3.** $v|_{t=0} = 1$ m/s, $v|_{t=1} = 1$ m/s; **4.** $v|_{t=0} = 0$ m/s, $v|_{t=1} = -2$ m/s; **5.** $v|_{t=0} = -1$ m/s, $v|_{t=1} = -\frac{1}{4}$ m/s; **6.** $v|_{t=0} = 0, v|_{t=1} \frac{\sqrt{2}}{2}$ m/s; **7.** $v|_{t=0} = \frac{1}{3}$ m/s, $v|_{t=1} = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$ m/s; **8.** $v|_{t=0} = 4$ m/s, $v|_{t=1} = 8$ m/s; **9.** $v|_{t=0} = 2$ m/s, $v|_{t=1} = 5$ m/s; **10.** $v|_{t=0} = -1$ m/s, $v|_{t=1} = -4$ m/s; **11.** a) $x = 0$,

b) $v|_{t=0} = -10$ m/min, c) $x = -8$ m, d) $\overline{v} = -8$ m/min, e) $v|_{t=1} = -4$ m/min;
12. a) $x = 1$, b) $v|_{t=0} = \frac{3}{2}$ m/min, c) $x = 1 + \sqrt{2}$ m, d) $\overline{v} = \sqrt{2}$ m/min,
e) $v|_{t=1} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{4}$ m/min.

EJERCICIOS 4.3

1. 5; **2.** 13; **3.** 1; **4.** $\frac{1}{4}$; **5.** $\frac{1}{3}$; **6.** $\frac{1}{4}$; **7.** $\frac{3\sqrt{2}}{8}$; **8.** 0; **9.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$; **10.** 1; **11.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; **12.** $-\frac{1}{3}$; **13.** -1; **14.** $-\frac{1}{3}$; **15.** $-\frac{3\sqrt{5}}{80}$; **16.** $\frac{3\sqrt{5}}{25}$; **17.** 3; **18.** 0; **19.** -1; **20.** $\frac{1}{50}$; **21.** $f(x) = x^2, x_0 = 3, f'(x_0) = 6$; **22.** $f(x) = x^2, x_0 = 1, f'(x_0) = 2$; **23.** $f(x) = x^2, x_0 = 0, f'(x_0) = 0$; **24.** $f(x) = x^3, x_0 = 2, f'(x_0) = 12$; **25.** $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 5, f'(x_0) = \frac{\sqrt{5}}{10}$; **26.** $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 1, f'(x_0) = \frac{1}{2}$; **27.** $f(x) = \sqrt[3]{x}, x_0 = 1, f'(x_0) = \frac{1}{3}$; **28.** $f(x) = \sqrt[4]{x}, x_0 = 16, f'(x_0) = \frac{1}{32}$; **29.** $f(x) = 4\sqrt{x}, x_0 = 4, f'(x_0) = 1$; **30.** $f(x) = 2x^2, x_0 = 4, f'(x_0) = 16$; **31.** $f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 5x, x_0 = 0, f'(x_0) = 5$; **32.** $f(x) = x^3 + x^2 + x, x_0 = 1, f'(x_0) = 6$; **33.** $f(x) = \frac{5}{x}, x_0 = 1, f'(x_0) = -5$; **34.** $f(x) = \frac{1}{x^2+1}, x_0 = 0, f'(x_0) = 0$; **35.** $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2+1}, x_0 = 0, f'(x_0) = -\frac{1}{2}$; **36.** $f(x) = \frac{5}{(1+x)^2+4}, x_0 = 0, f'(x_0) = -\frac{2}{5}$; **37.** $f(x) = \frac{x}{x^2+1}, x_0 = 3, f'(x_0) = -\frac{2}{25}$; **38.** $f(x) = \tan x, x_0 = 0, f'(x_0) = 1$; **39.** $f(x) = 4\cos x, x_0 = 0, f'(x_0) = 0$; **40.** $f(x) = 3\operatorname{sen} x, x_0 = \frac{\pi}{4}, f'(x_0) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; **41.** $m_T = 48, 48x - y - 128 = 0$; **42.** $m_T = 12, 12x - y + 16 = 0$; **43.** $m_T = 4, 4x - y - 3 = 0$; **44.** $m_T = 0, y = 0$; **45.** $m_T = 5, 5x - y - 4 = 0$; **46.** $m_T = -6, 6x + y + 9 = 0$; **47.** $m_T = -3, 3x + y - 4 = 0$; **48.** $m_T = 4, 4x - y + 5 = 0$; **49.** $m_T = -5, 5x + y - 6 = 0$; **50.** $m_T = 4, 4x - y + 5 = 0$.

EJERCICIOS 4.4

1. $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = 1 \neq -1 = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(3+h)-f(3)}{h}$;
2. $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(\frac{1}{3}+h)-f(\frac{1}{3})}{h} = 3 \neq -3 = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(\frac{1}{3}+h)-f(\frac{1}{3})}{h}$;
3. $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 2 \neq -2 = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$;
4. $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = 2 \neq -2 = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$;
5. La función no es continua en $x_0 = 1$, por lo tanto no es derivable en ese punto;
6. $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = 0 \neq 1 = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h}$;
7. La función no es continua en $x_0 = 0$, por lo tanto en ese punto no es derivable;
8. $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = 0 \neq -1 = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h}$;
9. $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = 0 \neq 1 = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h}$;
10. $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = -1 \neq 0 = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$;
11. La función no es continua en $x_0 = 1$, por lo tanto no es derivable en ese punto;
12. La función no es continua en $x_0 = 0$, por lo tanto no es derivable en ese punto;
13. $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = 2 \neq 0 = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h}$;
14. La función no es continua en $x_0 = 1$, por lo tanto no es derivable en ese punto;
15. $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = 1 \neq 0 = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h}$;
16. $f'(0) = -1$; **17.** $f'(2) = 4$; **18.** $f'(0) = 0$; **19.** $f'(0) = 1$; **20.** $f'(1) = 1$;

21. $f'(0) = 0$; **22.** $f'(0) = 0$; **23.** $f'(1) = 3$; **24.** $f'(0) = 0$; **25.** $f'(0) = 0$; **26.** $f'(0) = 0$; **27.** $f'(0) = 0$; **28.** $f'(1) = 5$; **29.** $f'(0) = 0$; **30.** $f'(0) = 0$.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 4 (TIPO A)

1. $-\frac{1}{9}$; **2.** 3; **3.** $\frac{1}{6}$; **4.** $f'(x) = \operatorname{sen} x$; **5.** $6x - y - 3 = 0$; **6.** Es ella misma; **7.** $x + 2y - 2 = 0$; **8.** $v = 15$ m/s; **9.** La función dada no es continua en $x_0 = 0$, por lo tanto no es derivable en ese punto; **10.** $f'(1) = 3$.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 4 (TIPO B)

1. $\frac{30}{169}$; **2.** 1; **3.** $\frac{11}{2}$; **4.** $f'(x) = -\frac{4x^3+2x}{(x^4+x^2+1)^2}$; **5.** $y = 4$; **6.** Es ella misma; **7.** $3x + y - \frac{13}{4} = 0$; **8.** $v = 8$ m/s; **9.** $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = 1 \neq -1 = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h}$; **10.** $f'(1) = 10$.

RESPUESTAS AL CAPÍTULO 5

EJERCICIOS 5.1

a. $\to 7$; **b.** $\to 19$; **c.** $\to 2$; **d.** $\to 1$; **e.** $\to 11$; **f.** $\to 12$; **g.** $\to 17$; **h.** $\to 9$; **i.** $\to 5$; **j.** $\to 15$; **k.** $\to 16$; **l.** $\to 20$; **m.** $\to 3$; **n.** $\to 13$; **o.** $\to 8$; **p.** $\to 4$; **q.** $\to 6$; **R.** $\to 10$; **s.** $\to 14$; **t.** $\to 18$;

21. $2x - \frac{3}{x^2}$; **22.** $\pi^2 (2x + 1)$; **23.** $-\frac{\pi}{x^2}\left(\frac{2}{x} + 1\right)$; **24.** $\pi(\pi + 1)(2x + 1)$; **25.** $2a^2x(2x^2 + a^2)$; **26.** $\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1\right)$; **27.** $\sqrt[3]{\pi}\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + 1\right)$; **28.** $6(x^2 + x + 1)$; **29.** $4(2x + 1)$; **30.** $\frac{x^2-1}{x^2}$; **31.** $\frac{x^3-x-2}{x^3}$; **32.** $-\frac{4x}{(x^2+1)^2}$; **33.** $\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$; **34.** $30x + 17$; **35.** $24x^2 + 92x + 63$; **36.** $5x^4 + 9x^2 + 2$; **37.** $-\frac{x^4+4x^3+12x^2+4x+4}{(x+1)^2(x^2+2)^2}$; **38.** $\frac{1}{(x+2)^2}$; **39.** $\frac{1}{(3x+2)^2}$; **40.** $\frac{2x}{(x^2+2)^2}$; **41.** $-\frac{6x\left(x^3+x-1\right)}{(2x^3+1)^2}$; **42.** $4x^3 + 15x^2 + 28x + 23$; **43.** $-\frac{x^2-12x-19}{(x^2+2x+7)^2}$; **44.** $-\frac{2}{(3x+4)^2}$; **45.** $-\frac{2\left(3x^4+25x^2+42\right)}{x^8}$; **46.** $-\frac{2(x+1)(2x+3)}{x^7}$; **47.** $3\sqrt{x} + \frac{\sqrt[3]{2}}{3\sqrt[3]{x^2}}$; **48.** $\frac{6\sqrt{3x}}{\sqrt{2x\sqrt{3x}}}$; **49.** $\frac{4\sqrt{6}(3x+2)}{3\sqrt[3]{3x}}$; **50.** $\frac{11x+3\sqrt[5]{x}+2}{10\sqrt[10]{x^9}}$; **51.** $\frac{4\sqrt{2}-3\sqrt{5}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{5x}+4\right)^2}$; **52.** $\frac{3\sqrt{x}\left(4\sqrt{2}-3\sqrt{5}\right)}{2\left(\sqrt{5x^3}+4\right)^2}$; **53.** $\frac{\left(\sqrt[3]{x}+4\right)\left(\sqrt[3]{x}-12\right)}{12\sqrt{x^3}}$; **54.** $2x(3x^4 + 10x^2 + 6)$; **55.** $2x(3x^4 + 12x^2 + 11)$; **56.** $\frac{\sqrt{3}\left(40\sqrt{3}\sqrt[4]{x^9}+50\sqrt[4]{x^7}+10\sqrt{x}+3\sqrt{3}\right)}{4\sqrt[4]{x}}$; **57.** $12x^5 + 35x^4 + 44x^3 + 42x^2 + 46x + 21$; **58.** $-\frac{2(23x+20)}{x^3}$; **59.** $\frac{12x^5+13x^4-24x^2-34x-18}{x^4}$; **60.** $-\frac{5x^3+24\sqrt{x^5}+x+8\sqrt{x}-3}{2\sqrt{x}(x^3+x+3)^2}$; **61.** $\frac{3x^2+8x+6}{(x+1)^2(x+2)^2}$; **62.** $-\frac{\pi\sqrt{\pi}(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$; **63.** $-\frac{2(2x+1)}{(x^2+x+4)^2}$; **64.** $18(3x + 1)(24x^2 + 16x + 3)$; **65.** $2(4x + 1)^3(3x + 1)(36x + 11)$; **66.** $4x(4x^2 + 1)^3(3x^2 + 1)(36x^2 + 11)$; **67.** $4x(x^2 + 3)^2(3x^4 + 11x^2 + 9)(x^2 + 2)$; **68.** $-\frac{3\left(2x^6+16x^5+53x^4+88x^3+82x^2+40x+8\right)}{x^4(x+1)^4}$; **69.** $-\frac{10(2x+3)^4\left(x^2+3x-1\right)}{(x^2+1)^6}$; **70.** $\frac{6\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+3x-1\right)}{(2x+3)^4}$;

71. $\frac{3\sqrt{2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{x}}$; **72.** $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)^3}$; **73.** $\frac{2x\left(x^2-3\right)\left(x^2+3\right)^2}{\left(x^2+1\right)^3}$;

74. $x^4\left(x^2+3x+2\right)^3\left(13x^2+27x+10\right)$; **75.** $\frac{x\sqrt{x}\left(30\sqrt{x}+52\sqrt[5]{x^2}+75\right)}{10\left(3\sqrt{x}+4\sqrt[5]{x^2}+3\right)^4}$; **76.** $\frac{4x\left(x^2+2\right)\left(2x^2+3\right)}{\left(x^2+3\right)^4}$;

77. $-\frac{12x\left(x^4+4x^2+2\right)}{\left(x^2+3\right)^4\left(x^2+4\right)^6}$; **78.** $-\frac{4x^3\left(x^2+2\right)\left(2x^4+10x^2+11\right)}{\left(x^2+3\right)^4\left(x^2+4\right)^5}$; **79.** $-\frac{648(x+1)^5}{x^7}$;

80. $-\frac{(x+1)\left(2x^3+1\right)^3\left(12x^8+36x^6+42x^5-30x^4-26x^3-3x-1\right)}{\left(3x^5+1\right)^4}$; **81.** -2; **82.** 3; **83.** $\frac{1}{3}$; **84.** 3; **85.** 4;

86. 15; **87.** -3; **88.** -1; **89.** $\frac{3}{2}$; **90.** $\frac{1}{3}$; **91.** $-\frac{172}{27}$; **92.** $\frac{53}{8}$; **93.** 0; **94.** -324; **95.** -235224.

EJERCICIOS 5.2

1. $\cos x-3\operatorname{sen}x$; **2.** $5\cos x+2\operatorname{sen}x$; **3.** $2\cos^2x+3\cos x-1$;
4. $\cos x\,(1-8\cos x)+4\,(4\operatorname{sen}x+1)$; **5.** $-\frac{1+\operatorname{sen}x+3\cos x}{(1+\operatorname{sen}x)^2}$; **6.** 0; **7.** $2\cos^2x+\tan^2x$;
8. $6\tan^2x-5\cot^2x+1$; **9.** $4\tan^2x+5$; **10.** $3\sec x\tan x$; **11.** $\frac{6x+3\operatorname{sen}2x}{2\cos^2x}$;
12. $-2\operatorname{sen}x\,(2x+3)+2\,(2\cos x+3)$; **13.** $\frac{\sqrt{x}}{2}\,(2x\cos x+3\operatorname{sen}x)$; **14.** $\frac{x\cos x-\operatorname{sen}x}{x^2}$;
15. $\frac{2x\left(x+\sqrt{x}\right)(\cos x-\operatorname{sen}x)-\left(2x+\sqrt{x}\right)(\operatorname{sen}x+\cos x)}{2x\left(x+\sqrt{x}\right)^2}$; **16.** $\frac{2x\cos x+\operatorname{sen}x\left(x^2+1\right)+4x}{(\cos x+2)^2}$;
17. $\frac{\operatorname{sen}x(x+1)^2-\cos x(x-1)^2}{\operatorname{sen}2x+1}$; **18.** $2x$; **19.** $\frac{\sec^2x(x+\cot x)+\cot^2x\tan x}{(x+\cot x)^2}$; **20.** $x\cos 2x+\operatorname{sen}x\cos x$;
21. $\cos 2x\,(x+1)+\cos x\,(x+2)+\operatorname{sen}x\,(\cos x-x)+1$;
22. $\sec^2x\,(5\cos x+4)\,(3\operatorname{sen}x+2)+\tan x\,(15\cos 2x+12\cos x-10\operatorname{sen}x)$;
23. $2\cos 2x$; **24.** $3\,(3\operatorname{sen}x+4\cos x)^2\,(3\cos x-4\operatorname{sen}x)$;
25. $2\,(7\cos x+5x)\,(5-7\operatorname{sen}x)$; **26.** $\frac{\tan x-x\sec^2x}{(x+\tan x)^2}$; **27.** $\frac{\operatorname{sen}^2x[\operatorname{sen}x-3\cos x(1+x)]+1}{(1+\operatorname{sen}^3x)^2}$;
28. $\operatorname{sen}x\cos x\,(3\operatorname{sen}x-4\cos^2x)$; **29.** $\operatorname{sen}^2x\cos^3x\,(3-7\operatorname{sen}^2x)$;
30. $\operatorname{sen}x\cos^2x\,(\operatorname{sen}x\cos x-5x\operatorname{sen}^2x+2x)$;
31. $(x+1)\,(1+\operatorname{sen}x)\left[3\cos x\,(1+x)+2\,(1+\operatorname{sen}x)^2\right]$;
32. $2\,(1-\cos x)\,(1+\operatorname{sen}x)^3\,[\cos x\,(2-\cos x)-\operatorname{sen}x-1]$;
33. $2\operatorname{sen}2x\,(1+\operatorname{sen}^2x)^3\,(1+\cos^2x)\,(\cos^2x+\cos 2x+1)$;
34. $2\cos^7x\operatorname{sen}^3x\,(3\cos 2x-1)$;
35. $(1+\cos x)^3\,(1+\operatorname{sen}x)\,(1+x)\left\{\begin{array}{c}(1+\cos x)\,[3\cos x\,(1+x)+2\,(1+\operatorname{sen}^2x)]-\\-4\operatorname{sen}x\,(1+\operatorname{sen}x)^2\,(1+x)\end{array}\right\}$;
36. $2\,(3x+2\tan x)\,(5+2\tan^2x)$;
37. $2\tan x\,(3x+2\tan x)\,[(3x+2\tan x)\,(1+\tan^2x)+\tan x\,(5+2\tan^2x)]$;
38. $\frac{1+\operatorname{sen}2x}{(x-\cos^2x)^2}$; **39.** $\operatorname{sen}x\,(1+\operatorname{sen}^2x)^2\,(3\cos^2x+2\cos 2x)$; **40.** $7\operatorname{sen}^6x\cos x$;
41. $-\frac{16\tan x\sec^2x}{(3+4\tan^2x)^3}$; **42.** $\frac{\left(3+4\tan^2x\right)-16x\tan x\sec^2x}{(3+4\tan^2x)^3}$;
43. $2\,(x+x^2+\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}^2x)\,(1+2x+\cos x+\operatorname{sen}2x)$;
44. $\frac{3(x+x\operatorname{sen}x)^2}{(1+2\tan^2x)^3}\left[\frac{\left(1+2\tan^2x\right)(1+x\cos x+\operatorname{sen}x)-4(x+x\operatorname{sen}x)\left(\sec^2x\tan x\right)}{(1+2\tan^2x)}\right]$;
45. $\sec x\,(x+3\tan^2x)\,[\tan x\,(x+3\tan^2x)+2\,(1+6\sec^2x\tan x)]$;
46. $2\tan^3x\sec^2x\,(5\sec^2x-1)\,(1+\sec^2x)^2$;
47. $(2x+\operatorname{sen}^2x)\,[2\,(3x+2\sec x)\,(2+\operatorname{sen}2x)+(2x+\operatorname{sen}^2x)\,(3+2\sec x\tan x)]$;
48. $-\frac{8(2x\cos 2x+\operatorname{sen}2x)}{(2+x\operatorname{sen}2x)^3}$; **49.** $\frac{3\operatorname{sen}x\cos^2x\left[x\left(5\operatorname{sen}^2x-2\right)-\operatorname{sen}x\cos x\right]}{(1+x\operatorname{sen}^2x\cos^3x)^4}$;

50. $\left(\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x + 1\right)\left(\cos^2 x + \cos x + 1\right)^2 \times$
$$\times \begin{bmatrix} -3\left(x^2+x+1\right)\left(\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x + 1\right)\left(\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x\right) + \\ 2\left(x^2+x+1\right)\left(\operatorname{sen} 2x + \cos x\right)\left(\cos^2 x + \cos x + 1\right) + \\ (2x+1)\left(\cos^2 x + \cos x + 1\right)\left(\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x + 1\right) \end{bmatrix}.$$

EJERCICIOS 5.3

1. $3e^x + 1$; **2.** $2\left[e^x(x+1)+x\right]$; **3.** $3\left(e^{3x}+x^2\right)$; **4.** $3x^2e^x(x+3)$; **5.** $\frac{x(2-x)}{e^x}$;
6. $\frac{(x+3)}{2}\sqrt{xe^x}$; **7.** $\frac{e^x(x-1)^2-4x}{(x^2+1)^2}$; **8.** $e^x\left(6e^x+x+1\right)$; **9.** $e^x(x+7)(x+1)$; **10.** $\frac{5e^x-2}{2\sqrt{e^x}}$;
11. $2e^x\left(3e^{2x}+3e^x-1\right)$; **12.** $-\frac{x}{e^{2x}}\left(2x^2-3x+4\right)$; **13.** $-\frac{6}{e^{2x}}$; **14.** $\frac{6e^{2x}}{(2e^{2x}+3)^2}$;
15. $-\frac{3e^x+20}{e^{4x}}$; **16.** $\frac{e^{6x}}{(e^{3x}+x)^2}\left(3e^{3x}+6x-1\right)$; **17.** $\frac{6^x\ln 3-\ln 2}{2^x}$; **18.** $\frac{3^x}{2^x}\left(x\ln\frac{3}{2}+1\right)$;
19. $\frac{3^x(\ln 3-1)+2^x(\ln 2-1)}{e^x}$; **20.** $-\frac{e^x}{(3^x+2^x)^2}\left[3^x(\ln 3-1)+2^x(\ln 2-1)\right]$; **21.** $\frac{1-3\ln x}{x^4}$;
22. $x^4(5\ln x+1)$; **23.** $-\frac{x\ln x+x-2}{x(\ln x-x)^2}$; **24.** $\frac{e^x\left(e^x+x\ln^2 x\right)}{x(e^x+\ln x)^2}$;
25. $\frac{2\ln x+3}{x}$; **26.** $x\ln^2 x(2\ln x+3)$;
27. $\frac{3}{x}\left(2\ln^5 x+x\ln^4 x+4x\ln^3 x+2x^2\ln^2 x+2x^2\ln x+x^3\right)$;
28. $\frac{3\ln^2 x}{xe^{3x}}(1-x\ln x)$; **29.** $x\left[x3^x\left(\ln 3^x+3\right)+2^x\left(\ln 2^x+2\right)\right]$;
30. $-\frac{3^{3x}+3^{(2x+1)}(\ln 3+1)+3^{(x+1)}(2\ln 3+1)+3\ln 3+1}{3^{3x}e^x}$; **31.** $\frac{3^x}{e^x}\left[e^{2x}(\ln 3+1)+\ln 3-1\right]$;
32. $\begin{matrix} e^{3x}\left[6e^{3x}+e^{2x}(5x+1)+2e^x(4x+1)+6x^2+13x+3\right]+ \\ +6xe^x\left[e^x(x+1)+x+2\right]+18x^2 \end{matrix}$;
33. $\frac{2}{x}\begin{bmatrix} 7\ln^{13} x+12\ln^{11} x+33\ln^{10} x+5\ln^9 x+54\ln^8 x+ \\ 48\ln^7 x+21\ln^6 x+72\ln^3 x+20\ln^2 x+24\ln x+4 \end{bmatrix}$;
34. $-\frac{\left(\ln^2 x-x^2\right)(\ln x-1)}{x^2\ln^2 x}$; **35.** $-\frac{\ln x+x+1}{x^2\ln^2 x}$;
36. $\frac{6}{x}\left(\ln^5 x+5\ln^4 x+12\ln^3 x+16\ln^2 x+12\ln x+4\right)$;
37. $\frac{e^{3x}}{x}\left(3x\ln^2 x+2\ln x+3x\right)$; **38.** $e^{6x}(6x+1)$; **39.** $2^{3x}3^x(x\ln 3+3x\ln 2+1)$;
40. $-\frac{e^{2x}\left(3x\ln x+3x^2-x-1\right)+x(\ln x+x-1)-1}{xe^x(e^{2x}+1)^2}$; **41.** $e^x(\operatorname{sen} x+\cos x)$; **42.** $-\frac{\operatorname{sen} x+\cos x}{e^x}$;
43. $e^x\operatorname{sen} x$; **44.** $\frac{e^x}{2x}\left(2x\ln x\cos 2x+x\ln x\operatorname{sen} 2x+\operatorname{sen} 2x\right)$;
45. $e^{3x}\left(7\operatorname{sen} x+9\cos x\right)$;
46. $e^{3x}\left[3^x\left(\operatorname{sen} x(3+\ln 3)+\cos x\right)+2^x\left(\cos x(3+\ln 2)-\operatorname{sen} x\right)\right]$;
47. $\frac{3}{e^{3x}}\left(e^{2x}\operatorname{sen} x+\cos x\right)^2\left(\operatorname{sen} x+\cos x\right)\left(e^{2x}-1\right)$;
48. $\frac{1+\ln^2 x}{x}\left[x\sec^2 x\left(1+\ln^2 x\right)+4\ln x\tan x\right]$;
49. $\frac{\left(1+\sqrt{xe^x}\right)\left(1+\ln^2 x\right)^3}{x}\left[8\ln x\left(1+\sqrt{xe^x}\right)+\sqrt{xe^x}\left(1+\ln^2 x\right)(x+1)\right]$;
50. $e^x\left(\cot x-\csc^2 x\right)-\frac{x\cos x+1}{x(\operatorname{sen} x+\ln x)^2}$.

EJERCICIOS 5.4

11. $4\cosh x-2\operatorname{senh} x$; **12.** $\cosh 2x$; **13.** $\frac{\operatorname{senh} x\left(1+\tanh^2 x\right)-2\operatorname{sech}^2 x\tanh x(3+\cosh x)}{\left(1+\tanh^2 x\right)^2}$;
14. 0; **15.** $\operatorname{senh} 2x+\operatorname{sen} 2x$; **16.** $2\operatorname{senh} 2x$; **17.** $\frac{\cosh x-\operatorname{senh} x+1}{(1+\cosh x)^2}$;
18. $\tanh x+x\operatorname{sech}^2 x$; **19.** $\frac{1}{4}\left[\operatorname{senh}^2 2x\left(x\operatorname{senh} x+\cosh x\right)+2x\operatorname{senh} 4x\cosh x\right]$;
20. $\frac{x\cosh x-\operatorname{senh} x}{x^2}+\frac{\cosh x-x\operatorname{senh} x}{\cosh^2 x}$; **21.** $2\operatorname{senh} x\cos x$; **22.** $\cosh 2x+\cos 2x$;

23. $\frac{1}{2}(\operatorname{senh} 2x \cos 2x + \operatorname{sen} 2x \cosh 2x)$;
24. $x(2\operatorname{senh} x + x\cosh x) - 3(x\operatorname{senh} x + \cosh x)$;
25. $\operatorname{senh} x(6x-2) + \cosh x(3x^2 - 2x + 1)$; **26.** $x(\operatorname{senh} 2x + x\cosh 2x)$;
27. $\frac{1}{e^x}\left[e^{3x}(\operatorname{senh} x + 2\cosh x) + (\cosh x - \operatorname{senh} x)\right]$;
28. $2^x\left(\ln 2 \operatorname{senh}^2 x + \operatorname{senh} 2x\right) + 3^x \cosh^2 x\,(\ln 3 \cosh x + 3\operatorname{senh} x)$;
29. $\operatorname{senh} 2x\,(x^2+1)\left(2\cosh^2 x + 1\right) + 2x\cosh^2 x\left(\cosh^2 x + 1\right)$;
30. $-\frac{\cosh x}{(1+\operatorname{senh} x)^2} - \frac{\operatorname{senh} 2x}{\left(1+\cosh^2 x\right)^2}$; **31.** $\frac{\tanh x(3+\cosh 2x) - \operatorname{sech}^2 x(6+\operatorname{senh} 2x)}{\tanh^3 x}$;
32. $x\left[3x\operatorname{senh}^2 x + 2\cosh^2 x + x\operatorname{senh} 2x\,(x+1)\right]$; **33.** $\frac{x^2+1}{2x^2}$; **34.** $\frac{x^4-1}{x^3}$;
35. $8\operatorname{senh} 2x\left(1 + \operatorname{senh}^2 x + \cosh^2 x\right)^3$;
36. $\frac{x\operatorname{senh}^2 2x}{8}\left[6x\cosh 2x \cosh x + \operatorname{senh} 2x\,(x\operatorname{senh} x + 2\cosh x)\right]$;
37. $\tan x \operatorname{sech}^2 x + \tanh x \sec^2 x$; **38.** $\frac{1}{2\sqrt{x}}\left[2x^2\operatorname{senh} x + \cosh x\,(3x+1)\right]$;
39. $\cosh x\left(3+\cosh^2 x\right)\left(4\operatorname{senh}^2 x + \cosh^2 x + 3\right)$;
40. $e^x\left[\operatorname{sen} x \cosh x + \operatorname{senh} x\,(\operatorname{sen} x + \cos x)\right]$;
41. $\frac{1}{e^x}\left[\operatorname{senh} x \cos x - \cosh x\,(\operatorname{sen} x + \cos x)\right]$;
42. $e^x\left[\tan x \operatorname{sech}^2 x + \tanh x\,(\tan x + \sec x)\right]$;
43. $e^x\left[x\cosh 2x + \operatorname{senh} x \cosh x\,(x+1)\right]$;
44. $\cosh x \tanh^2 x\left(3\operatorname{senh} x \cosh x \operatorname{sech}^2 x + 2\operatorname{senh}^2 x \tanh x + \cosh^2 x \tanh x\right)$;
45. $\frac{\cos x(\operatorname{sen}^3 x + 2\operatorname{sen} x)}{2(1+\operatorname{sen}^2 x)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\operatorname{sen} x \cos^3 x}{2(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}$;
46. $\begin{array}{l} \operatorname{sen}^2 x \cos x \tan x \times \\ \times\left[\operatorname{senh} x\left(2\cosh^2 x \tanh x + \operatorname{senh}^2 x \tanh x + \operatorname{senh} x \cosh x \operatorname{sech}^2 x\right)\right] + \\ + \operatorname{senh}^2 x \cosh x \tanh x \times \\ \times\left[\operatorname{sen} x\left(2\cos^2 x \tan x - \operatorname{sen}^2 x \tan x + \operatorname{sen} x \cos x \sec^2 x\right)\right] \end{array}$;
47. $x\left(\ln x^2 + 1\right) + 2\tanh x \operatorname{sech}^2 x$; **48.** $\frac{(x+\cosh x)(1+\cosh x) - (x+\operatorname{senh} x)(1+\operatorname{senh} x)}{(x+\cosh x)^2}$;
49. $\frac{\left(x^2+\cosh^2 x\right)(1+\cosh x) - (x+\operatorname{senh} x)(2x+\operatorname{senh} 2x)}{\left(x^2+\cosh^2 x\right)^2}$;
50. $\frac{x+\operatorname{senh} x}{\left(x^2+\cosh^2 x\right)^2}\left[2\left(x^2+\cosh^2 x\right)(1+\cosh x) - (x+\operatorname{senh} x)(2x+\operatorname{senh} 2x)\right]$;
51. $\frac{2\left(x^2+\operatorname{senh}^2 x\right)(2x+\operatorname{senh} 2x)}{\left(x^2+\cosh^2 x\right)^5}\left[\left(x^2+\cosh^2 x\right) - 2\left(x^2+\operatorname{senh}^2 x\right)\right]$;
52. $(x+\cosh x)^2(x-\operatorname{senh} x)\times$
$\times\left\{3x(x-\operatorname{senh} x)(1+\operatorname{senh} x) + (x+\cosh x)\left[\begin{array}{c}(x-\operatorname{senh} x)+ \\ 2x(1-\cosh x)\end{array}\right]\right\}$;
53. $\frac{(2x-4+5\cosh x)(1+2\cos x) - (x+3+2\operatorname{sen} x)(2+5\operatorname{senh} x)}{(2x-4+s\cosh x)^2}$;
54. $2\cosh x\,(1+\operatorname{senh} x)\left[\operatorname{senh} x\,(1+\operatorname{senh} x) + \cosh^2 x\right]$;
55. $2\operatorname{senh}^3 x\,(3+e^x)^2\left[2\cosh x\,(2+e^x)(3+e^x) + e^x \operatorname{senh} x\,(3e^x+4)\right]$;
56. $2\cosh^3 x\left(1+\cosh^2 x\right)^2\times$
$\times\left(3\operatorname{senh} x \cosh^2 x\,(x+1) + \left(1+\cosh^2 x\right)\left[x\cosh x + 2\operatorname{senh} x\,(x+1)\right]\right)$;
57. $\left(4x^2+3x+1\right)\left[\begin{array}{c}\left(4\operatorname{senh}^2 x + 3\operatorname{senh} x + 1\right)(4\operatorname{senh} 2x + 3\operatorname{senh} x) + \\ (4\operatorname{senh} 2x + 3\cosh x)\left(4\cosh^2 x + 3\cosh x + 1\right)\end{array}\right] +$
$+ (8x+3)\left(4\operatorname{senh}^2 x + 3\operatorname{senh} x + 1\right)\left(4\cosh^2 x + 3\cosh x + 1\right)$;

58. $-\frac{2x\left(x+\operatorname{senh}^2 x\right)^2+\left(x^2+1\right)(1+\operatorname{senh} 2x)}{\left(x^2+1\right)^2\left(x+\operatorname{senh}^2 x\right)^2}$;

59. $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}+\frac{\operatorname{senh} x\left(\operatorname{senh}^2 x+x\right)-\cosh x(\operatorname{senh} 2x+1)}{\left(\operatorname{senh}^2 x+x\right)^2}$;

60. $(x+3\cos x)^2(2+5\cosh x)^4(5+7\operatorname{sen} x)^6(2+9\operatorname{sen} x)^8 \times$

$$\times\left[\begin{array}{c} 81\cos x\,(x+3\cos x)(2+5\cosh x)(5+7\operatorname{sen} x)+ \\ 49\cos x\,(x+3\cos x)(2+5\cosh x)(2+9\operatorname{sen} x)+ \\ 25\operatorname{senh} x\,(x+3\cos x)(5+7\operatorname{sen} x)(2+9\operatorname{sen} x)+ \\ 3(1-3\operatorname{sen} x)(2+5\cosh x)(5+7\operatorname{sen} x)(2+9\operatorname{sen} x) \end{array}\right].$$

EXAMEN DEL CAPÍTULO 5 (TIPO A)

1. $\frac{\sqrt{x}}{2}\left[9-\frac{1}{\left(2+\sqrt{x}\right)^2}\right]$;

2. $(x+3)^2(x+4)^3(x+5)^4[5(x+3)(x+4)+4(x+3)(x+5)+3(x+4)(x+5)]$;

3. $\frac{1}{(x+1)^2}$; **4.** $\frac{1}{(3x+2)^2}$; **5.** $(e^x+e^{-x})4^x\ln 4+(e^x-e^{-x})(1+4^x)$; **6.** $4\left(\frac{1+e^x}{1-e^{-x}}\right)^3\left(\frac{e^x-e^{-x}-2}{(1-e^{-x})^2}\right)$;

7. $\frac{1}{x^2}(x-\ln x)$; **8.** $-\frac{\operatorname{sen}^2 x(\cos x+1)+\operatorname{sen} x+(\cos 2x+\cos x)(\cos x+1)}{[\operatorname{sen} x(\cos x+1)+1]^2}$;

9. $\frac{(x+\operatorname{sen} x)(1+\cosh x)-(x+\operatorname{senh} x)(1+\cos x)}{(x+\operatorname{sen} x)^2}$; **10.** $e^x(1+\tanh x)^2\left[4+\tanh x-3\tanh^2 x\right]$.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 5 (TIPO B)

1. $\frac{\left(x\sqrt{x}+2\right)^2\left(25x\sqrt{x}-4\right)}{6\sqrt[3]{x^4}}$;

2. $x^2(x^3+3)^2(x^4+4)^3(x^5+5)^4\left[\begin{array}{c}25x^2(x^3+3)(x^4+4)+16x(x^3+3)(x^5+5)+\\ 9(x^4+4)(x^5+5)\end{array}\right]$;

3. $\frac{2(x+3)(x+1)}{(x+2)^2}$.

RESPUESTAS AL CAPÍTULO 6

EJERCICIOS 6.1

1. $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; **2.** $\frac{1}{4\sqrt{x+x\sqrt{x}}}$; **3.** $\frac{1}{8\sqrt{\left(1+\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)\left(x+x\sqrt{x}\right)}}$; **4.** $\cos(\operatorname{sen}(x+1))\cos(x+1)$;

5. $(\operatorname{sen} x)(\cos\cos x)(\operatorname{sen}\operatorname{sen}\cos x)$; **6.** $-3\operatorname{sen}(2\operatorname{sen}^3 x)\operatorname{sen}^2 x\cos x$;

7. $-3(\operatorname{sen} 2x)[(\operatorname{sen}\cos^3 x)(\cos\cos^3 x)(\cos x)+(\operatorname{sen}^2\cos^2 x)(\cos\cos^2 x)]$;

8. $(\cos\operatorname{sen}\operatorname{sen} x)(\cos\operatorname{sen} x)(\cos x)$;

9. $60x^4(\operatorname{sen}(2\operatorname{sen}^3\operatorname{sen}^4 x^5))(\operatorname{sen}^2\operatorname{sen}^4 x^5)(\cos\operatorname{sen}^4 x^5)(\operatorname{sen}^3 x^5)(\cos x^5)$;

10. $\frac{\cos(\ln x)+x\cot x}{x}$; **11.** $\frac{\ln(\ln(2x))\ln(2x)+1}{\ln(2x)}$; **12.** $\frac{\ln x+1}{x\ln x}$; **13.** $\frac{\ln(\ln x)+1}{x}$; **14.** $\frac{2\ln^2(\ln x)+1}{x\ln x\ln(\ln x)}$;

15. $\frac{\ln(5x)}{x\sqrt{1+\ln^2(5x)}}$; **16.** $e^{x\operatorname{sen} x}(x\cos x+\operatorname{sen} x)$; **17.** $\frac{1-e^{\cos x}\operatorname{sen} x}{x+e^{\cos x}}$;

18. $xe^{(x^2+3x+2)}(2x^2+3x+2)$; **19.** $-\operatorname{sen}(e^x)e^{x+\cos(e^x)}$; **20.** $e^{\operatorname{sen} x}\cos x+e^x\cos(e^x)$;

21. $4(\cosh\operatorname{senh}\operatorname{senh}(4x))(\cosh\operatorname{senh}(4x))(\cosh(4x))$;

22. $(\cosh \cosh \operatorname{senh} x)(\operatorname{senh} \operatorname{senh} x)(\cosh x)$;

23. $\frac{1+\operatorname{senh}(2x+4)}{2\sqrt{x+\operatorname{senh}^2(x+2)}}$; **24.** $4\left(x+\ln^2(1+\sqrt{x})\right)^3\left(\frac{x(1+\sqrt{x})+\ln(1+\sqrt{x})}{x+\sqrt{x}}\right)$;

25. $e^{x^e} e x^{e-1} + e^{e^x} e^x$; **26.** $e^{e^{e^{x^2}}} e^{e^x} e^x + e^{e^{x^e}} e^{x^e} e x^{e-1}$;

27. $e^{e^x} e^x (e^x + 1)$; **28.** $e^{x+e^{2x+e^{3x}}}\left[1+(2+3e^{3x})\, e^{2x+e^{3x}}\right]$;

29. $-3(\cos(1+\cos(1+\operatorname{sen} 3x)))(\operatorname{sen}(1+\operatorname{sen} 3x))(\cos 3x)$; **30.** $\operatorname{sen} 2x + 2x\cos x^2$;

31. $\frac{2xe^{x^2}+1}{x+e^{x^2}}$; **32.** $\frac{2\ln(x\ln x)(1+\ln x)}{1+\ln^2(x\ln x)}$; **33.** $\frac{x(1+\operatorname{sen}^2 x)+\ln(1+\operatorname{sen}^2 x)\operatorname{sen} 2x}{(1+\operatorname{sen}^2 x)\sqrt{x^2+\ln^2(1+\operatorname{sen}^2 x)}}$;

34. $-(\cosh \operatorname{sen} \cosh \cos x)(\cos \cosh \cos x)(\operatorname{senh} \cos x)(\operatorname{sen} x)$;

35. $(\cosh(x+\cosh x))(\cosh x + x \operatorname{senh} x)$;

36. $\operatorname{senh}\left(x^2 e^{x \operatorname{senh} x}\right) x e^{x \operatorname{senh} x}(2 + x(\operatorname{senh} x + x\cosh x))$;

37. $\cos(x+\cos(e^x + e^{\operatorname{sen} x+\cos x}))\times$
$\times\left[1-\operatorname{sen}(e^x+e^{\operatorname{sen} x+\cos x})(e^x+e^{\operatorname{sen} x+\cos x}(\cos x-\operatorname{sen} x))\right]$;

38. $\frac{1}{2}\operatorname{senh}\left(2x^2+2\sqrt{e^{\operatorname{senh} x+\cosh 2x}+e^{\operatorname{sen} 2x+\cos x}}\right)\times$
$$\times\left[\frac{4x+ \atop e^{\operatorname{senh} x+\cosh 2x}(\cosh x+2\operatorname{senh} 2x)+e^{\operatorname{sen} 2x+\cos x}(2\cos 2x-\operatorname{sen} x)}{\sqrt{e^{\operatorname{senh} x+\cosh 2x}+e^{\operatorname{sen} 2x+\cos x}}}\right];$$

39. $\frac{1}{2}\operatorname{senh}\left(2x^2+2\sqrt{e^{\operatorname{senh} 2x+\cosh x}+e^{\operatorname{sen} x+\cos 2x}}\right)\times$
$$\times\left[\frac{4x+ \atop e^{\operatorname{senh} 2x+\cosh x}(2\cosh 2x+\operatorname{senh} x)+e^{\operatorname{sen} x+\cos 2x}(\cos x-2\operatorname{sen} 2x)}{\sqrt{e^{\operatorname{senh} 2x+\cosh x}+e^{\operatorname{sen} x+\cos 2x}}}\right];$$

40. $3\operatorname{senh}(2\cosh^3 x)\cosh^2 x \operatorname{senh} x + \cosh^2 x\,(3\operatorname{senh}^3 x + \cosh x \operatorname{senh} 2x)+$
$+3\cosh^2 \operatorname{senh}^2 x \operatorname{senh} \operatorname{senh}^2 x \operatorname{senh} 2x$;

41. $f'(x+1)$; **42.** $f'(x+2)$; **43.** $2f'(2x+1)$; **44.** $2f(x)+(2x+1)f'(x)$;

45. $f(2x+1)+2xf'(2x+1)$; **46.** $-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)$; **47.** $\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$; **48.** $-\frac{f'(x)}{f^2(x)}$;

49. $\frac{1}{x^2}f'\left(1-\frac{1}{x}\right)$; **50.** $\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)f'\left(x+\frac{1}{x}\right)$; **51.** $2f(x)f'(x)$; **52.** $2xf'(x^2)$;

53. $f'(1+f(x))f'(x)$; **54.** $f'(x+f(x))(1+f'(x))$;

55. $f'(1+f(1+f(x)))f'(1+f(x))f'(x)$;

56. $f'(x+f(x+f(x)))(1+f'(x+f(x)))(1+f'(x))$;

57. $f'(xf(x))(f(x)+xf'(x))$; **58.** $xf'(x^2f(x^3))(2f(x^3)+3x^3f'(x^3))$;

59. $xf'(x^2+f(x^3))(2+3xf'(x^3))$; **60.** $6x^2f(x^3)f'(x^3)$;

61. $6f(f^3(x))f'(f^3(x))f^2(x)f'(x)$;

62. $6xf^2(x^2f^4(x^5))f'(x^2f^4(x^5))(f^4(x^5)+10x^5f^3(x^5)f'(x^5))$;

63. $\frac{f'(\sqrt{x+1})}{4\sqrt{(x+1)(1+f(\sqrt{x+1}))}}$; **64.** $\frac{xf(\sqrt{1+x^2})f'(\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{(1+x^2)(1+f^2(\sqrt{1+x^2}))}}$; **65.** $f'\left(1+\sqrt{1+f^2(x)}\right)\frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}$;

66. $f'(x)e^{f(x)}f'(e^{f(x)})$; **67.** $e^xf'(f(e^x))f'(e^x)$; **68.** $f'(e^x+f(x))(e^x+f'(x))$;

69. $e^xf'(e^xf(x))(f'(x)+f(x))$; **70.** $f'(\operatorname{sen} x)\cos x+\cos f(x)f'(x)$;

71. $6f(\operatorname{sen}^3 x)f'(\operatorname{sen}^3 x)\operatorname{sen}^2 x\cos x$; **72.** $-f'(\cos f(x))\operatorname{sen} f(x)f(x)$;

73. $f'(f(x)\cos x)(f'(x)\cos x - f(x)\operatorname{sen} x)$;

74. $f'(xf(x\operatorname{sen} x))(xf'(x\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x+x\cos x)+f(x\operatorname{sen} x))$;

75. $\cosh f(\cosh x)f'(\cosh x)\operatorname{senh} x$; **76.** $f'(\cosh(f(x)))(\operatorname{senh} f(x))f'(x)$;

77. $\ln(2+f(1+\ln x))^2\frac{f'(1+\ln x)}{x(2+f(1+\ln x))}$;

78. $f'\left(\ln^2 f\ (1+\ln^3 x)\right)\ln f^2\left(1+\ln^3 x\right)\frac{f'\left(1+\ln^3 x\right)\ln^2 x^3}{xf\left(1+\ln^3 x\right)}$;
79. $\cosh f\ (\cosh f\ (x))\, f'\,(\cosh f\ (x))\,\operatorname{senh} f\ (x)\, f'\,(x)$;
80. $-f'\,(\operatorname{sen} f\ (\cos f\ (\tan f\ (x))))\cos f\,(\tan f\ (x))\, f'\,(\cos f\ (\tan f\ (x)))\ \times$
$\times\operatorname{sen} f\,(\tan f\ (x))\, f'\,(\tan f\ (x))\sec^2 f\ (x)\, f'\,(x)$;
81. $48f\left(4g^2\,(3x)\ \right) f'\left(4g^2\,(3x)\right) g\,(3x)\, g'\,(3x)$;
82. $-3f'\left(3e^{g(-x)}\right)e^{g(-x)}g'\,(-x)$; **83.** $f'\,(g\,(x)+f\ (-x))\,(g'\,(x)-f'\,(-x))$;
84. $g'\,(f\ (x)-g\,(f\ (x)-g\,(x)))\,[f'\,(x)-g'\,(f\ (x)-g\,(x))\,(f'\,(x)-g'\,(x))]$;
85. $f'\,(-xg\,(-x))\,(xg'\,(-x)-g\,(-x))$;
86. $g'\,(g\,(2x^2)\,f\ (3x^3))\,(4xg'\,(2x^2)\,f\ (3x^3)+9x^2f'\,(3x^3)\,g\,(2x^2))$;
87. $e^xf'\left(e^xg\left(e^{f\,(x)}\right)\right)\left(g\left(e^{f\,(x)}\right)+g'\left(e^{f\,(x)}\right)e^{f\,(x)}f'\,(x)\right)$;
88. $f'\left(e^{g(e^x)}\right)\left(e^{x+g(e^x)}g'\,(e^x)\right)$;
89. $-e^{f\,(-x)}f'\,(-x)\,g\left(-e^{g(-x)}f\ (-x)\right)+$
$+e^{(f+g)(-x)}g'\left(-e^{g(-x)}f\ (-x)\right)(g'(-x)f\,(-x)+f'\,(-x))$;
90. $g'\left(\sqrt{1+g^2\,(-x)}+\sqrt{1+f^{\,2}\,(x)}\right)\left(\frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1+f^{\,2}(x)}}-\frac{g(-x)g'(-x)}{\sqrt{1+g^2(-x)}}\right)$.

EJERCICIOS 6.2

1. $f^{-1}\,(x)=\frac{x+2}{3}$, Dominio de $f^{-1}=\mathbf{R}$, Rango de $f^{-1}=\mathbf{R}$; **2.** $f^{-1}\,(x)=\frac{1-x}{10}$, Dominio de $f^{-1}=\mathbf{R}$, Rango de $f^{-1}=\mathbf{R}$; **3.** $f^{-1}\,(x)=\sqrt[3]{x-1}$, Dominio de $f^{-1}=\mathbf{R}$, Rango de $f^{-1}=\mathbf{R}$; **4.** $f^{-1}\,(x)=\frac{\sqrt[3]{x+2}-1}{2}$, Dominio de $f^{-1}=\mathbf{R}$, Rango de $f^{-1}=\mathbf{R}$;
5. $f^{-1}\,(x)=\frac{1-x}{x}$, Dominio de $f^{-1}=\mathbf{R}-\{0\}$, Rango de $f^{-1}=\mathbf{R}-\{-1\}$; **6.** $f^{-1}\,(x)=\frac{x+1}{x-2}$, Dominio de $f^{-1}=\mathbf{R}-\{2\}$, Rango de $f^{-1}=\mathbf{R}-\{1\}$; **7.** $f^{-1}\,(x)=\sqrt{x-1}+1$, Dominio de $f^{-1}=[1,\infty)$, Rango de $f^{-1}=[1,\infty)$; **8.** $f^{-1}\,(x)=-\sqrt{x-1}+1$, Dominio de $f^{-1}=[1,\infty)$, Rango de $f^{-1}=(-\infty,1]$; **9.** $f^{-1}\,(x)=\frac{(x-1)^3-4}{3}$, Dominio de $f^{-1}=\mathbf{R}$, Rango de $f^{-1}=\mathbf{R}$; **10.** $f^{-1}\,(x)=\sqrt[5]{1-\sqrt[3]{\frac{3-x}{2}}}$, Dominio de $f^{-1}=\mathbf{R}$, Rango de $f^{-1}=\mathbf{R}$;
11. $\frac{1}{3}$; **12.** $x-4y+3=0$; **13.** 1; **16.** $\frac{2\varphi(x)\varphi'(x)}{1+\varphi^4(x)}$; **17.** $\frac{\varphi'(\arctan x)}{1+x^2}$; **18.** $-\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)\sqrt{\varphi^2(x)-1}}$;
19. 0; **20.** $3\varphi^2\,(x)\,\varphi'\,(x)\arccos x-\frac{\varphi^3(x)}{\sqrt{1-x^2}}$; **21.** $\varphi'\,(x+\operatorname{arcsen} x)\left(1+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$;
22. $\varphi'\,(x\arccos x)\left(\arccos x-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$; **23.** $2x\left[\varphi\left(\arctan^2 x\right)+x\varphi'\left(\arctan^2 x\right)\left(\frac{\arctan x}{1+x^2}\right)\right]$;
24. $\varphi'\,(\arctan\varphi\,(x))\frac{\varphi'(x)}{1+\varphi^2(x)}$; **25.** $\frac{\varphi'(\operatorname{arcsen} x)}{\left[1+(1+\varphi(\operatorname{arcsen} x))^2\right]\sqrt{1-x^2}}$.

EJERCICIOS 6.3

1. a) $-\frac{2x+23}{(8-x)^2}$, b) $\frac{y-3}{8-x}$; **2.** a) $\frac{1}{2x(x-1)}$, b) $\frac{1-e^{2y+1}}{2xe^{2y+1}}$; **3.** a) $\frac{1-x}{3\sqrt[3]{\frac{1}{4}(2x+1-x^2)^2}}$, b) $\frac{1-x}{3y^2}$;
4. a) $-\frac{x+\left(1+(2-x)^2\right)\arctan(2-x)}{x^2\left(1+(2-x)^2\right)}$, b) $-\frac{1+y\sec^2(xy)}{x\sec^2(xy)}$; **5.** a) $\frac{x^2+3}{x\sqrt{x^2-(x^2-3)^2}}$, b) $\frac{2x-\operatorname{sen} y}{x\cos y}$; **6.** $-\frac{2x+3y}{3(x+y^2)}$;
7. $-\frac{1+\cos(x+y)}{3+\cos(x+y)}$; **8.** $-\frac{ye^{xy}+2x}{xe^{xy}-2y}$; **9.** $-\frac{y\left(1+\left(x^2+y^2\right)^2\right)+2x}{x\left(1+(x^2+y^2)^2\right)+2y}$; **10.** $\frac{x^2+y^2-x+\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+y+\sqrt{x^2+y^2}}$; **11.** $-\frac{3}{5}$; **12.** $-\frac{1}{3}$.

EJERCICIOS 6.4

1. 144; **2.** 25920; **3.** $\frac{3}{5}$; **4.** 26; **5.** $-\frac{1}{2}$; **6.** $-\frac{45}{4}$; **7.** 3360; **8.** $\frac{11}{6}$; **9.** $-\frac{1}{4}$; **10.** $\frac{23}{2}$;
11. $5(\ln 3x+1)(3x)^{5x}$; **12.** $\left(\frac{(x^2+1)\ln(x^2+1)+2x^2}{x^2+1}\right)(x^2+1)^x$; **13.** $\left(\frac{(x+1)\ln(x+1)+2x}{x+1}\right)\frac{(\sqrt{x+1})^{\sqrt{x}}}{4\sqrt{x}}$;
14. $\operatorname{sen} x\left(\frac{2\cos^2 x}{1+\operatorname{sen}^2 x}-\ln(1+\operatorname{sen}^2 x)\right)(1+\operatorname{sen}^2 x)^{\cos x}$;
15. $\left[\frac{(x^2+x+1)(25x+23)}{(x+1)(5x+4)}+\ln\left((x+1)^2(5x+4)^3\right)^{2x+1}\right]\left((x+1)^2(5x+4)^3\right)^{x^2+x+1}$;
16. $\left[(1+\ln x)\ln x^{x^x}+x^{x-1}\right]x^{x^x}$; **17.** $(5x)^{(10x)^{(15x)}}(10x)^{(15x)}\left[\frac{1+(1+\ln 10x)\ln(5x)^{(15x)}}{x}\right]$;
18. $(\ln x)^{(\ln x)^{\ln x}}(\ln x)^{\ln x}\left[\frac{\ln x\ln(\ln x)(1+\ln(\ln x))+1}{x\ln x}\right]$;
19. $2x(x^2+1)^{(x^2+2)^{(x^2+3)}}(x^2+2)^{(x^2+3)}\left[\ln(x^2+1)\left(\frac{\ln(x^2+2)^{(x^2+2)}+x^2+3}{x^2+2}\right)+\frac{1}{x^2+1}\right]$;
20. $x^{x^{x^x}}x^{x^x}\left[\ln x^{x^x}\left(\ln x(1+\ln x)+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}\right]$; **21.** $\frac{y(\ln y^x-y)}{x(\ln x^y-x)}$;
22. $\frac{2x(x+y)-y(x^2+y^2)}{\ln(x+y)(x+y)(x^2+y^2)+y(x^2+y^2)-2y(x+y)}$; **23.** $(\varphi(x))^{\varphi(x)}\varphi'(x)(1+\ln\varphi(x))$;
24. $x(\varphi(x^2))^{(\varphi(x^3)-1)}\left[2\varphi(x^3)\varphi'(x^2)+3x\varphi(x^2)\varphi'(x^3)\ln\varphi(x^2)\right]$.

EJERCICIOS 6.5

1. 24; **2.** $-\frac{6}{x^4}$; **3.** $\alpha^n e^{\alpha x}$; **4.** $-\operatorname{sen} x$; **5.** $\frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$; **6.** $(2-x^2)\cos x-4x\operatorname{sen} x$;
7. $\cosh x+\operatorname{senh} x$; **8.** $-\frac{2}{x^3}$; **9.** $\frac{24}{(x+1)^5}$; **10.** $81\cos 3x$; **11.** $-\frac{64}{243}$; **12.** 0;
13. $2(\varphi'(x^2)+2x^2\varphi''(x^2))$; **14.** $2\varphi'(x)+x\varphi''(x)$;
15. $4\left[\varphi'(\varphi(2x))\varphi''(2x)+\varphi''(\varphi(2x))(\varphi'(2x))^2\right]$; **16.** $e^x\left[\varphi'(e^x)+e^x\varphi''(e^x)\right]$;
17. $f''(x)=2\left[(\varphi'(x))^2+\varphi(x)\varphi''(x)\right]$; **18.** $e^x\left[\varphi'(xe^x)(x+2)+\varphi''(xe^x)(x+1)\right]$;
19. $\frac{1}{x^4}\left[2x\varphi'\left(\frac{1}{x}\right)+\varphi''\left(\frac{1}{x}\right)\right]$;
20. $\frac{1}{\varphi^4(x)}\left[(\varphi'(x))^2\varphi''\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)+\left(2(\varphi'(x))^2-\varphi''(x)\varphi(x)\right)\varphi'\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)\varphi(x)\right]$;
21. $\varphi^{(n)}(x+1)$; **22.** $(-1)^n\varphi^{(n)}(1-x)$; **23.** $2^n\varphi^{(n)}(2x+1)$; **24.** $(-1)^n\varphi^{(n)}(-x)$;
25. $(-1)^{n-1}3^n\varphi^{(n)}(2-3x)$.

EJERCICIOS 6.6

1. $\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$; **2.** $\sqrt{1-x^2}$; **3.** x^3e^{-3x}; **4.** $e^{2x}\operatorname{sen} 3x$; **5.** $\frac{1}{9+e^{3x}}$; **6.** $\frac{e^{3x}}{e^{2x}-1}$; **7.** $\frac{x^5}{x^4+1}$; **8.** $e^{\sqrt[3]{x}}$;
9. $\frac{1}{\cos x+\operatorname{sen} x+1}$; **10.** $\frac{\sec^2 x}{3\tan^2 x+4}$; **11.** $\frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^2 x+3}$; **12.** $\sec x$; **13.** $\sec^4 x$; **14.** $x\arctan x$; **15.** $\frac{x^3}{(x^2+4)^3}$;
16. $x(x+1)^4$; **17.** $\frac{x}{(x+2)^3}$; **18.** $\frac{x+1}{(x-1)^4}$; **19.** $\frac{x^3}{x^2+1}$; **20.** $x^3\sqrt{x^2+1}$; **21.** $3x(2x+1)^3$;
22. $\frac{x^2+x+3}{(x+1)^7}$; **23.** $\frac{x^2+x+2}{(x+6)^4}$; **24.** $\frac{x^2+x+1}{(2x+3)^3}$; **25.** $\frac{1}{(x^2+1)^2}$; **26.** $\frac{2}{2-\operatorname{sen}^2 2x}$; **27.** $\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{3}}$;
28. $\sec^3 x$; **29.** $\cos^4 x$; **30.** $\tan^2 x\sec x$; **31.** $\sqrt{e^{2x}+1}$; **32.** $\frac{1}{x^4-1}$; **33.** $\frac{1}{(x+1)(x-1)^2}$; **34.** $\frac{x^3}{(x^2+1)^2}$;
35. $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}$; **36.** $\frac{x^2-3x+17}{(x-2)(x+3)}$; **37.** $\frac{x^2+1}{(x-1)^2}$; **38.** $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$; **39.** $\frac{1}{(x^2-1)^3}$; **40.** $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}$;
41. $(x^2-1)^{\frac{3}{2}}$; **42.** $\frac{3x+2}{(x^2+2x+2)^2}$; **43.** $\frac{5x+6}{(x^2+1)^3}$; **44.** $e^x\operatorname{sen}^2 x$; **45.** $(e^x+1)^{\frac{3}{2}}$; **46.** $\frac{\cos^2 x+4}{4\operatorname{sen}^3 x}$;

47. $x^3\cos x$; **48.** $xe^x\operatorname{sen}x$; **49.** $\ln^4 x$; **50.** $\frac{x+1}{(x^2+x+1)^2}$; **51.** $\frac{x^3+x^2+x+1}{\sqrt{x^2+1}}$; **52.** $\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}\operatorname{sen}\sqrt{x}$; **53.** $\frac{e^x}{4}(\operatorname{sen}3x+\operatorname{sen}x)$; **54.** $\ln^3 x$; **55.** x^4e^{-x}; **56.** $x\arctan^2 x$; **57.** $\operatorname{arcsen}^2 x$; **58.** $x\operatorname{arcsen}^2 x$; **59.** $\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen}x$; **60.** $x^2\ln(x+1)$; **61.** $(2x+3)\ln(5x+7)$; **62.** $(x+2)\ln(x^2+1)$; **63.** $\sqrt{x^3}(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{3}}$; **64.** $\frac{4x^2+4x+7}{5(1-x)(x+2)(x^2-1)}$; **65.** $x\ln^3 x$; **66.** $\frac{8e^{3x}}{(e^{2x}+1)^3}$; **67.** $xe^{\sqrt[3]{x}}$; **68.** $\frac{e^x}{e^{3x}+1}$; **69.** $x^2\sqrt{x^2+1}$; **70.** $\frac{x+1}{x^3+8}$; **71.** $\operatorname{sen}^2(\ln x)$; **72.** $x^3\cos^2 x$; **73.** $x^2e^x\cos x$; **74.** $\frac{1}{x^3-1}$; **75.** $\frac{x^3+7x^2+17x+15}{\sqrt{x^2+4x+5}}$; **76.** $\frac{1}{e^{2x}+3e^x+4}$; **77.** $x^2e^x\operatorname{sen}x$; **78.** $\frac{x^3}{x^4+x^2+1}$; **79.** $\frac{x^7}{(x^4+x^2+1)^3}$; **80.** $-\frac{x^2+2}{3(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$; **84.** $k=-3$; **85.** $k=\frac{7}{4}$; **86.** $k_1=-2,\ k_2=-3$; **87.** $k_1=-4$, $k_2=-2$; **88.** $a=1, b=1$; **90.** $k_1=1,\ k_2=2,\ k_3=3$; **92.** $A=\frac{10}{11}$; **93.** $A=\frac{1}{8}$; **94.** $A=3$; **95.** $A=\frac{5}{2}$; **96.** $A=\frac{1}{4}$; **97.** $A=\frac{5}{8}$; **98.** $A=\frac{1}{6}$; **99.** $A=\frac{1}{6}, B=\frac{1}{4}$; **100.** $A=1, B=2$; **101.** $A=3, B=-5, C=2$; **102.** $A=1, B=1, C=1$; **103.** $A=\frac{1}{8}$, $B=-\frac{1}{16}$; **104.** $A=\frac{1}{6}, B=-\frac{1}{9}$; **105.** $A=\frac{1}{6}, B=0$; **106.** $A=\frac{1}{5}, B=\frac{6}{25}, C=-\frac{17}{125}$; **107.** $A=\frac{1}{3}, B=-\frac{8}{9}, C=\frac{14}{27}$; **108.** $A=-\frac{1}{6}, B=\frac{1}{4}, C=\frac{1}{4}$; **109.** $A=\frac{1}{12}, B=0$, $C=0$; **111.** $A=\frac{1}{2}, B=-\frac{3}{2}$; **112.** $A=4, B=-3$; **113.** $A=\frac{21}{85}, B=-\frac{18}{85}$; **114.** $A=\frac{7}{169}, B=-\frac{17}{169}$; **115.** $A=1, B=1, C=1, D=1$; **116.** $A=\frac{2}{25}, B=\frac{11}{65}$, $C=\frac{14}{25}, D=\frac{246}{325}$; **117.** $A=-1, B=-6, C=5, D=16$; **118.** $A=\frac{1}{4}, B=-\frac{1}{2}, C=\frac{1}{2}$, $D=\frac{1}{4}$; **119.** $A=-\frac{1}{3}, B=1, C=-\frac{1}{3}, D=-1$; **120.** $A=1, B=-1$; **121.** $A=1$, $B=3, C=5, D=7$; **122.** $A=2, B=3, C=2, D=-1$; **123.** $A=\frac{1}{4}, B=\frac{5}{4}$, $C=-\frac{1}{4}, D=-\frac{5}{4}$; **124.** $A=-\frac{1}{8}, B=\frac{1}{4}, C=-\frac{1}{12}, D=-\frac{3}{8}$; **130.** a) $-\frac{6(6x^2-1)}{(3x^2+1)^2}$, b) $-\frac{6(6x^2-1)}{(3x^2+1)^2}$; **131.** $k(0)=2$, $k(3)=\frac{2}{\sqrt{50653}}\approx 0.0088$.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 6 (TIPO A)

1. $e^{x^2}(2x^2+1)+xe^x(x+2)$; **2.** $\ln(1+\operatorname{sen}^4 x)^2\left(\frac{4\operatorname{sen}^3 x\cos x}{1+\operatorname{sen}^4 x}\right)$; **3.** 0; **4.** $\frac{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{\left(x^2+x\sqrt{x}\right)\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)}}$; **5.** $\frac{1}{4}$; **7.** $\frac{6\arctan^2\left(1+\ln^2(2+\operatorname{arcsen}x)\right)\ln(2+\operatorname{arcsen}x)}{(2+\operatorname{arcsen}x)\sqrt{1-x^2}\left[1+\left(1+\ln^2(2+\operatorname{arcsen}x)\right)^2\right]}$; **8.** $\frac{(2+\cos x)(3\cos x-2\operatorname{sen}x)+2\left(3\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}2x\right)}{(2+\cos x)^3}$; **9.** $27e^{3x}(9x^2+30x+20)$; **10.** -1.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 6 (TIPO B)

1. $3(4x^3+3x^2)\tan^2(x^4+x^3+2)\sec^2(x^4+x^3+2)$; **2.** $\frac{24\ln^3\left(\ln^3\left(\ln^2(\ln x)\right)\right)}{\ln\left(\ln^2(\ln x)\right)\ln(\ln x)x\ln x}$; **3.** 0;

4. $\frac{4\sqrt{(x^4+1)\left(x^3+\sqrt{x^4+1}\right)\left(x^2+\sqrt{x^3+\sqrt{x^4+1}}\right)}+4x\sqrt{(x^4+1)\left(x^3+\sqrt{x^4+1}\right)}+3x^2\sqrt{x^4+1}+2x^3}{8\sqrt{(x^4+1)\left(x^3+\sqrt{x^4+1}\right)\left(x^2+\sqrt{x^3+\sqrt{x^4+1}}\right)\left(x+\sqrt{x^2+\sqrt{x^3+\sqrt{x^4+1}}}\right)}}$;

5. $\frac{1}{5}$; **6.** $\frac{12}{5}$;

7. $3\arctan^2\left(x+\ln^2(2x^2+\operatorname{arcsen}x)\right)\frac{\left(2x^2+\operatorname{arcsen}x\right)\sqrt{1-x^2}+\ln\left(2x^2+\operatorname{arcsen}x\right)^2\left(4x\sqrt{1-x^2}+1\right)}{(2x^2+\operatorname{arcsen}x)\sqrt{1-x^2}\left[1+\left(x+\ln^2(2x^2+\operatorname{arcsen}x)\right)^2\right]}$;

8. $2097152\cos 2x$; **9.** $27e^{3x}(9x^2+57x+83)$; **10.** $-\frac{5}{2}$.

RESPUESTAS AL CAPÍTULO 7

EJERCICIOS 7.1

Ejercicio	Recta tangente	Recta normal
1	$2x - y + 4 = 0$	$x + 2y - 1343 = 0$
2	$x + y - 2 = 0$	$x - y = 0$
3	$x - y = 0$	$x + y = 0$
4	$7x - y - 4 = 0$	$x + 7y - 22 = 0$
5	$2x + ey - 3 = 0$	$ex - 2y + \frac{2-e^2}{e} = 0$
6	$x - y + \ln 4 - \frac{\pi}{4} = 0$	$x + y - \ln 4 - \frac{\pi}{4} = 0$
7	$3x - \sqrt{2}y - 1 = 0$	$\sqrt{2}x + 3y - 4\sqrt{2} = 0$
8	$(1 + \ln 3)\, x - y - 1 = 0$	$x + (1 + \ln 3)\, y - \ln 3\,(1 + \ln 3) - 1 = 0$
9	$19x - 8y - 27 = 0$	$8x + 19y - 414 = 0$
10	$(\pi^2 + 2\pi)\, x - 8y - \frac{\pi^2+4\pi}{2} = 0$	$8x + (\pi^2 + 2\pi)\, y - \frac{\pi^4+2\pi^3+128}{16} = 0$
11	$x + 3y - 4 = 0$	$3x - y - 2 = 0$
12	$6x + 5y - 11 = 0$	$5x - 6y + 1 = 0$
13	$3x + y - 4 = 0$	$x - 3y + 2 = 0$
14	$3x - y - 3 = 0$	$x + 3y - 1 = 0$
15	$y - x = 0$	$y + x = 0$

16. $y = 2x - \frac{5}{2}$; **17.** $y = \frac{1}{2}x + \ln 2 - 1$; **18.** $y = 3x - 3\ln\sqrt{6} + \frac{1}{6}$; **19.** $y = x - \frac{10}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$; **20.** $y = x - \frac{9}{7}, y = x + \frac{15}{7}$; **21.** $a = \frac{1}{2}$; **22.** $y = x - \frac{2\sqrt{3}}{9}, y = x - \frac{2\sqrt{3}}{9}$; **23.** $x - 2y + \frac{\pi-2}{2} = 0$, $x - 2y + \frac{2-\pi}{2} = 0$; **25.** $x_1 = 1, x_2 = 7$; **26.** $ex - (e-1)\, y + e^{\frac{1}{e-1}} - e^{\frac{e}{e-1}} = 0$; **27.** Recta tangente: $y = x$, Recta normal: $y = -x + 2$; **28.** $y = 0, y = 16x - 32$; **29.** $y = -2x + 1$, $y = 2x + 1$; **30.** $y = 0, y = 4x - 4$; **31.** $y = 2x - 1, y = 14x - 49$; **32.** $y = 0$, $y = 27x - 54$; **35.** $\theta = \frac{\pi}{4}$; **36.** $\theta = 0$; **38.** $\theta = \arctan\frac{3}{4} \approx 0.6435$.

EJERCICIOS 7.2

1. $x = 1.60564$; **2.** $x = 0.34676$; **3.** $x = 1.15831$; **4.** $x = 0.82891$; **5.** $x = 0.51505$; **6.** $x = 0.35370$; **7.** $x = 0.87048$; **8.** $x = 1$; **9.** $x = 0.83377$; **10.** $x = 0.41961$; **11.** $x = 0.38271$; **12.** $x = 0.50992$; **13.** $x = 0.98115$; **14.** $x = 0.73263$; **15.** $x = 1.17867$; **16.** $x = 0.55090$; **17.** $x = 0.88860$; **18.** $x = 0.24933$; **19.** $x = 0.17812$; **20.** $x = 0.40638$; **21.** $x = 2.82849$; **22.** $x = 1.18743$; **23.** $x = 0.65335$; **24.** $x = 0.34626$; **25.** $x = 0.34588$; **26.** $x_1 = 0.72290$, $x_2 = -0.72290$; **27.** $x_1 = 0.39445$, $x_2 = -2.23603$; **28.** $x_1 = 2.68824$, $x_2 = -2.21844$; **29.** $x = 0.13336$; **30.** $x_1 = 1.30065$, $x_2 = -1.05053$.

EJERCICIOS 7.3

1. $lst = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $lsn = \sqrt{5}$, $lsst = \frac{1}{2}$, $lssn = 2$; **2.** $lst = \sqrt{2}$, $lsn = \sqrt{2}$, $lsst = 1$, $lssn = 1$;

3. $lst = \frac{\sqrt{10}}{3}$, $lsn = \sqrt{10}$, $lsst = \frac{1}{3}$, $lssn = 3$; **4.** $lst = \frac{\pi\sqrt{5}}{4}$, $lsn = \frac{\pi\sqrt{5}}{8}$, $lsst = \frac{\pi}{2}$, $lssn = \frac{\pi}{8}$; **5.** $lst = \sqrt{e^2+1}$, $lsn = e^{-1}\sqrt{e^2+1}$, $lsst = e$, $lssn = e^{-1}$; **6.** $lst = \frac{e\sqrt{5}}{2}$, $lsn = e\sqrt{5}$, $lsst = \frac{e}{2}$, $lssn = 2e$; **7.** $lst = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $lsn = \sqrt{5}$, $lsst = \frac{1}{2}$, $lssn = 2$; **8.** $lst = \frac{2}{9}\sqrt{10}$, $lsn = \sqrt{5}$, $lsst = \frac{1}{2}$, $lssn = 2$; **9.** $lst = 2\sqrt{17}$, $lsn = \frac{\sqrt{17}}{2}$, $lsst = 8$, $lssn = \frac{1}{2}$; **10.** $lst = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $lsn = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $lsst = 1$, $lssn = \frac{1}{2}$.

EJERCICIOS 7.4

1. $c = 0$; **2.** No satisface las hipótesis del Teorema de Rolle (no es continua en ese intervalo); **3.** $c = 0$; **4.** $c = 0$; **5.** $c = \frac{\pi}{4}$; **6.** $c = \frac{1+\sqrt{43}}{3} \approx 2.51914$; **7.** $c = 0$; **8.** No satisface las hipótesis del Teorema de Rolle (no es continua en el intervalo considerado); **9.** $c = \pm\sqrt{\frac{12+3\sqrt{21}}{5}} \approx \pm 2.26926$; **10.** Cualquier $c \in [3,5]$ (la función es constante en el intervalo considerado).

EJERCICIOS 7.5

1. Falso; **2.** Verdadero; **3.** Falso; **5.** $c = \frac{5}{2}$; **6.** $c = \pm 1$; **7.** $c = \operatorname{arcsen}\frac{2}{\pi} \approx 0.69010$; **8.** $c = \operatorname{arcsen}\frac{2}{\pi} \approx 0.69010$; **9.** $c = \frac{e^2-1}{2} \approx 3.19452$; **10.** $c = \frac{1-\sqrt{1-\ln^2 2}}{\ln 2}$; **11.** $c = \pm\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}$; **12.** La función no satisface las hipótesis del Teorema de Lagrange (no es continua en el intervalo considerado); **13.** El Teorema de Lagrange se satisface para las dos raíces reales de la ecuación $x^4 + 2x^2 - 5x + 1 = 0$ (aproximando estas raíces con el Método de Newton-Raphson se obtiene $c = 0.2197897$ y $c = 1.2068389$); **14.** $c = \pm\sqrt{\sqrt{285} - 16}$; **15.** La función no satisface las hipótesis del Teorema de Lagrange (no es derivable en el intervalo considerado).

EJERCICIOS 7.6

1. $c = \frac{3}{2}$; **2.** $c = -\frac{2}{3}$; **3.** $c = \frac{\sqrt{19}-2}{3}$; **4.** $c = \frac{4}{3}$; **5.** $c = \frac{\pi}{8}$.

EJERCICIOS 7.7

1. $\frac{11}{8}$; **2.** $\frac{13}{8}$; **3.** 0; **4.** $\frac{13}{3}$; **5.** $\frac{5}{27}$; **6.** $\ln 2 - 1$; **7.** $\frac{12}{11}$; **8.** $\frac{9}{7}$; **9.** $\frac{27}{8}$; **10.** $27\ln 3 - 27$; **11.** $\frac{3}{4}$; **12.** 7; **13.** 1; **14.** $\frac{4}{5}$; **15.** 1; **16.** $-\frac{4}{5}$; **17.** 0; **18.** $\frac{1}{2}$; **19.** $\frac{1}{6}$; **20.** 0; **21.** $\frac{4}{3}$; **22.** $\frac{9}{49}$; **23.** $-\frac{1}{6}$; **24.** 1; **25.** $\frac{2}{9}$; **26.** 1; **27.** $-\frac{1}{2}$; **28.** $\frac{1}{4}$; **29.** $\frac{1}{8}$; **30.** 1; **31.** -1; **32.** $\frac{1}{2}$; **33.** 1; **34.** 2; **35.** 1; **36.** 3; **37.** 3; **38.** 6; **39.** -6; **40.** -1.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 7 (TIPO A)

1. $y = 11x + 8$; **2.** $y = \frac{1}{2}(432x - 2591)$; **3.** $y = 2 - x$; **4.** $lst = lsn = \sqrt{2}$; **5.** $lsst = e$, $lssn = e^{-1}$; **8.** $\frac{\pi}{2}$; **9.** $\frac{6}{19}$; **10.** $\frac{4}{3}$.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 7 (TIPO B)

1. $y = (64\ln 2 + 32)x - 128\ln 2 - 48$; **2.** $y = 2x + \frac{4}{3} \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$; **3.** $y = 2 - x$; **4.** $lst = \frac{\pi\sqrt{\pi^2+4\pi+20}}{4(\pi+2)}$, $lsn = \frac{\pi\sqrt{\pi^2+4\pi+20}}{16}$, $lsst = \frac{\pi}{\pi+12}$, $lssn = \frac{\pi(\pi+2)}{16}$; **5.** $lst = \frac{\sqrt{13}}{2}$, $lsn = \frac{\sqrt{13}}{3}$, $lsst = \frac{3}{2}$, $lssn = \frac{2}{3}$; **9.** $-\frac{1}{2}$; **10.** $\frac{3}{2}$.

RESPUESTAS AL CAPÍTULO 8

EJERCICIOS 8.1

En las respuestas de esta sección (ejercicios 1 al 40), $M = f(x_0)$ denota al máximo absoluto de la función, el cual se alcanza en x_0 (punto del intervalo correspondiente), y $m = f(x_1)$ denota al mínimo absoluto de la función, el cual se alcanza en x_1 (punto del intervalo correspondiente).

1. $M = f(x_0) = 2$, cualquier $x_0 \in [-5, 24]$. $m = f(x_1) = 2$, cualquier $x_1 \in [-5, 24]$; **2.** $M = f(x_0) = \pi^2$, cualquier $x_0 \in [0, 0.1]$. $m = f(x_1) = \pi^2$, cualquier $x_1 \in [0, 0.1]$; **3.** $M = f(1) = 5, m = f(0) = 2$; **4.** $M = f(5) = 14, m = f(-2) = 7$; **5.** $M = f(1) = -1, m = f(5) = -13$; **6.** $M = f(4) = 16, m = f(0) = 0$; **7.** $M = f(5) = 75, m = f(4) = 48$; **8.** $M = f(1) = \frac{4}{3}, m = f(0) = 0$; **9.** $M = f(1) = f(4) = \frac{10}{3}, m = f(0) = f(3) = 2$; **10.** $M = f(-1) = \frac{2}{3}, m = f(-2) = -\frac{2}{3}$; **11.** $M = f(-1) = f(2) = \frac{5}{3}, m = f(-2) = f(1) = \frac{1}{3}$; **12.** $M = f(-1) = 4, m = f(1) = 0$; **13.** $M = f(-3) = 63, m = f(-2) = 8$; **14.** $M = f(-3) = 63, m = f(-1) = -1$; **15.** $M = f(-3) = 64, m = f(-1) = 0$; **16.** $M = f(0) = -2, m = f(-1) = -4$; **17.** $M = f(-1) = f(1) = 2, m = f(0) = 1$; **18.** $M = f(-1) = f(1) = 5, m = f(-2) = f(2) = -22$; **19.** $M = f(0) = 0, m = f(-3) = -\frac{45}{16}$; **20.** $M = f(2) = 40, m = f(-3) = -135$; **21.** $M = f(1) = 14, m = f(2) = -80$; **22.** $M = f(0) = 1, m = f(-1) = f(1) = \frac{1}{2}$; **23.** $M = f(0) = \frac{2}{3}, m = f(1) = \frac{1}{2}$; **24.** $M = f(2) = \frac{1}{2}, m = f(0) = 0$; **25.** $M = f(0) = 0, m = f\left(-\sqrt{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}+1}{2}$; **26.** $M = f\left(-\sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{2}+1}{2}, m = f(0) = 0$; **27.** $M = f\left(\sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{2}+1}{2}, m = f\left(-\sqrt{2}\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}+1}{2}$; **28.** $M = f(1) = \frac{1}{2}, m = f(0) = 0$; **29.** $M = f(0) = 0, m = f(-1) = -1$; **30.** $M = f(0) = 0, m = f(-1) = -1$; **31.** $M = f(1) = \frac{1}{e}, m = f(0) = 0$; **32.** $M = f(1) = \frac{3}{e}, m = f(-2) = -6e^2$; **33.** $M = f(1) = \frac{2}{e} + 4, m = f(-1) = -2e + 4$; **34.** $M = f(-2) = \ln(5), m = f(0) = 0$; **35.** $M = f(0) = 0, m = f(-2) = f(2) = \ln\frac{1}{5}$; **36.** $M = f(2) = \ln(25) + 2, m = f(0) = 2$; **37.** $M = f(-1) = f(1) = \arctan(2), m = f(0) = \frac{\pi}{4}$; **38.** $M = f(0) = 3 - \frac{\pi}{2}, m = f(2) = 3 - 2\arctan(5)$; **39.** $M = f(1) = \frac{\pi}{4} + 1, m = f(-1) = -\frac{\pi}{4} - 1$; **40.** $M = f(2) = 2\arctan(2) + 6, m = f(-2) = -2\arctan(2) - 2$; **42.** Por ejemplo: $f(x) = (x^2 + 1)$ y $g(x) = (x^2 - 3)$.

EJERCICIOS 8.2

Ejercicio	Puntos críticos en $x = ...$	La función crece en ...	La función decrece en ...
1	— — — —	R	— — — —
2	— — — —	R	— — — —
3	— — — —	— — — —	R
4	— — — —	R	— — — —
5	0	R^+	R^-
6	-1	$(-1, \infty)$	$(-\infty, -1)$
7	— — — —	R	— — — —
8	— — — —	$(-1, \infty)$	— — — —
9	0	R^+	R^-
10	— — — —	R	— — — —

Ejercicio	Puntos críticos en $x = ...$	La función crece en ...	La función decrece en ...
11	— — — —	— — — —	$(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$
12	— — — —	$(-\infty, -4) \cup (-4, \infty)$	— — — —
13	0	R^-	R^+
14	0	R^-	R^+
15	0	R^-	R^+
16	0	$(-1, 0)$	$(0, 1)$
17	0	R^+	R^-
18	0	R^-	R^+
19	1	$(1, \infty)$	$(-\infty, 1)$
20	1	$(1, \infty)$	$(-\infty, 1)$

Ejercicio	Puntos críticos en $x = ...$	La función crece en ...	La función decrece en ...
21	0	R^+	R^-
22	— — — —	R	— — — —
23	— — — —	R	— — — —
24	$-1, 1$	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$	$(-1, 1)$
25	$1, 3$	$(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$	$(1, 3)$
26	$-1, 1$	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$	$(-1, 1)$
27	$0, -1, 1$	$(-1, 0) \cup (1, \infty)$	$(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
28	$-3, 0, 1$	$(-3, 0) \cup (1, \infty)$	$(-\infty, -3) \cup (0, 1)$
29	0	$(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$	$(0, 1) \cup (1, \infty)$
30	0	$(0, 2) \cup (2, \infty)$	$(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$

Ejercicio	Puntos críticos en $x = ...$	La función crece en ...	La función decrece en ...
31	2	$(2, \infty)$	$(-\infty, 2)$
32	$0, -1, 1$	$(-1, 0) \cup (1, \infty)$	$(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
33	4	$(4, \infty)$	$(3, 4)$
34	$1, 2$	$(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$	$(1, 2)$
35	$-2, -1, 1, 2$	$(-\infty, -2) \cup (-1, 1)$ $\cup (2, \infty)$	$(-2, -1) \cup (1, 2)$
36	$2 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(2 - \frac{\sqrt{3}}{3}, 2\right) \cup \left(2, 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$(-\infty, 1) \cup \left(1, 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ $\cup \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{3}, 3\right) \cup (3, \infty)$
37	$0, \frac{4}{3}, 2$	$\left(0, \frac{4}{3}\right) \cup (2, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup \left(\frac{4}{3}, 2\right)$
38	0	$-----$	$\mathbf{R}^- \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$
39	$-----$	$-----$	$(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$
40	0	$(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$	$(0, 1) \cup (1, \infty)$

41. No tiene puntos críticos. Creciente en todo $\mathbf{R}$; **42.** No tiene puntos críticos. Creciente en todo $\mathbf{R}$; **43.** No tiene puntos críticos. Creciente en $(-1, \infty)$; **44.** No tiene puntos críticos. Creciente en todo $\mathbf{R}$; **45.** Puntos críticos en $x = 0$. Creciente en $\mathbf{R} - \{0\}$; **48.** Falso.

EJERCICIOS 8.3

1. Falso; **2.** Verdadero; **3.** Falso; **4.** Verdadero; **5.** Falso; **6.** $a = -16$. $b = 22$. Mínimo; **7.** $a = -8$. $b = -10$. Máximo; **8.** $a = 0$. $b = 3$. Mínimo; **9.** $a = -56$. $b = 141$. Mínimo; **10.** $a = -8$. $b = -11$. Máximo; **11.** $a = -32$. $b = 57$. En $x = 1$ máximo. En $x = 3$ mínimo; **12.** $a = -8$. $b = -12$. En $x = 2$ mínimo. En $x = -2$ mínimo; **13.** $a = -38$. $b = 0$. En $x = 0$ máximo. En $x = 4$ mínimo; **14.** $a = -\frac{25}{2}$. $b = 6$. En $x = -3$ y en $x = 2$ mínimos; **15.** $a = -17$. $b = -33$. En $x = -1$ máximo. En $x = 3$ mínimo; **16.** $a = 0$. $b = \frac{1}{3}$; **17.** $a = -2$. $b = \frac{3}{2}$; **18.** $a = 4$. $b = 3$; **19.** $a = -6$. $b = 8$; **20.** $a = -6$. $b = 8$; **21.** $a = -\frac{56}{9}$. $b = 10$. $c = 0$. $d = 0$. En P y en Q mínimos; **22.** $a = -\frac{20}{9}$. $b = -\frac{8}{3}$. $c = \frac{16}{3}$. $d = \frac{34}{9}$. En P y en Q mínimos; **23.** $a = -\frac{1}{8}$. $b = -8$. $c = \frac{3}{2}$. $d = 16$. En P y en Q mínimos;
24. $a = -6$. $b = 9$. $c = 0$. $d = 1$. En P y en Q mínimos; **25.** $a = -\frac{13}{4}$. $b = \frac{7}{4}$. $c = 0$. $d = 0$. En P y en Q mínimos;

Ejercicio	**Puntos críticos en $x = ...$**	**Máximo local en $x = ...$**	**Mínimo local en $x = ...$**
26	1	— — —	— — —
27	-3	— — —	-3
28	2	2	— — —
29	$1, 2$	1	2
30	$-1, 2$	-1	2
31	$-2, 0$	-2	0
32	$0, 3$	0	3
33	$-3, 1$	-3	1
34	$\frac{3}{2}, 5$	$\frac{3}{2}$	5
35	$0, 3$	— — —	3

Ejercicio	**Puntos críticos en $x = ...$**	**Máximo local en $x = ...$**	**Mínimo local en $x = ...$**
36	$-2, 1$	— — —	1
37	$-3, 2$	— — —	2
38	$-2, 1$	— — —	— — —
39	$-1, 3$	— — —	— — —
40	$1, 4$	— — —	— — —
41	$-2, 4$	-2	4
42	$-1, 1$	-1	1
43	$-2, 4$	— — —	-2
44	$\frac{1}{2}, 3$	— — —	$\frac{1}{2}$
45	$1, 2, 3$	2	$1, 3$

Ejercicio	**Puntos críticos en $x = ...$**	**Máximo local en $x = ...$**	**Mínimo local en $x = ...$**
46	$-1, 1, 2$	1	$-1, 2$
47	$-2, 1, 3$	1	3
48	$0, 1, 2$	1	$0, 2$
49	$-2, 1, 2$	1	— — —
50	$0, 2, 4$	2	4
51	1	1	— — —
52	$-2, 2$	2	-2
53	$-3, 3$	3	-3
54	$-\frac{1}{2}$	— — —	$-\frac{1}{2}$
55	-2	— — —	-2

Ejercicio	Puntos críticos en $x=$ ...	Máximo local en $x=$ ...	Mínimo local en $x=$ ...
56	$-\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$----$
57	$----$	$----$	$----$
58	$----$	$----$	$----$
59	0	$----$	$----$
60	$-1, 1$	1	-1
61	$\pm\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
62	-1	$----$	-1
63	$1, 3$	1	3
64	$-2, 2$	-2	2
65	$1, 3$	$----$	3

EJERCICIOS 8.4

1. $x=y=5$; **2.** $x=y=\sqrt{10}$; **3.** $x=y=\frac{1}{4}$; **4.** $x=\frac{\sqrt{2}}{2}, y=\sqrt{2}$; **5.** $x=y=\sqrt{2}$; **6.** $x=2, y=\frac{3}{2}$; **7.** $x=\frac{6}{5}, y=\frac{5}{2}$; **8.** $x=3, y=2$; **9.** $x=\frac{4\sqrt{3}}{3}, y=\frac{8}{3}$; **10.** $x=3\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$; **11.** $x=3\sqrt{2}, y=2\sqrt{2}$; **12.** $x=y=\sqrt{50}$; **13.** $r=\left(\frac{25}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}, h=\left(\frac{200}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$; **14.** $r=\sqrt{\frac{25}{3\pi}}, h=2\sqrt{\frac{25}{3\pi}}$; **15.** $r=\frac{\sqrt{6}}{3}, h=\frac{2\sqrt{3}}{3}$; **16.** $r=\frac{\sqrt{2}}{2}, h=\sqrt{2}$; **17.** $r=\frac{2R}{3}, h=\frac{H}{3}$; **18.** $r=\frac{2\sqrt{2}}{3}, h=\frac{4}{3}$; **19** $(1,1)$; **20.** Más cercano: $\left(\frac{1}{2},0\right)$. Más lejano: $\left(-\frac{1}{3},\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$; **21.** $(-1,0)$; **22.** $\left(\frac{8}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$; **23.** $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2}{3}\right)$; **24.** $\left(\frac{7}{114}\right)$h; **25.** El punto que se encuentre a una distancia $r=\frac{d(I_1)^{\frac{1}{3}}}{(I_1)^{\frac{1}{3}}+(I_2)^{\frac{1}{3}}}$ de I_1; **26.** $h=\frac{r\sqrt{2}}{2}$; **27.** $t=\frac{dv_1}{v_1^2+v_2^2}$; **28.** $x=\frac{1}{2}$; **29.** $x=\frac{1}{3}$; **30.** $x=\frac{3}{8}$; **31.** $x=\frac{5-\sqrt{7}}{6}$; **34.** $Pc\approx 1.09761$ Mínimo local; **35.** $Pc\approx 3.22527$. Mínimo local; **36.** $Pc\approx 2.33473$ Mínimo local; **37.** $Pc\approx 2.21082$ Mínimo local; **38.** $Pc\approx 1.49544$ Mínimo local; **39.** $Pc=1$ Mínimo local; **40.** $Pc\approx 11.72222$ Mínimo local; **41.** $Pc\approx 1.45305$ Mínimo local; **42.** $Pc\approx 1.17093$ Mínimo local; **43.** $Pc\approx -0.6201$ Mínimo local; **44.** $(3.07131, 1.25603)$; **45.** $(0.36488, 0.88251)$; **46.** $(1.44141, 1.39000)$; **47.** $(0.76866, 0.55386)$; **48.** $(1.07737, 0.79222)$.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 8 (TIPO A)

1. $M=f(2)=17, m=f(0)=1$; **2.** $M=f(-1)=f(2)=4, m=f(-2)=f(1)=0$; **5.** Creciente en $(-\infty,0)$. Decreciente en $(0,\infty)$; **6.** Decreciente en $(-\infty,-0.7686)$. Creciente en $(-0.7686,\infty)$; **7.** No tiene extremos locales, es siempre creciente; **8.** Mínimo local en $x=-\frac{1}{2}$; **9.** Para el círculo usar $\frac{4\pi}{8+2\pi}$ metros y para el cuadrado lo demás; **10.** $x=\frac{40\sqrt{6}}{3}, y=\frac{40\sqrt{3}}{3}$.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 8 (TIPO B)

1. $M=f(-2)=f(2)=8, m=f(-1)=f(1)=-1$; **2.** Por ejemplo $f(x)=\operatorname{sen} x$; **5.** Creciente en $(0,1)$ y (e,∞). Decreciente en $(1,e)$; **6.** Decreciente en $(-\infty,-3\sqrt{2}-2)$ y $(3\sqrt{2}-2,4)\cup(4,\infty)$. Creciente en $(-3\sqrt{2}-2,1)\cup\left(1,3\sqrt{2}-2\right)$; **7.** Mínimos locales

en $x = 1$ y $x = 3$. Máximo local en $x = 2$; **8.** Mínimos locales en $x = 1$ y $x = 3$. Máximo local en $x = 2$; **9.** Para el triángulo usar $\frac{54-24\sqrt{3}}{11}$ metros y para el cuadrado lo demás; **10.** La altura del cono debe ser de 4 unidades.

RESPUESTAS AL CAPÍTULO 9

EJERCICIOS 9.1

1. Arriba; **2.** Abajo; **3.** Arriba; **4.** Arriba; **5.** Abajo; **6.** Arriba; **7.** Arriba; **8.** Arriba; **9.** Arriba; **10.** Abajo; **11.** Abajo; **12.** Arriba; **13.** Abajo; **14.** Arriba; **15.** Abajo; **16.** Arriba; **17.** Arriba; **18.** Arriba; **19.** Arriba; **20.** Abajo; **21.** Abajo; **22.** Arriba; **23.** Abajo; **24.** Arriba; **25.** Arriba; **26.** En $x = 1$ máximo; $x = 2$ mínimo; **27.** En $x = 3$ mínimo; **28.** En $x = 1$ máximo; $x = 4$ mínimo; **29.** En $x = 1$ mínimo; **30.** En $x = 2$ mínimo; **31.** En $x = -3$ máximo; $x = 2$ mínimo; **32.** En $x = 1$ máximo, $x = e$ mínimo; **33.** En $x = 0$ máximo, $x = 3$ mínimo; **34.** En $x = 0$ máximo; $x = \frac{\pi}{4}$ mínimo; **35.** En $x = -3$ mínimo; $x = 0$ máximo; $x = 1$ mínimo.

EJERCICIOS 9.2

1. Falso; **2.** Verdadero; **3.** Falso;

Ejercicio	La gráfica es cóncava hacia arriba en ...	La gráfica es cóncava hacia abajo en ...	Puntos de inflexión en $x =$ ...
4	$(-1, \infty)$	$(-\infty, -1)$	-1
5	$(-1, \infty)$	$(-\infty, -1)$	-1
6	$(1, \infty)$	$(-\infty, 1)$	1
7	$(-\frac{3}{4}, \infty)$	$(-\infty, -\frac{3}{4})$	$-\frac{3}{4}$
8	$(-2, \infty)$	$(-\infty, -2)$	———
9	$(1, \infty)$	$(-\infty, 1)$	———
10	$(-\infty, -\frac{7}{2})$	$(-\frac{7}{2}, \infty)$	———
11	$(1, \infty)$	$(0, 1)$	1
12	$(0, \infty)$	$(-\infty, 0)$	0
13	$(1, \infty)$	$(-\infty, 1)$	1

Ejercicio	La gráfica es cóncava hacia arriba en ...	La gráfica es cóncava hacia abajo en ...	Puntos de inflexión en $x = ...$
14	$(-3, \infty)$	$(-\infty, -3)$	-3
15	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$	$(-1, 1)$	$-1, 1$
16	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$	$(-1, 1)$	$-1, 1$
17	$(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$	$(-2, 1)$	$-2, 1$
18	$(0, \infty)$	$(-\infty, 0)$	0
19	$(0, \infty)$	$(-\infty, 0)$	0
20	$(-1, 0) \cup (1, \infty)$	$(-\infty, -1) \cup (0, 1)$	$-1, 0, 1$
21	$(0, \infty)$	$(-\infty, 0)$	0
22	$(0, \infty)$	$(-\infty, 0)$	0
23	$(0, \infty)$	$(-\infty, 0)$	0

Ejercicio	La gráfica es cóncava hacia arriba en ...	La gráfica es cóncava hacia abajo en ...	Puntos de inflexión en $x = ...$
24	$(0, 1) \cup (e, \infty)$	$(1, e)$	$1, e$
25	$(0, 1) \cup (2, \infty)$	$(1, 2)$	$1, 2$
26	$(0, 1) \cup (e, \infty)$	$(1, e)$	$1, e$
27	$(1, 2) \cup (4, \infty)$	$(0, 1) \cup (2, 4)$	$1, 2, 4$
28	$(1, 2) \cup (5, \infty)$	$(0, 1) \cup (2, 5)$	$1, 2, 5$
29	$(e, 3) \cup (4, \infty)$	$(0, e) \cup (3, 4)$	$e, 3, 4$
30	$(0, \infty)$	$(-\infty, 0)$	0
31	$(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$	$(0, 1)$	$0, 1$
32	$(2, \infty)$	$(-\infty, 2)$	2
33	$(2, \infty)$	$(0, 2)$	2

Ejercicio	La gráfica es cóncava hacia arriba en ...	La gráfica es cóncava hacia abajo en ...	Puntos de inflexión en $x = ...$
34	$(1, \infty)$	$(-\infty, 1)$	$----$
35	$(-\infty, -1) \cup (0, 1) \cup (\frac{28}{11}, \infty)$	$(-1, 0) \cup (1, \frac{28}{11})$	$-1, 0, 1, \frac{28}{11}$
36	$(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$	$(1, 3)$	$----$
37	$(-1, 0) \cup (1, \infty)$	$(-\infty, -1) \cup (0, 1)$	0
38	$(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$	$(-2, 2)$	$----$
39	$(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$	$(-1, 2)$	$----$
40	$(-2, 0) \cup (2, \infty)$	$(-\infty, -2) \cup (0, 2)$	0

41. $a = -3; b = 3$; **42.** $a = 6; b = -2$; **43.** $a = -6; b = \frac{17}{2}$; **44.** $a = -10; b = 73$; **45.** $a = 3; b = \frac{3}{4}$; **46.** $a = 12; b = \frac{23}{48}$; **47.** $a = 1; b = \frac{1}{2}$; **48.** $a = \frac{3}{8}; b = \frac{3}{16}$; **49.** El teléfono es 5-11-20-30.

EJERCICIOS 9.3

1.

Punto o intervalo	**Lo que se puede decir de $f(x)$ y de su gráfica**	$f'(x)$	$f''(x)$	**Conclusión acerca de $f'(x)$ y de su gráfica**
$a < x < x_1$	Es lineal con pendiente 2	2	0	constante (= 2)
x_1	Máximo local	$\nexists$	$\nexists$	discontinuidad
$x_1 < x < x_2$	Es lineal con pendiente − 2	−2	0	constante (= −2)
x_2	Mínimo local	$\nexists$	$\nexists$	discontinuidad
$x_2 < x < x_3$	Es lineal con pendiente 3	3	0	constante (= 3)
x_3	Máximo local	$\nexists$	$\nexists$	discontinuidad
$x_3 < x < b$	Es lineal con pendiente − 3	−3	0	constante (= −3)

2.

Punto o intervalo	**Lo que se puede decir de $f(x)$ y de su gráfica**	$f'(x)$	$f''(x)$	**Conclusión acerca de $f'(x)$ y de su gráfica**
$a < x < x_1$	Es decreciente. Gráfica cóncava hacia arriba.	−	+	Es creciente. Gráfica por debajo del eje x.
x_1	Mínimo local.	0	+	Raíz.
$x_1 < x < x_2$	Es creciente. Gráfica cóncava hacia arriba.	+	+	Es creciente. Gráfica por encima del eje x.
x_2	Máximo local.	∞	$\nexists$	Discontinuidad.
$x_2 < x < x_3$	Es decreciente. Gráfica cóncava hacia arriba.	−	+	Es creciente. Gráfica por debajo del eje x.
x_3	Mínimo local.	0	+	Raíz.
$x_3 < x < b$	Es creciente. Gráfica cóncava hacia arriba.	+	+	Es creciente. Gráfica por encima del eje x.

3.

Punto o intervalo	**Lo que se puede decir de $f(x)$ y de su gráfica**	$f'(x)$	$f''(x)$	**Conclusión acerca de $f'(x)$ y de su gráfica**
$a < x < x_1$	Es decreciente. Gráfica cóncava hacia arriba.	$-$	$+$	Es creciente. Gráfica por debajo del eje x.
x_1	Mínimo local.	0	$+$	Raíz.
$x_1 < x < x_2$	Es creciente. Gráfica cóncava hacia arriba.	$+$	$+$	Es creciente. Gráfica por encima del eje x.
x_2	Punto de inflexión.	$+$	0	Máximo local.
$x_2 < x < x_3$	Es creciente. Gráfica cóncava hacia abajo.	$+$	$-$	Es decreciente. Gráfica por encima del eje x.
x_3	Máximo local.	0	$-$	Raíz.
$x_3 < x < b$	Es decreciente. Gráfica cóncava hacia abajo.	$-$	$-$	Es decreciente. Gráfica por debajo del eje x.

4.

Punto o intervalo	**Lo que se puede decir de $f(x)$ y de su gráfica**	$f'(x)$	$f''(x)$	**Conclusión acerca de $f'(x)$ y de su gráfica**
$a < x < x_1$	Es constante, igual a 1	0	0	Es constante, igual a 0
x_1	1	0	0	0
$x_1 < x < x_2$	Es lineal, con pendiente 1	1	0	Es constante, igual a 1
x_2	2	0	0	0
$x_2 < x < x_3$	Es constante, igual a 2	0	0	Es constante, igual a 0
x_3	2	0	0	0
$x_3 < x < b$	Es lineal, con pendiente 1	1	0	Es constante, igual a 1

5.

Punto o intervalo	**Lo que se puede decir de $f(x)$ y de su gráfica**	$f'(x)$	$f''(x)$	**Conclusión acerca de $f'(x)$ y de su gráfica**
$a < x < x_1$	Es creciente. Gráfica cóncava hacia abajo.	+	−	Es decreciente. Gráfica por encima del eje x.
x_1	Máximo local.	0	−	Raíz.
$x_1 < x < x_2$	Es decreciente. Gráfica cóncava hacia abajo.	−	−	Es decreciente. Gráfica por debajo del eje x.
x_2	Mínimo local.	∞	$\nexists$	Discontinuidad.
$x_2 < x < x_3$	Es creciente. Gráfica cóncava hacia abajo.	+	−	Es decreciente. Gráfica por encima del eje x.
x_3	Máximo local.	0	−	Raíz.
$x_3 < x < b$	Es decreciente. Gráfica cóncava hacia abajo.	−	−	Es decreciente. Gráfica por debajo del eje x.

6.

Punto o intervalo	**Lo que se puede decir de $f(x)$ y de su gráfica**	$f'(x)$	$f''(x)$	**Conclusión acerca de $f'(x)$ y de su gráfica**
$a < x < x_1$	Es creciente. Gráfica cóncava hacia abajo.	+	−	Es decreciente. Gráfica por encima del eje x.
x_1	Punto de inflexión.	0	0	Raíz. Mínimo local.
$x_1 < x < x_2$	Es creciente. Gráfica cóncava hacia arriba.	+	+	Es creciente. Gráfica por encima del eje x.
x_2	Punto de inflexión.	+	0	Máximo local.
$x_2 < x < x_3$	Es creciente. Gráfica cóncava hacia abajo.	+	−	Es decreciente. Gráfica por encima del eje x.
x_3	Máximo local.	0	−	Raíz.
$x_3 < x < b$	Es decreciente. Gráfica cóncava hacia abajo.	−	−	Es decreciente. Gráfica por debajo del eje x.

7.

Punto o intervalo	Lo que se puede decir de $f(x)$ y de su gráfica	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusión acerca de $f'(x)$ y de su gráfica
$a < x < x_1$	Es lineal con pendiente -1.	-1	0	Es constante, igual a -1.
x_1	Mínimo local.	0	0	Discontinuidad.
$x_1 < x < x_2$	Es lineal con pendiente 1.	1	0	Es constante, igual a 1.
x_2	3	0	0	Discontinuidad.
$x_2 < x < x_3$	Es lineal con pendiente $\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{2}$	0	Es constante, igual a $\frac{1}{2}$.
x_3	4	0	0	Discontinuidad.
$x_3 < x < b$	Es lineal con pendiente $\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{4}$	0	Es constante, igual a $\frac{1}{4}$.

8.

Punto o intervalo	Lo que se puede decir de $f(x)$ y de su gráfica	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusión acerca de $f'(x)$ y de su gráfica
$a < x < x_1$	Es creciente. Gráfica cóncava hacia arriba.	+	+	Es creciente. Gráfica por encima del eje x.
x_1	Punto de inflexión.	0	0	Raíz. Máximo local.
$x_1 < x < x_2$	Es creciente. Gráfica cóncava hacia abajo.	+	−	Es decreciente. Gráfica por encima del eje x.
x_2	Punto de inflexión. Tangente horizontal.	0	0	Raíz. Mínimo local.
$x_2 < x < x_3$	Es creciente. Gráfica cóncava hacia arriba.	+	+	Es creciente. Gráfica por encima del eje x.
x_3	Punto de inflexión.	0	0	Raíz. Máximo local.
$x_3 < x < b$	Es creciente. Gráfica cóncava hacia abajo.	+	−	Es decreciente. Gráfica por encima del eje x.

9.

Punto o intervalo	Lo que se puede decir de $f(x)$ y de su gráfica	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusión acerca de $f'(x)$ y de su gráfica
$a < x < x_1$	Es creciente. Gráfica cóncava hacia abajo.	$+$	$-$	Es decreciente. Gráfica por encima del eje x.
x_1	Punto de inflexión. Tangente horizontal.	0	0	Raíz. Mínimo local.
$x_1 < x < x_2$	Es creciente. Gráfica cóncava hacia arriba.	$+$	$+$	Es creciente. Gráfica por encima del eje x.
x_2	Punto de inflexión.	$+$	0	Máximo local.
$x_2 < x < x_3$	Es creciente. Gráfica cóncava hacia abajo.	$+$	$-$	Es decreciente. Gráfica por encima del eje x.
x_3	Punto de inflexión. Tangente horizontal.	0	0	Raíz. Mínimo local.
$x_3 < x < b$	Es creciente. Gráfica cóncava hacia arriba.	$+$	$+$	Es creciente. Gráfica por encima del eje x.

10.

Punto o intervalo	Lo que se puede decir de $f(x)$ y de su gráfica	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusión acerca de $f'(x)$ y de su gráfica
$a < x < x_1$	Es creciente. Gráfica cóncava hacia arriba.	$+$	$+$	Es creciente. Gráfica por encima del eje x.
x_1	Máximo local.	∞	$\nexists$	Discontinuidad.
$x_1 < x < x_2$	Es decreciente. Gráfica cóncava hacia arriba.	$-$	$+$	Es creciente. Gráfica por debajo del eje x.
x_2	Mínimo local.	0	$+$	Raíz.
$x_2 < x < x_3$	Es creciente. Gráfica cóncava hacia arriba.	$+$	$+$	Es creciente. Gráfica por encima del eje x.
x_3	Máximo local.	∞	$\nexists$	Discontinuidad.
$x_3 < x < b$	Es decreciente. Gráfica cóncava hacia arriba.	$-$	$+$	Es creciente. Gráfica por debajo del eje x.

EJERCICIOS 9.4

1. $y = \pm\frac{\pi}{2}$; **2.** $y = 0$; $x = 2$; $x = 3$; **3.** $y = 0$; **4.** $y = \frac{1}{2}$; **5.** $y = 0$; $x = 0$; $x = 1$; $x = 2$; **6.** $y = 0$; $x = 1$; **7.** $y = 1$; $x = 1$; **8.** $y = 0$; $x = \sqrt[3]{2}$; **9.** $y = 0$; $x = -1.4655$;

$x = -1.69562$; **10.** $x = 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; **11.** $y = x - 1$; **12.** $y = 2x - 2$; **13.** $y = x + 2$; **14.** $y = x$; **15.** $y = x$.

EJERCICIOS 9.5

1. Definida y continua en todo $\mathbf{R}$. Creciente en $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{8}{3}, \infty\right)$. Decreciente en $\left(0, \frac{8}{3}\right)$. Máximo local en $x = 0$ con $f(0) = 0$. Mínimo local en $x = \frac{8}{3}$ con $f\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{256}{27}$. Gráfica cóncava hacia abajo en $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$. Gráfica cóncava hacia arriba en $\left(\frac{4}{3}, \infty\right)$. Punto de inflexión en $x = \frac{4}{3}$ con $f\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{128}{27}$. No tiene asíntotas;

2. Definida y continua en todo $\mathbf{R}$. Creciente en todo $\mathbf{R}$. Gráfica cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$. Gráfica cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$. Punto de inflexión en $x = 0$ con $f(0) = 1$. No tiene asíntotas;

3. Definida y continua en todo $\mathbf{R}$. Creciente en $(2, \infty)$. Decreciente en $(-\infty, 2)$. Mínimo local en $x = 2$ con $f(2) = -16$. Gráfica cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{4}{3}, \infty\right)$. Gráfica cóncava hacia abajo en $\left(0, \frac{4}{3}\right)$. Puntos de inflexión en $x = 0$ con $f(0) = 0$ y $x = \frac{4}{3}$ con $f\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{256}{27}$. No tiene asíntotas;

4. Definida y continua en todo $\mathbf{R}$. Creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Decreciente en $(-1, 1)$. Máximo local en $x = -1$ con $f(-1) = 2$. Mínimo local en $x = 1$ con $f(1) = -2$. Gráfica cóncava hacia arriba en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$. Gráfica cóncava hacia abajo en $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Puntos de inflexión en $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ con $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 1.237$, $x = 0$ con $f(0) = 0$ y $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ con $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx -1.237$. No tiene asíntotas;

5. Definida y continua en todo $\mathbf{R}$. Decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Creciente en $(-1, 1)$. Mínimo local en $x = -1$ con $f(-1) = -\frac{1}{2}$. Máximo local en $x = 1$ con $f(1) = \frac{1}{2}$. Gráfica cóncava hacia arriba en $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty)$. Gráfica cóncava hacia abajo en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$. Puntos de inflexión en $x = -\sqrt{3}$ con $f(-\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$, $x = 0$ con $f(0) = 0$ y $x = \sqrt{3}$ con $f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4}$. La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal;

6. Definida y continua en todo $\mathbf{R}$. Creciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$. Decreciente en $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty)$. Máximos locales en $x = -\sqrt{3}$ con $f(-\sqrt{3}) = \frac{1}{8}$ y en $x = \sqrt{3}$ con $f(\sqrt{3}) = \frac{1}{8}$. Mínimo local en $x = 0$ con $f(0) = -1$. Gráfica cóncava hacia arriba en $(-\infty, -\sqrt{2} - 1) \cup (-\sqrt{2} + 1, \sqrt{2} - 1) \cup (\sqrt{2} + 1, \infty)$. Gráfica cóncava hacia abajo en $(-\sqrt{2} - 1, -\sqrt{2} + 1) \cup (\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1)$. Puntos de inflexión en $x = \pm(\sqrt{2} + 1)$ con $f(\pm(\sqrt{2} + 1)) = \frac{1}{4}(\sqrt{2} - 1)$ y en $x = \pm(\sqrt{2} - 1)$ con $f(\pm(\sqrt{2} - 1)) = -\frac{1}{4}(\sqrt{2} + 1)$. La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal;

7. Definida y continua en $\mathbf{R} - \{0, 3\}$. Decreciente en $(-\infty, 0) \cup (0, 3) \cup (3, \infty)$. Gráfica cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0) \cup (1, 3)$. Gráfica cóncava hacia arriba en $(0, 1) \cup (3, \infty)$. Punto de inflexión en $x = 1$ con $f(1) = -\frac{1}{3}$. La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal. Las rectas $x = 0$ y $x = 3$ son asíntotas verticales;

8. Definida y continua en $[0, \infty)$. Decreciente en $\left[0, \frac{1}{3}\right)$. Creciente en $\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$. Mínimo local en $x = \frac{1}{3}$ con $f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$. Gráfica cóncava hacia arriba en todo su dominio. No tiene asíntotas;

9. Definida y continua en todo $\mathbf{R}$. Creciente en todo $\mathbf{R}$. Gráfica cóncava hacia abajo en

$(-\infty, 0)$. Gráfica cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$. Punto de inflexión en $x = 0$ con $f(0) = 1$. No tiene asíntotas;

10. Definida y continua en $[-1, \infty)$. Decreciente en $\left(-\frac{4}{5}, 0\right)$. Creciente en $\left[-1, -\frac{4}{5}\right) \cup (0, \infty)$. Máximo local en $x = -\frac{4}{5}$ con $f\left(-\frac{4}{5}\right) \approx 0.2862$. Mínimo local en $x = 0$ con $f(0) = 0$. Gráfica cóncava hacia abajo en $\left[-1, \frac{2\sqrt{6}-12}{15}\right)$. Gráfica cóncava hacia arriba en $\left(\frac{2\sqrt{6}-12}{15}, \infty\right)$. Punto de inflexión en $x = \frac{2\sqrt{6}-12}{15}$ con $f(\frac{2\sqrt{6}-12}{15}) \approx 0.1626$. No tiene asíntotas;

11. Definida y continua en todo R. Creciente en $(-\infty, -1) \cup \left(-\frac{3}{5}, \infty\right)$. Decreciente en $\left(-1, -\frac{3}{5}\right)$. Mínimo local en $x = -\frac{3}{5}$ con $f\left(-\frac{3}{5}\right) \approx -0.326$. Máximo local en $x = -1$ con $f(-1) = 0$. Gráfica cóncava hacia abajo en $\left(-\infty, -\frac{6}{5}\right)$. Gráfica cóncava hacia arriba en $\left(-\frac{6}{5}, \infty\right)$. Punto de inflexión en $x = -\frac{6}{5}$ con $f\left(-\frac{6}{5}\right) \approx 0.41$. No tiene asíntotas;

12. Definida y continua en todo R. Creciente en $\left(-\infty, -\frac{8}{27}\right) \cup (0, \infty)$. Decreciente en $\left(-\frac{8}{27}, 0\right)$. Máximo local en $x = -\frac{8}{27}$ con $f\left(-\frac{8}{27}\right) \approx 0.148148$. Mínimo local en $x = 0$ con $f(0) = 0$. Gráfica cóncava hacia abajo en todo R. No tiene asíntotas;

13. Definida y continua en todo R. Creciente en $\left(-1, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup (1, \infty)$. Decreciente en $(-\infty, -1) \cup \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$. Mínimos locales en $x = -1$ con $f(-1) = 0$, en $x = 0$ con $f(0) = 0$ y en $x = 1$ con $f(1) = 0$. Máximos locales en $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ con $f\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 0.529$. Gráfica cóncava hacia arriba en $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{3}}, \infty\right)$. Gráfica cóncava hacia abajo en $\left(-\sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{3}}, \sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{3}}\right)$. Puntos de inflexión en $x = \pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{3}}$ con $f\left(\pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{3}}\right) \approx 0.6212$. No tiene asíntotas;

14. Definida y continua en todo R. Creciente en $(-\infty, 1)$. Decreciente en $(1, \infty)$. Máximo local en $x = 1$ con $f(1) = \frac{1}{e}$. Gráfica cóncava hacia abajo en $(-\infty, 2)$. Gráfica cóncava hacia arriba en $(2, \infty)$. Punto de inflexión en $x = 2$ con $f(2) = 2e^{-2}$. La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal;

15. Definida y continua en todo R. Decreciente en $(-\infty, 1 - \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2}, \infty)$. Creciente en $(1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$. Mínimo local en $x = 1 - \sqrt{2}$ con $f\left(1 - \sqrt{2}\right) \approx -1.254$. Máximo local en $x = 1 + \sqrt{2}$ con $f\left(1 + \sqrt{2}\right) \approx 0.432$. Gráfica cóncava hacia arriba en $(-\infty, 2 - \sqrt{3}) \cup (2 + \sqrt{3}, \infty)$. Gráfica cóncava hacia abajo en $(2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$. Puntos de inflexión en $x = 2 - \sqrt{3}$ con $f\left(2 - \sqrt{3}\right) \approx -0.71$ y en $x = 2 + \sqrt{3}$ con $f\left(2 + \sqrt{3}\right) \approx 0.3095$. La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal;

16. Definida y continua en todo R. Decreciente en $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$. Creciente en $\left(0, \frac{2}{3}\right)$. Mínimo local en $x = 0$ con $f(0) = 0$. Máximo local en $x = \frac{2}{3}$ con $f\left(\frac{2}{3}\right) \approx 0.392$. Gráfica cóncava hacia arriba en $\left(-\infty, \frac{2-\sqrt{6}}{3}\right) \cup \left(\frac{2+\sqrt{6}}{3}, \infty\right)$. Gráfica cóncava hacia abajo en $\left(\frac{2-\sqrt{6}}{3}, \frac{2+\sqrt{6}}{3}\right)$. Puntos de inflexión en $x = \frac{2-\sqrt{6}}{3}$ con $f\left(\frac{2-\sqrt{6}}{3}\right) \approx 0.328$ y en $x = \frac{2+\sqrt{6}}{3}$ con $f\left(\frac{2+\sqrt{6}}{3}\right) \approx 0.295$. La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal;

17. Definida y continua en $(0,\infty)$. Decreciente en $\left(0,\frac{1}{e}\right)$. Creciente en $\left(\frac{1}{e},\infty\right)$. Mínimo local en $x=\frac{1}{e}$ con $f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$. Gráfica cóncava hacia arriba en todo su dominio. No tiene asíntotas;

18. Definida y continua en $(0,\infty)$. Creciente en $(0,e)$. Decreciente en (e,∞). Máximo local en $x=e$ con $f(e)=\frac{1}{e}$. Gráfica cóncava hacia abajo en $\left(0,e^{\frac{3}{2}}\right)$. Gráfica cóncava hacia arriba en $\left(e^{\frac{3}{2}},\infty\right)$. Punto de inflexión en $x=e^{\frac{3}{2}}$ con $f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}$. La recta $y=0$ es una asíntota horizontal. La recta $x=0$ es una asíntota vertical;

19. Definida y continua en $(0,\infty)$. Decreciente en $\left(0,e^{-\frac{1}{3}}\right)$. Creciente en $\left(e^{-\frac{1}{3}},\infty\right)$. Mínimo local en $x=e^{-\frac{1}{3}}$ con $f\left(e^{-\frac{1}{3}}\right)=-\frac{1}{3e}$. Gráfica cóncava hacia abajo en $\left(0,e^{-\frac{5}{6}}\right)$. Gráfica cóncava hacia arriba en $\left(e^{-\frac{5}{6}},\infty\right)$. Punto de inflexión en $x=e^{-\frac{5}{6}}$ con $f\left(e^{-\frac{5}{6}}\right)=-\frac{5}{6}e^{-\frac{5}{3}}$. No tiene asíntotas;

20. Definida y continua en todo $\mathbf{R}$. Decreciente en $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$. Creciente en $(-1,1)$. Mínimo local en $x=-1$ con $f(-1)=-\pi+\frac{4}{3}$. Máximo local en $x=1$ con $f(1)=\pi-\frac{4}{3}$. Gráfica cóncava hacia arriba en $(-\infty,0)$. Gráfica cóncava hacia abajo en $(0,\infty)$. Puntos de inflexión en $x=0$ con $f(0)=0$. No tiene asíntotas;

21. Definida y continua en todo $\mathbf{R}$. Creciente en $(-\infty,-2)\cup(-1,1)\cup(2,\infty)$. Decreciente en $(-2,-1)\cup(1,2)$. Máximos locales en $x=-2$ con $f(-2)=-10\arctan 2+\frac{28}{3}$ y en $x=1$ con $f(1)=\frac{5\pi}{2}-\frac{17}{3}$. Mínimos locales en $x=-1$ con $f(-1)=\frac{-5\pi}{2}+\frac{17}{3}$ y en $x=2$ con $f(2)=10\arctan 2-\frac{28}{3}$.
Gráfica cóncava hacia abajo en $\left(-\infty,-\sqrt{\sqrt{10}-1}\right)\cup\left(0,\sqrt{\sqrt{10}-1}\right)$.
Gráfica cóncava hacia arriba en $\left(-\sqrt{\sqrt{10}-1},0\right)\cup\left(\sqrt{\sqrt{10}-1},\infty\right)$.
Puntos de inflexión en $x=0$ con $f(0)=0$, $x=-\sqrt{\sqrt{10}-1}$ con $f\left(-\sqrt{\sqrt{10}-1}\right)\approx-1.973$, y en $x=\sqrt{\sqrt{10}-1}$ con $f\left(\sqrt{\sqrt{10}-1}\right)\approx 1.973$. No tiene asíntotas;

22. Definida y continua en todo $\mathbf{R}$. Creciente en $(-\infty,0)$. Decreciente en $(0,\infty)$. Máximo local en $x=0$ con $f(0)=1$. Gráfica cóncava hacia arriba en todo $\mathbf{R}$. La recta $y=0$ es una asíntota horizontal;

23. Definida y continua en todo $\mathbf{R}$. Creciente en todo $\mathbf{R}$. Gráfica cóncava hacia arriba en $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(0,\sqrt{2})$. Gráfica cóncava hacia abajo en $(-\sqrt{2},0)\cup(\sqrt{2},\infty)$. Puntos de inflexión en $x=0$ con $f(0)=0$, $x=-\sqrt{2}$ con $f(-\sqrt{2})\approx-0.276$, y en $x=\sqrt{2}$ con $f(\sqrt{2})\approx 0.276$. Las rectas $y=\pm\frac{\pi}{2}$ son asíntotas horizontales;

24. Definida y continua en todo $\mathbf{R}$. Creciente en $(-\infty,0)$. Decreciente en $(0,\infty)$. Máximo local en $x=0$ con $f(0)=1$. Gráfica cóncava hacia abajo en todo $\mathbf{R}$. No tiene asíntotas;

25. Definida y continua en $(1,\infty)$. Decreciente en $(1,2)$. Creciente en $(2,\infty)$. Mínimo local en $x=2$ con $f(2)=-2$. Gráfica cóncava hacia abajo en $\left(1,1+e^{-\frac{1}{2}}\right)$. Gráfica cóncava hacia arriba en $\left(1+e^{-\frac{1}{2}},\infty\right)$. Punto de inflexión en $x=1+e^{-\frac{1}{2}}$ con $f\left(1+e^{-\frac{1}{2}}\right)\approx-1.558$. No tiene asíntotas;

EXAMEN DEL CAPÍTULO 9 (TIPO A)

1. El punto $(0,3)$ es el único punto de inflexión; **2.** La gráfica cambia de concavidad en $x = 8$, donde hay una discontinuidad; **3.** Gráfica cóncava hacia arriba en $(-\infty, 2-\sqrt{3}) \cup (2+\sqrt{3}, \infty)$. Gráfica cóncava hacia abajo en $(2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$. Puntos de inflexión en $x = 2-\sqrt{3}$ con $f\left(2-\sqrt{3}\right) \approx -0.71$ y en $x = 2+\sqrt{3}$ con $f\left(2+\sqrt{3}\right) \approx 0.31$; **4.** Gráfica cóncava hacia arriba en $(-\infty,-1) \cup (0,\infty)$. Gráfica cóncava hacia abajo en $(-1,0)$. Puntos de inflexión en $x = 0$ con $f(0) = 1$ y en $x = -1$ con $f(-1) = 1$; **5.** Puntos de inflexión en $x = e$ con $f(e) = 7e$ y en $x = 1$ con $f(1) = 18$; **6.** $a = -1$, $b = 0$; **7.** Asíntota horizontal: $y = 1$. Asíntota vertical: $x = 1$; **8.** $y = x - 1$; **9.** Definida y continua en $[0,\infty)$. Decreciente en $\left(0,\frac{1}{3}\right)$. Creciente en $\left(\frac{1}{3},\infty\right)$. Mínimo local en $x = \frac{1}{3}$ con $f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$. Gráfica cóncava hacia arriba en todo su dominio. No tiene asíntotas; **10.** Definida y continua en todo **R**. Decreciente en $(-\infty,0)$. Creciente en $(0,\infty)$. Mínimo local en $x = 0$ con $f(0) = 0$. Gráfica cóncava hacia abajo en todo **R**. No tiene asíntotas.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 9 (TIPO B)

1. Hay un único punto de inflexión en $x = -\frac{7}{3}$ con $f\left(-\frac{7}{3}\right) \approx 16.74074$; **2.** Gráfica cóncava hacia arriba en $(-\infty,-2) \cup (2,\infty)$. Gráfica cóncava hacia abajo en $(-2,2)$; **3.** Gráfica cóncava hacia arriba en $\left(\sqrt[3]{-4}, 0\right) \cup (2,\infty)$. Gráfica cóncava hacia abajo en $\left(-\infty, \sqrt[3]{-4}\right) \cup (0,2)$. Puntos de inflexión en $x = 0$ con $f(0) = \frac{1}{8}$ y en $x = \sqrt[3]{-4}$ con $f\left(\sqrt[3]{-4}\right) = \frac{5}{12}$; **4.** Gráfica cóncava hacia arriba en $(1,2) \cup (3,\infty)$. Cóncava hacia abajo en $(-\infty,1) \cup (2,3)$. Puntos de inflexión en $x = 1$ con $f(1) = -46e$, $x = 2$ con $f(2) = -22e^2$, y en $x = 3$ con $f(3) = -10e^3$; **5.** Hay puntos de inflexión en $x = 2\pi k$ con $k \in \mathbf{Z}$; **6.** $a = \frac{3}{10 \ln 5}$, $b = \frac{7}{5 \ln 5}$; **7.** Continua y definida en todo **R**. Creciente en $(-\infty, \ln 2)$. Decreciente en $(\ln 2, \infty)$. Máximo local en $x = \ln 2$ con $f(\ln 2) = \frac{1}{2}$. Gráfica cóncava hacia abajo en $(-\infty, \ln 4)$. Gráfica cóncava hacia arriba en $(\ln 4, \infty)$. Punto de inflexión en $x = \ln 4$ con $f(\ln 4) = \frac{3}{8}$. La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal; **9.** Definida y continua en todo **R**. Decreciente en $(-\infty,0)$. Creciente en $(0,\infty)$. Mínimo local en $x = 0$ con $f(0) = 0$. Gráfica cóncava hacia abajo en $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$. Gráfica cóncava hacia arriba en $(-1,1)$. Puntos de inflexión en $x = \pm 1$ con $f(\pm 1) = \ln 2$. No tiene asíntotas; **10.** Definida y continua en todo **R**. Creciente en $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$. Decreciente en $(-1,1)$. Máximo local en $x = -1$ con $f(-1) = 2\pi - \frac{28}{15}$. Mínimo local en $x = 1$ con $f(1) = -2\pi + \frac{28}{15}$. Gráfica cóncava hacia abajo en $(-\infty,0)$. Gráfica cóncava hacia arriba en $(0,\infty)$. Punto de inflexión en $x = 0$ con $f(0) = 0$. No tiene asíntotas.

RESPUESTAS AL CAPÍTULO 10

EJERCICIOS 10.1

1. Verdadero; **2.** Verdadero;

Ejercicio	Velocidad y posición inciales	El cuerpo se mueve a la derecha para $t \in$	El cuerpo se mueve a la izquierda para $t \in$
3	$v_0 = 0$ $x_0 = 2$	$- - - -$	$- - - -$
4	$v_0 = 1$ $x_0 = 2$	$(0, \infty)$	$- - - -$
5	$v_0 = 0$ $x_0 = 1$	$(0, \infty)$	$- - - -$
6	$v_0 = -5$ $x_0 = 4$	$(\frac{5}{2}, \infty)$	$(0, \frac{5}{2})$
7	$v_0 = 34$ $x_0 = -24$	$\left(0, \frac{11-\sqrt{19}}{3}\right) \cup \left(\frac{11+\sqrt{19}}{3}, \infty\right)$	$\left(\frac{11-\sqrt{19}}{3}, \frac{11+\sqrt{19}}{3}\right)$
8	$v_0 = 3$ $x_0 = 0$	$(0, \infty)$	$- - - -$
9	$v_0 = 1$ $x_0 = 0$	$(0, \infty)$	$- - - -$
10	$v_0 = 1$ $x_0 = 0$	$(0, \infty)$	$- - - -$
11	$v_0 = 1$ $x_0 = 0$	$(0, \infty)$	$- - - -$
12	$v_0 = 3$ $x_0 = 0$	$(0, \frac{\pi}{6}) \cup \left(\frac{(4k-1)\pi}{6}, \frac{(4k+1)\pi}{6}\right)$ $k = 1, 2, ...$	$\left(\frac{(4k-3)\pi}{6}, \frac{(4k-1)\pi}{6}\right)$ $k = 1, 2, ...$
13	$v_0 = 0$ $x_0 = 1$	$(0, \infty)$	$- - - -$
14	$v_0 = 1$ $x_0 = 0$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
15	$v_0 = 0$ $x_0 = 0$	$(0, 1)$	$(1; \infty)$

16. $x = -\frac{3}{2}$; $v_1 = 1$; $v_2 = \frac{1}{3}$; **17.** $x = \frac{7+\sqrt{13}}{2}$; $v_1 = 1 + \sqrt{13}$; $v_2 = 1$; **18.** $x = \frac{15+\sqrt{17}}{16}$; $v_1 = \frac{\sqrt{17}+1}{2}$; $v_2 = \frac{1-\sqrt{17}}{2}$; **19.** $x = 1$; $v_1 = \frac{1}{2}$; $v_2 = -1$; **20.** $x = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$; $v_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$; $v_2 = 2\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$.

EJERCICIOS 10.2

1. $y' = 16$; **2.** $x' = \frac{1}{7}$; **3.** $y' = \frac{-3}{4}$; **4.** $y' = 24$; **5.** $y' = -2\sqrt{2}$; **6.** $y' = \frac{-\sqrt{3}}{3}$; **7.** $y' = \frac{1}{\sqrt[3]{676}}$; **8.** $x' = -2e^2$; **9.** $y' = \frac{3}{2}$; **10.** $\frac{-10}{8+5\ln 5}$; **11.** $20\,\frac{\text{cm}^2}{\text{min}}$; **12.** $\frac{4\sqrt{74}}{7}\,\frac{\text{cm}}{\text{min}}$; **13.** $\frac{15\sqrt{2}}{2}\,\frac{\text{cm}^2}{\text{min}}$; **14.** $15\frac{\text{cm}^2}{\text{min}}$; **15.** $16\pi\frac{\text{cm}^2}{\text{min}}$; **16.** $\frac{300}{\sqrt{27}}\,\frac{\text{cm}^3}{\text{min}}$; **17.** $80\frac{\text{cm}^2}{\text{min}}$; **18.** $\frac{5}{6}\,\frac{\text{cm}}{\text{min}}$; **19.** $50\pi\frac{\text{cm}^3}{\text{min}}$; **20.** $300\pi\frac{\text{cm}^3}{\text{min}}$; **21.** $120\pi\frac{\text{cm}^2}{\text{min}}$; **22.** $30\pi\frac{\text{cm}^3}{\text{min}}$; **23.** $\frac{300}{7}\,\frac{\text{cm}^2}{\text{min}}$; **24.** $\frac{220\sqrt{37}}{37}\,\frac{\text{cm}}{\text{min}}$; **25.** $\frac{18-6\sqrt{2}}{\sqrt{5-2\sqrt{2}}}\,\frac{\text{cm}}{\text{min}}$; **26.** $\frac{1}{24\pi}\,\frac{\text{cm}}{\text{min}}$;

27. $\approx 2.32544\frac{\text{m}}{\text{min}}$; **28.** $\approx 0.11856\frac{\text{m}}{\text{h}}$; **29.** $\approx 0.28768\frac{\text{m}}{\text{h}}$; **30.** $48\frac{\text{km}}{\text{h}}$; **31.** $\approx 6.353\frac{\text{km}}{\text{h}}$;
32. $\approx 16.51\frac{\text{rad}}{\text{h}}$; **33.** $\approx 1133.48\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 10 (TIPO A)

1. Se mueve con velocidad cte.$=3\frac{\text{cm}}{\text{s}}$; **2.** En $t = 2$ s: $v = -8\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ y $a = 8\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$; En $t = 4$ s: $v = 32\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ y $a = 32\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$; **3.** $x_1'(0) = x_2'(0) = 0\frac{\text{m}}{\text{min}}$; $x_1(0) = -4$ m y $x_2(0) = 4$ m; En $t = 2$ min se cruzan en el origen; **4.** $f\prime(t) = \frac{2}{\pi(1+t^2)}\frac{\text{m}}{\text{min}}$; $f'(t) = \frac{-4t}{\pi(1+t^2)^2}\frac{\text{m}}{\text{min}^2}$; Si $t \to \infty$, el cuerpo tiende a detenerse en $x = 1$ m; **5.** $36\frac{\text{m}}{\text{min}}$; **6.** $-\frac{1}{10}\frac{\text{m}}{\text{min}}$; **7.** $\frac{59}{10}\frac{\text{m}^2}{\text{min}}$; **8.** ≈ 8.41 cm^3;
9. $\approx 0.269\frac{\text{rad}}{\text{min}}$; **10.** $\approx 10.111\frac{\text{rad}}{\text{h}}$.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 10 (TIPO B)

1. $v(t) = e^t\frac{\text{cm}}{\text{s}}$; $a(t) = e^t\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$; **2.** En $t = 2$ s: $v = 8\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ y $a = 12\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$; En $t = 4$ s: $v = 44\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ y $a = 24\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$; **3.** $x_1'(0) = 2\frac{\text{m}}{\text{min}}$ y $x_2'(0) = -1\frac{\text{m}}{\text{min}}$; $x_1(0) = 3$ m y $x_2(0) = -2$ m; En $t = \frac{-5}{3}$ min se encuentran en $x = \frac{-1}{3}$ m; **4.** $f\prime(t) = \frac{-1}{(1+t)^2}\frac{\text{m}}{\text{min}}$; $f'(t) = \frac{2}{(1+t)^3}\frac{\text{m}}{\text{min}^2}$; Si $t \to \infty$, el cuerpo tiende a detenerse en el origen; **5.** $84\frac{\text{m}}{\text{min}}$; **6.** $-10\frac{\text{cm}}{\text{min}}$; **7.** $16.6\frac{\text{m}^2}{\text{min}}$; **8.** $\frac{(\sqrt{20\sqrt{3}})^3}{3\sqrt{3}}$ cm^3;
9. $\approx 0.2807\frac{\text{rad}}{\text{min}}$; **10.** $\approx 7.86\frac{\text{rad}}{\text{h}}$.

RESPUESTAS AL CAPÍTULO 11

EJERCICIOS 11.1

1. 0; **2.** 8; **3.** 56; **4.** 1; **5.** $\frac{-4}{5}$; **6.** $\frac{1-e}{e}$; **7.** $h^2 + 5h$; **8.** $\frac{-h^2}{1+h^2}$; **9.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$; **10.** $\frac{\sqrt{2}-2}{2}$.

EJERCICIOS 11.2

1. h^2; **2.** $\frac{h^2}{h+1}$; **3.** $-\frac{h^2}{(h+1)^2}$; **4.** $\sqrt{h+1} - \frac{1}{2}h - 1$; **5.** $h^2(h+6)$; **6.** $\frac{h^2}{h+1}$; **7.** $\tan h - h$;
8. $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos h - \operatorname{sen} h + h - 1)$; **9.** $h \operatorname{sen} h$; **10.** $r(h) = \frac{1-\sqrt{h^2+1}}{\sqrt{h^2+1}}$; **11.** $\frac{1}{x^2}dx$; **12.** $(3x^2+2)\,dx$;
13. $-\frac{4x^2-2x-5}{(x^2-3x+2)^2}dx$; **14.** $(5x^4+4x^3+3x^2+2x+3)\,dx$; **15.** $\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}dx$;
16. $-(3x\cos x + 2\operatorname{sen} x)dx$; **17.** $(\cos x + \tan^2 x + \tan x + x)dx$; **18.** $xe^x(x+2)dx$;
19. $-e^{-4x}(12x+5)dx$; **20.** $x^2(3\ln x + 1)dx$; **21.** $-\frac{4(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}dx$;
22. $x\left(2\arctan x + \frac{x}{1+x^2}\right)dx$; **23.** $e^x(\cos x + \operatorname{sen} x)dx$;
24. $\left(3\ln(2x^2+3) + \frac{4x(3x+8)}{2x^2+3}\right)dx$; **25.** $\frac{1}{x\ln x}dx$; **26.** $2f(x)\,f'(x)\,dx$;
27. $f'(f(x))\,f'(x)\,dx$; **28.** $e^{f(x)}(xf'(x)+1)\,dx$;
29. $6f(f^3(x))\,f'(f^3(x))\,f^2(x)\,f'(x)\,dx$; **30.** $\frac{2f(x)f'(x)}{1+f^2(x)}dx$;
31. $3\cos(3f(x))\,f'(x)\,dx$; **32.** $\frac{2f^3(x)f'(x)}{\sqrt{1+f^4(x)}}dx$; **33.** $\frac{2f(x)f'(x)}{1+f^4(x)}dx$;
34. $\frac{2f(x)f'(x)}{(1+f^2(x))^2}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{1+f^2(x)}\right)dx$; **35.** $6\operatorname{senh}(f^3(x))\cosh(f^3(x))\,f^2(x)\,f'(x)\,dx$.

EJERCICIOS 11.3

1. $\frac{907}{300}$; **2.** $\frac{1}{10}$; **3.** $\frac{253}{250}$; **4.** $\frac{8113}{2700}$; **5.** $\frac{4+25\pi}{100}$; **6.** $\frac{53}{50}$; **7.** $\frac{511}{500}$; **8.** $\frac{9589}{4800}$; **9.** $\frac{4+25\pi}{100}$; **10.** $\frac{27}{50}$; **11.** $\frac{7}{100\pi}$ cm; **12.** $-\frac{53}{600}$ cm; **13.** $\frac{507}{10}$ cm^3; **14.** $\frac{5\pi}{6}$ cm^3; **15.** $\frac{157}{1000\pi}$ cm; **16.** a) Al área del cuadrado de lado h, b) A la suma del área de los dos rectángulos de dimensiones h por x, c) Al área del cuadrado de lado x.

EJERCICIOS 11.4

1. $x+x^2+\frac{1}{2}x^3$; **2.** $x^3-\frac{1}{6}x^5$; **3.** $1-x^2$; **4.** $1+\frac{1}{2}x^2$; **5.** $-\frac{64}{3}x^3$; **6.** $\frac{1}{3}x^4$; **7.** $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4$; **8.** $x-\frac{13}{6}x^3$; **9.** $3x^2+5x^4$; **10.** $1+x+x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{30}x^5$; **11.** $8-3(x+3)+(x+3)^2$; **12.** $12-(x+1)-7(x+1)^2+3(x+1)^3$; **13.** $2+3(x-1)+3(x-1)^2+(x-1)^3$; **14.** $86+101(x-3)+45(x-3)^2+10(x-3)^3+(x-3)^4$; **15.** $-39+92(x+2)-86(x+2)^2+41(x+2)^3-10(x+2)^4+(x+2)^5$; **16.** $-\frac{1}{6}$; **17.** $-\frac{4}{3}$; **18.** $\frac{1}{2}$; **19.** 1; **20.** -2; **21.** -1; **22.** $\frac{2}{5}$; **23.** $\frac{4}{3}$; **24.** $\frac{1}{3}$; **25.** $\frac{2}{5}$; **29.** $x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5$; **31.** 2.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 11 (TIPO A)

1. $-\frac{5}{26}$; **2.** $-\frac{1}{4}$; **3.** $-\frac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}dx$; **4.** $\frac{2}{x^2-1}dx$; **5.** $df(u)=3(u^2+1)\,du$, $dg(x)=-\operatorname{sen} x\,dx$, $dy=f'(g(x))\,g'(x)\,dx=-3(\cos^2 x+1)\operatorname{sen} x\,dx$; **6.** $-\frac{5}{3}$; **7.** 40; **8.** $\frac{243}{10}$ cm^3; **9.** $3+2x+4x^2+2x^3$; **10.** $16-32(x+2)+24(x+2)^2-8(x+2)^3+(x+2)^4$.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 11 (TIPO B)

1. $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{6.29}}{\sqrt{31.45}}$; **2.** $-\frac{3\sqrt{5}}{125}$; **3.** $\frac{2}{x^2-1}dx$; **4.** $\varphi'\left(x\psi\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(\psi\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^2}\psi'\left(\frac{1}{x}\right)\right)dx$; **5.** $-\frac{2}{25}$; **6.** $\frac{4+25\pi}{100}$; **8.** $2+11x+29x^2+\frac{148}{3}x^3+\frac{184}{3}x^4+\frac{896}{15}x^5$; **9.** $34+80(x-2)+80(x-2)^2+40(x-2)^3+10(x-2)^4+(x-2)^5$; **10.** $\frac{7}{6\pi}$ cm.

RESPUESTAS AL CAPÍTULO 12

EJERCICIOS 12.1

1. $-3-3-3-3$; **2.** $5+8+11$; **3.** $12+27+48+75+108$; **4.** $3+5+6+9+11$; **5.** $\frac{3}{4}+\frac{4}{5}$; **6.** $-4+5-6+7$; **7.** $5+40+459+6656$; **8.** $\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\frac{5}{6}$; **9.** $-8(e^3+3)+16(e^4+4)-32(e^5+5)+64(e^6+6)$; **10.** $2-5+10-17+26-37$; **11.** $\sum_{i=1}^{6}4$; **12.** $\sum_{i=1}^{8}(-1)^{i+1}$; **13.** $\sum_{i=1}^{4}(3+i)$; **14.** $\sum_{i=1}^{5}(-1)^{i+1}(3+i)$; **15.** $\sum_{i=1}^{5}(4i-3)$; **16.** $\sum_{i=1}^{6}(i+2)^2$; **17.** $\sum_{i=1}^{7}\frac{1}{3+i}$; **18.** $\sum_{i=1}^{5}\ln(2i+2)$; **19.** $\sum_{i=1}^{4}e^{\sum_{k=1}^{i}k}$; **20.** $\sum_{i=1}^{5}\sqrt[i+1]{i}$; **21.** 16; **22.** -22; **23.** 9; **24.** 22; **25.** 9.

EJERCICIOS 12.2

1. 85; **2.** 147; **3.** 5; **4.** 78; **5.** 476; **6.** 2300; **7.** 212; **8.** 440; **9.** $\frac{3069}{1024}$; **10.** $\frac{69717}{1024}$; **11.** 7;
13. $nx + \frac{n(n+1)}{2}$; **14.** $x^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

EJERCICIOS 12.3

1. $U_f(P) = 1.6; L_f(P) = 1.4$; **2.** $U_f(P) = 1.55; L_f(P) = 1.45$; **3.** $U_f(P) = 1.525; L_f(P) = 1.475$; **4.** $U_f(P) = 0.88; L_f(P) = 0.48$; **5.** $U_f(P) = 0.77; L_f(P) = 0.57$; **6.** $U_f(P) = 2.44; L_f(P) = 1.84$; **7.** $U_f(P) = 2.385; L_f(P) = 2.085$;
8. $U_f(P) = 0.36; L_f(P) = 0.16$; **9.** $U_f(P) = 0.3025; L_f(P) = 0.2025$; **10.** $U_f(P) = -0.3025; L_f(P) = -0.2025$; **11.** $A = 1.5$. Este número representa el área bajo $y = x$ en el intervalo $[1, 2]$.

EJERCICIOS 12.4

1. $L_f(P) = -\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2n} + \frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{2n} + \frac{ab}{n}, U_f(P) = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2n} + \frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{2n} - \frac{ab}{n}, A = \frac{b^2-a^2}{2}$;
2. $L_f(P) = k\left(\frac{b^2-a^2}{2} - \frac{a^2+b^2}{2n} + \frac{ab}{n}\right), U_f(P) = k\left(\frac{b^2-a^2}{2} + \frac{a^2+b^2}{2n} - \frac{ab}{n}\right), A = \frac{k(b^2-a^2)}{2}$;
3. $L_f(P) = \frac{b^2-a^2}{2} - \frac{a^2+b^2}{2n} + \frac{ab}{n} + k(b-a), U_f(P) = \frac{b^2-a^2}{2} + \frac{a^2+b^2}{2n} - \frac{ab}{n} + k(b-a)$, $A = \frac{b^2-a^2}{2} + k(b-a)$;
4. $L_f(P) = a^2(b-a) + a(b-a)^2\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{6}(b-a)^3\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$,
$U_f(P) = a^2(b-a) + a(b-a)^2\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{6}(b-a)^3\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$,
$A = a^2(b-a) + a(b-a)^2 + \frac{1}{3}(b-a)^3 = \frac{1}{3}(a^3 - b^3)$;
5. $L_f(P) = k\left(a^2(b-a) + a(b-a)^2\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{6}(b-a)^3\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\right)$,
$U_f(P) = k\left(a^2(b-a) + a(b-a)^2\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{6}(b-a)^3\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right)$,
$A = k\left(a^2(b-a) + a(b-a)^2 + \frac{1}{3}(b-a)^3\right)$;
6. $L_f(P) = a^2(b-a) + a(b-a)^2\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{6}(b-a)^3\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) + k(b-a)$
$U_f(P) = a^2(b-a) + a(b-a)^2\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{6}(b-a)^3\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) + k(b-a)$
$A = a^2(b-a) + a(b-a)^2 + \frac{1}{3}(b-a)^3 + k(b-a)$;
7. $\frac{2}{3}$; **8.** $\frac{1}{3}$; **9.** $\frac{\pi}{2}$; **10.** El primer día cobra $\frac{148}{15}$ m^2 de más. Al tercer día debe cobrar 443.4 m^2.

EJERCICIOS 12.5

1. $\frac{53}{5}$; **2.** $\frac{231}{25}$; **3.** $\frac{242}{25}$; **4.** $\frac{454083}{310582}$; **5.** $\frac{1192313}{1624999}$; **7.** $\frac{1}{4}$; **8.** $-\frac{1}{4}$; **9.** $e - 1$; **10.** 5; **14.** 8 Es el área de un rectángulo de vértices $(1, 0), (3, 0), (3, 3), (1, 3)$ sumada con el área de un triángulo de vértices $(1, 3), (3, 3), (3, 5)$. Éstas son las figuras que se forman bajo la curva integrada en el intervalo $[1, 3]$.

EJERCICIOS 12.6

1. V; **2.** F; **3.** F; **4.** V; **5.** F; **6.** 0; **7.** 8; **8.** 32; **9.** 15; **10.** -5; **11.** -8; **12.** 1;
13. 6; **14.** -17; **15.** -18; **16.** $\leq$; **17.** $\geq$; **18.** $\geq$; **19.** $\leq$; **20.** $\leq$;
21. $2\sqrt{2} \leq \int_1^3 \sqrt{1+x^2}dx \leq 2\sqrt{10}$; **22.** $2\sqrt{2} \leq \int_1^3 x\sqrt{1+x}dx \leq 12$;
23. $\sqrt{2} \leq \int_0^1 \sqrt{2+3x^2}dx \leq \sqrt{5}$; **24.** $6 \leq \int_{-1}^1 (x^2+3)\,dx \leq 8$;

25. $0 \le \int_0^1 x(3-x^2)dx \le 2$; **26.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{4} \le \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx \le \frac{\pi}{2}$;
27. $4 \le \int_{-1}^{1} \sqrt{5+x^3}dx \le 2\sqrt{6}$; **28.** $0 \le \int_1^2 (x^2-x)\,dx \le 2$;
29. $0 \le \int_{-1}^{1} x^2e^x dx \le 2e$; **30.** $\frac{2}{e} \le \int_{-3}^{-1} x^2e^x dx \le \frac{18}{e^3}$.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 12 (TIPO A)

1. 1307; **2.** 364; **3.** $L_f(P) = 10.5, \quad U_f(P) = 13.5$; **4.** 12; **5.** $\frac{962441}{479244}$; **6.** 14; **7.** 33; **8.** -1; **9.** a) $-$, b) 0,c) $+$.Esta función se comporta de la misma manera que $G(x) = \ln x$; **10.** $\frac{x^3}{12}(3x-4)$.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 12 (TIPO B)

1. $\frac{46291}{729}$; **2.** 650; **3.** $L_f(P) = 9.875, U_f(P) = 14.375$; **4.** 12; **5.** $\frac{\pi}{2}$; **6.** $\frac{203}{4}$; **7.** 7; **8.** $\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}dx$; **10.** $(b-a)\sqrt{1-a^4} \le \int_a^b \sqrt{1+x^4dx} \le (b-a)\frac{\sqrt{1+a^4}+\sqrt{1+b^4}}{2}$.

RESPUESTAS AL CAPÍTULO 13

EJERCICIOS 13.1

1. c; **2.** $\frac{a+b}{2}$; **3.** 12 cm, 87 cm; **4.** 1230 bacterias, 36264 bacterias; **5.** 100%, 10%, $\frac{205}{3} \approx$ 68.33%, a los 1.79 y 6.42 meses o 54 y 192 días; **6.** $\frac{4}{3}$; **7.** 3; **8.** No en el intervalo; **9.** $e-1$; **10.** $\frac{3\pi}{4}$.

EJERCICIOS 13.2

1. 0; **2.** $\operatorname{sen}^4 x^2$; **3.** $\cos x^2 - \operatorname{sen}^2 x$; **4.**$e^{-4x} - xe^x$; **5.** $\sqrt{1+x+x^2}$; **6.** $e^x(x+1)$;
7. $-x - \frac{x\cos^2 x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 8 + 2$; **8.** $-2x^5 + 4x^3 - 2x$; **9.** $3x^2\sqrt{1+x^6}$;
10. $2x\sqrt{4+3x^8}$; **11.** $-e^{2(1-x)^2}$; **12.** $x\left(e^{(1-x)^3} - e^{(2-x)^3}\right) + \int_{1-x}^{2-x} e^{t^3}dt$;
13. $\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos^2\sqrt{x} - 2x\cos^2 x^2$; **14.** $-4x\sqrt{2+(x^2-1)^2}$;
15. $x(1+x)\left(2e^{2x}\cos^4(x^2e^{2x}) - e^x\cos^4(xe^x)\right)\int_{xe^x}^{x^2e^{2x}} \cos^4 t dt$;
16. $\frac{(x^2+1)\left(3\sqrt{27x^3+2} - 2\sqrt{8x^3+2}\right) - 2x\int_{2x}^{3x}\sqrt{u^3+2du}}{(x^2+1)^2}$; **17.** $-\frac{12x^2}{e^{x^6}\left(\int_3^{x^3} e^{-t^2}dt\right)^2}$;
18. $\frac{\int_{3x^2}^{3}\frac{1}{1+u^4}du + \frac{6x}{1+81x^8}}{\left(\int_{3x^2}^{3}\frac{1}{1+u^4}du\right)^2}$; **19.** $\frac{2x^3e^{x^6}\int_{x^3}^{3} t^2e^t dt + 3x^8e^{x^3}\int_2^{x^2} te^{t^3}dt}{\left(\int_{x^3}^{3} t^2e^t dt\right)^2}$;

20. $\frac{\left(\frac{3x^2}{1+x^9} - \frac{2x}{1+x^6}\right)\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}}\frac{1}{(1+u^3)^2}du - \left(\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}(1+x)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}\left(1+x^{\frac{3}{2}}\right)^2}\right)\int_{x^2}^{x^3}\frac{1}{1+t^3}dt}{\left(\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}}\frac{1}{(1+u^3)^2}du\right)^2}$;
21. $f\left(\int_1^x g(t)\,dt\right)g(x)$; **22.** $-g(x)$;
23. $\left(f\left(\int_1^x f(t)\,dt\right) - g\left(\int_1^x f(t)\,dt\right)\right)f(x) -$
$-\left(f\left(\int_2^x f^2(t)\,dt\right) - g\left(\int_2^x f^2(t)\,dt\right)\right)f^2(x)$;

24. $g\left(\int_1^x xf(t)\,dt\right)\left(\int_1^x f(t)\,dt + xf(x)\right) -$
$-g\left(\int_2^x x^2 f^2(t)\,dt\right)\left(2x\int_2^x f^2(t)\,dt + x^2 f^2(x)\right)$;

25. $\int_{\int_{1-x^2}^{2-x^2} f^2(t)dt}^{\int_{1-x}^{2-x} f(t)dt} g(t)\,dt + x\begin{pmatrix} g\left(\int_{1-x}^{2-x} f(t)\,dt\right)\left(f(1-x) - f(2-x)\right) - \\ -2xg\left(\int_{1-x^2}^{2-x^2} f^2(t)\,dt\right)\left(f^2(1-x^2) - f^2(2-x^2)\right)\end{pmatrix}$;

26. 1; **27.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$; **28.** 3; **29.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$; **30.** 0; **31.** $\frac{1}{6}$; **32.** 1; **33.** 1; **34.** 0; **35.** -1; **36.** En $-\infty < x < -1$ y en $1 < x < \infty$ crece. En $-1 < x < 1$ decrece. En $x = 1$ hay un mínimo local. En $x = -1$ hay un máximo local; **37.** Siempre crece; **38.** En $-\infty < x < -1$ crece. En $-1 < x < \infty$ decrece. En $x = -1$ hay un máximo local; **39.** En $-\infty < x < 1$ y en $2 < x < \infty$ crece. En $1 < x < 2$ decrece. En $x = 2$ hay un mínimo local. En $x = 1$ hay un máximo local; **40.** En $-\infty < x < 0$ decrece. En $0 < x < \infty$ crece. En $x = 0$ hay un mínimo local; **41.** En $-\infty < x < 0$ decrece. En $0 < x < \infty$ crece. En $x = 0$ hay un mínimo local; **42.** En $-\infty < x < -1$ y en $0 < x < 1$ decrece. En $-1 < x < 0$ y en $1 < x < \infty$ crece. En $x = -1$ y $x = 1$ hay mínimos locales. En $x = 0$ hay un máximo local; **43.** En $-\infty < x < \frac{1}{2}$ y en $2 < x < \infty$ decrece. En $\frac{1}{2} < x < 2$ crece. En $x = \frac{1}{2}$ hay un mínimo local. En $x = 2$ hay un máximo local; **44.** En $-\infty < x < -2$ y en $0 < x < 2$ crece. En $-2 < x < 0$ y en $2 < x < \infty$ decrece. En $x = 0$ hay un mínimo local. En $x = -2$ y $x = 2$ hay máximos locales; **45.** En $-\infty < x < 0$ decrece. En $0 < x < \infty$ crece. En $x = 0$ hay un mínimo local; **46.** En $-\infty < x < 0$ y en $5 < x < \infty$ es cóncava hacia arriba. En $0 < x < 5$ es cóncava hacia abajo. Puntos de inflexión en $x = 0$ y $x = 5$;
47. En $-\infty < x < -4$ y en $2 < x < \infty$ es cóncava hacia arriba. En $-4 < x < 2$ es cóncava hacia abajo. Puntos de inflexión en $x = -4$ y $x = 2$; **48.** En $-\infty < x < -1$ y en $1 < x < \infty$ es cóncava hacia arriba. En $-1 < x < 1$ es cóncava hacia abajo. Puntos de inflexión en $x = -1$ y $x = 1$; **49.** En $-\infty < x < 2$ y en $4 < x < \infty$ es cóncava hacia abajo. En $2 < x < 4$ es cóncava hacia arriba. Puntos de inflexión en $x = 2$ y $x = 4$;
50. En $-\infty < x < 0$ y en $1 < x < 2$ es cóncava hacia arriba. En $0 < x < 1$ y en $2 < x < \infty$ es cóncava hacia abajo. Puntos de inflexión en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$; **51.** En $-\infty < x < \frac{11-\sqrt{17}}{2}$ y en $\frac{11+\sqrt{17}}{2} < x < \infty$ es cóncava hacia arriba. En $\frac{11-\sqrt{17}}{2} < x < \frac{11+\sqrt{17}}{2}$ es cóncava hacia abajo. Puntos de inflexión en $x = \frac{11-\sqrt{17}}{2}$ y $x = \frac{11+\sqrt{17}}{2}$; **52.** En $-\infty < x < -\frac{5}{2}$ es cóncava hacia abajo. En $-\frac{5}{2} < x < \infty$ es cóncava hacia arriba. Punto de inflexión en $x = -\frac{5}{2}$; **53.** Siempre es cóncava hacia arriba; **54.** En $-\infty < x < \tan 1$ es cóncava hacia abajo. En $\tan 1 < x < \infty$ es cóncava hacia arriba. Punto de inflexión en $x = \tan 1$; **55.** En $-\infty < x < \frac{1}{2}$ y en $e < x < \infty$ es cóncava hacia abajo. En $\frac{1}{2} < x < e$ es cóncava hacia arriba. Puntos de inflexión en $x = \frac{1}{2}$ y $x = e$; **56.** a) $f(x) = x_0 - x$, b) $f(x) = x - x_0$, c) $f(x) = (x_0 - x)^2$; **57.** En $-\infty < x < a$ y en $b < x < \infty$ decrece. En $a < x < b$ crece. Mínimo local en $x = a$. Máximo local en $x = b$;
62. $f'(x) = \int_1^x \sqrt{1 + u^2 du}$, $f''(x) = \sqrt{1 + x^2}$;
63. $f'(x) = 3\int_{6x-1}^4 u\sqrt{1 + u}du$, $f''(x) = 18(1 - 6x)\sqrt{6x}$;
64. $\sqrt{1 + x^3}\ln(1 + \operatorname{sen}^2 t)(1 + \operatorname{sen}^2 t)^{\int_2^x \sqrt{1+t3}dt}$;

65. $$\begin{array}{l} -\frac{4x}{1+4x^2}\int_4^{3x}\cos^4 t dt\left(\int_{2x}^4 \frac{t}{1+t^2}\right)^{\int_4^{3x}\cos^4 t dt - 1} + \\ +3\cos^4 x - \ln\left|\int_{2x}^4 \frac{t}{1+t^2}\right|\left(\int_{2x}^4 \frac{t}{1+t^2}\right)^{\int_4^{3x}\cos^4 t dt} \end{array};$$

66. $-\frac{2x}{y\sqrt{1+y}+3}$; **67.** $\frac{xe^x-2x-3y}{ye^y+3x}$; **68.** $-\frac{e^y(y^2-2y+3)+2-3e^2}{xe^y(y^2+1)+5}$; **69.** $-\frac{\operatorname{sen}^3 x+3y+2}{5+3x}$;
70. $\frac{\sqrt{x+1}-2xy^3-4}{\sqrt{y+1}+3x^2y^2+2y}$; **71.** $\frac{2}{3}\ln 3$; **72.** $3\ln 3-2$; **73.** $\frac{257}{32}\ln 2+\frac{321}{128}$; **74.** $1+\frac{5\pi}{4}-\frac{5}{2}\ln 2$;
75. $\frac{3}{4}\left(1+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{e^2+4}\right)\right)$; **76.** $\frac{e^2-5}{e}$; **77.** $\frac{26e^9-44}{9e^{12}}$; **78.** $\frac{1150464\sqrt{2}-79800\sqrt{5}}{2205}$; **79.** $2e-5$;
80. $\frac{\pi}{8}$; **81.** $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\ln 2\right)$; **82.** $\frac{5e^6-8}{3e^6}$; **83.** $\frac{7e^8+1}{16(e^2-1)}$; **84.** $\frac{2e(1+\ln 2e)-1}{2e-1}$; **85.** $\frac{1}{2}$; **86.** 3;
87. $-\frac{7}{3}$; **88.** 4; **89.** 0.

EJERCICIOS 13.3

3. $4e^x$; **4.** $2x^3$; **5.** $2x(x+1)$; **6.** $4x$; **7.** $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+\ln|x|-\frac{1}{x}$; **8.** $\frac{1}{2}x^2-3\cos x$;
9. $x^2+4\operatorname{sen} x$; **10.** $\operatorname{sen} x-\cos x$; **11.** x; **12.** $\frac{1}{5}x^5+2\tan x$; **13.** $4\tan x+7\sec x$;
14. $\frac{1}{2}x^2+4x+5\ln|x|$; **15.** $2\arctan x$; **16.** $\cosh x+4\operatorname{senh} x$; **17.** $2\operatorname{arcsen} x+\frac{1}{2}x^2+2x$;
18. $5\csc x-3\cot x$; **19.** $\frac{1}{3}x^3+x+3\arctan x$; **20.** $\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+4\arctan x$;
21. $e-1$; **22.** $\frac{11\sqrt{2}-16}{2}$; **23.** $\frac{5\pi+28}{12}$; **24.** $\frac{e^2+1}{2e}$; **25.** $\frac{2}{\pi}$.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 13 (TIPO A)

1. 2115 discos; **2.** 30 min., 142.5, 140; **3.** 160, 13:00 y 15:00; **4.** 33; **5.** $f_{prom}(x)=\frac{1}{3}>g_{prom}(x)=\frac{1}{5}$; **6.** $F'(x)=\sqrt{1+x^4}-\operatorname{sen}^2 x$; **7.** $F'(x)=3\operatorname{sen}^3(3x+2)$;
8. $\frac{7e^4-4e^2+1}{2e^2}$; **9.** $a=-2; b=2; e(2e-1)$; **10.** $\frac{\pi-2}{4}$.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 13 (TIPO B)

1. $\frac{-32+\sqrt{212524}}{50}\approx 8$; durante el 8o. día; **2.** 12.68 min. y 47.32 min.; **3.** $\frac{460}{3}$ imecas$\approx$ 153 imecas, a las 12:51 aproximadamente; **4.** $\frac{\pi}{4}$; **5.** $\frac{2\sqrt{2}+8}{\pi}$; **6.** $F'(x)=$
$2x(x^2+2)^2\sqrt{1+(x^2+2)^3}-2(2x-3)^2\sqrt{1+(2x-3)^3}+2x\int_{2x-3}^{x^2+2}\sqrt{1+t^3}dt$;
7. $F'(x)=xe^{x^3}\left(\int_2^x te^{t^3}dt\right)^2 e^{\int_2^x te^{t^3}dt}-x^2e^x$; **8.** $\frac{\pi+1}{4}$;
9. $a=-3; b=6; c=-6; 2e(3+1)$; **10.** $a=-4; b=12; c=-24; d=24; 9e-24$.

RESPUESTAS AL CAPÍTULO 14

EJERCICIOS 14.1

1. $3f(x)$; **2.** $5f(x)+4f'(x)$; **3.** $x^2+\operatorname{sen} x+f(x)$; **4.** $1+f'(x)$; **5.** $xf(x)$;
6. $2x+1+3f'(x)$; **7.** $xf(x)$; **8.** $f(x)+x(f(x)+f'(x))$; **9.** $x\operatorname{sen}^2 x+f^3(x)$;
10. $x^3(f(x)+1)+f''(x)$; **11.** $-\frac{5}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2+3x+c$; **12.** $\frac{1}{12}(1+4x)^3+c$;
13. $\frac{2}{3}\sqrt{x}(3+x)+c$; **14.** $9x-\frac{4}{x}+12\ln|x|+c$; **15.** $\frac{1}{4}x^4+2x^2+4\ln|x|+c$;
16. $-\frac{1}{3}x^3+6x^2-48x+64\ln|x|+c$; **17.** $-x-\cot x+c$; **18.** $2x^2+x+4\arctan x+c$;
19. $\frac{3\sqrt{5}}{5}\operatorname{arcsen} x+c$; **20.** $\frac{5}{7}\arctan x+c$; **21.** $4x+7\cos x+6\operatorname{sen} x+c$;
22. $5\operatorname{sen} x-4\cos x+c$; **23.** $\frac{3}{2}x^2+2x+e^x+c$;
24. $4x+e^x-4e^{-x}+c$; **25.** $\frac{1}{2}x^2+5\arctan x+c$;

26. $\frac{\sqrt{3}}{3}(x+4\operatorname{arcsen} x)+c$; **27.** $\frac{1}{3}x^3+\frac{2^x}{\ln 2}+c$; **28.** $\frac{12e^{x\ln 3-2x\ln 2}}{\ln 3-\ln 2}-\frac{75\left(\frac{3}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{5}{3}\right)}$;
29. $6x+3\cosh x-2\tanh x+c$; **30.** $\frac{e^x+x}{2}$.

EJERCICIOS 14.2

1. $\frac{2}{21}(3+7x)^{\frac{3}{2}}+c$; **2.** $\frac{2}{9}(3x+7)^{\frac{3}{2}}+c$; **3.** $-\frac{3}{40}(1-10x)^{\frac{4}{3}}+c$; **4.** $\frac{1}{25}(2+5x)^5+c$;
5. $\frac{1}{12}(4x^2+3)^{\frac{3}{2}}+c$; **6.** $-\frac{3}{64}(3-8x^2)^{\frac{4}{3}}+c$; **7.** $\frac{1}{12}(7+x^2)^6+c$; **8.** $\frac{1}{60}(2+3x^4)^5+c$;
9. $\frac{1}{3}(x^2+2x+8)^{\frac{3}{2}}+c$; **10.** $\frac{3}{8}(2x^2+6x+1)^{\frac{4}{3}}+c$; **11.** $-\sqrt{9-x^2}+c$;
12. $-\frac{3}{14(7x+1)^2}+c$; **13.** $\frac{1}{3}\sqrt{2+3x^2}+c$; **14.** $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+6x^2+12x+4}+c$;
15. $\frac{1}{3}\ln|x^3+6x^2+12x+4|+c$; **16.** $\frac{1}{14}\ln\left(7(x+1)^2+4\right)+c$;
17. $-\frac{1}{20}\cos(20x-12)+c$; **18.** $-\frac{3}{7}\operatorname{sen}(7x+1)+c$; **19.** $-2\cos\sqrt{x}+c$;
20. $-\frac{1}{4}\cos(4\operatorname{sen} x)+c$; **21.** $\frac{1}{3}\operatorname{sen}(3\operatorname{sen} x)+c$; **22.** $\frac{1}{5}\cos(5\cos x)+c$;
23. $-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(\cos x^2)+c$; **24.** $-\frac{1}{4}\cos(4e^x+2)+c$; **25.** $-\frac{1}{22}\cos(11x^2-10)+c$;
26. $\frac{1}{2}\operatorname{sen}(x^2+4x+5)+c$; **27.** $\frac{1}{16}(8+3x^4)^{\frac{4}{3}}+c$; **28.** $\frac{1}{3}\operatorname{senh} e^{3x}+c$;
29. $\frac{1}{4}e^{4\tan x}+c$; **30.** $\frac{5}{63}(9x^2+9x+1)^{\frac{7}{5}}+c$; **31.** $\operatorname{sen}^2 x+x+c$; **32.** $-\frac{1}{3}e^{\cos 3x}+c$;
33. $e^{e^x}+c$; **34.** $\frac{2^{2x}}{2\ln 2}+\frac{3^{2x}}{2\ln 3}+\frac{6^x}{\ln 6}+c$; **35.** $\frac{1}{3}(\operatorname{sen}^2 x+4)^{\frac{3}{2}}+c$; **36.** $\frac{2^{x^2}}{2\ln 2}+c$; **37.** $\frac{2^{\sqrt{x}+1}}{\ln 2}+c$;
38. $\frac{1}{5}\tan^5 x+c$; **39.** $-\ln(\cos^2 x+4)+c$; **40.** $\frac{1}{7}\tan^7 x+c$; **41.** $\frac{1}{2}\arctan^2 x+c$;
42. $\ln|\arctan x|+c$; **43.** $-\frac{1}{4\arctan^2 x^2}+c$; **44.** $\frac{4}{3}(\cos^2\sqrt{x}+10)^{\frac{3}{2}}+c$;
45. $-2\cos(\cos^2\sqrt{x})+c$; **46.** $e^{e^{e^x}}+c$; **47.** $-\frac{9}{e^x+1}+c$; **48.** $\ln(e^x+1)+c$;
49. $\frac{4}{5}(x-\ln(5+e^x))+c$; **50.** $\sec x+\frac{1}{2}\sec^2 x+c$; **51.** $5\ln|\ln|x||+c$; **52.** $-\frac{12}{\ln\sqrt{x}}+c$;
53. $-\frac{1}{4\ln^4 x}+c$; **54.** $2x+\frac{4}{3}\arctan^3 x+\frac{5}{2}\ln(x^2+1)+c$; **55.** $\frac{1}{4}\arctan x^4+c$;
56. $2\arctan\sqrt{x}+c$; **57.** $x+\frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+c$; **58.** $\frac{1}{4}\cosh\left(\cosh^2 x^2\right)+c$;
59. $-\frac{1}{9\cosh^3 x^3}+c$; **60.** $\ln|\tanh x|+c$.

EJERCICIOS 14.3

1. $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^4 x+c$; **2.** $-\frac{\cos^3 x}{5}\left(\operatorname{sen}^2 x+\frac{2}{3}\right)+c$; **3.** $-\frac{\cos^4 3x}{18}\left(\operatorname{sen}^2(3x)+\frac{1}{2}\right)+c$;
4. $-\frac{1}{16}\cos^4 4x+c$; **5.** $-\frac{1}{10}\operatorname{sen}^5 2x+\frac{1}{6}\operatorname{sen}^3 2x+c$; **6.** $-\frac{2}{3}\cos^3 x+c$; **7.** $\frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 x+c$;
8. $\cos x-\frac{2}{3}\cos^3 x+c$; **9.** $\operatorname{sen} x-\frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 x+c$; **10.** $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2x+c$;
11. $\frac{4}{3}\operatorname{sen}^3 x-\frac{4}{5}\operatorname{sen}^5 x+c$; **12.** $\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}\operatorname{sen} 6x+c$;
13. $\frac{3}{8}x+\frac{3}{32}\operatorname{sen} 4x+\frac{1}{8}\operatorname{sen} 2x\cos^3 2x+c$; **14.** $\frac{1}{8}x+\frac{1}{48}\operatorname{sen} 6x-\frac{1}{12}\operatorname{sen} 3x\cos^3 3x+c$;
15. $\frac{3}{128}x+\frac{3}{512}\operatorname{sen} 4x+\frac{1}{128}\operatorname{sen} 2x\cos^3 2x-\cos^5 2x\left(\frac{1}{16}\operatorname{sen}^3 2x+\frac{1}{32}\operatorname{sen} 2x\right)+c$;
16. $\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x+c$; **17.** $\frac{5}{16}x-\cos x\left(\frac{1}{6}\operatorname{sen}^5 x+\frac{5}{24}\operatorname{sen}^3 x+\frac{5}{16}\operatorname{sen} x\right)+c$;
18. $\frac{5}{16}x+\frac{5}{32}\operatorname{sen} 2x+\frac{5}{24}\operatorname{sen} x\cos^3 x+\frac{1}{6}\operatorname{sen} x\cos^5 x+c$;
19. $\frac{17}{2}x+12\cos x-\frac{9}{4}\operatorname{sen} 2x+c$;
20. $\frac{1}{384}(2\cos 12x-9\cos 8x+8\cos 6x+18\cos 4x-72\cos 2x)+c$.

EJERCICIOS 14.4

1. $\int f(t)\,dt$; **2.** $\frac{1}{4}\int f(t)\,dt$; **3.** $\frac{1}{9}\int(t-1)f(t)\,dt$; **4.** $-\int tf(t)\,dt$; **5.** $\frac{1}{3}\int tf(t)\,dt$;
6. $2\int tf(t)\,dt$; **7.** $\frac{3}{2}\int t^2 f(t)\,dt$; **8.** $\int\frac{f(t)}{t-1}dt$; **9.** $\int\operatorname{sen}^2 t\cos t f(\cos^2 t)\,dt$;
10. $4\int\operatorname{senh} t\cosh t f\left(4\cosh^2 t\right)dt$; **11.** $\frac{2}{45}(3x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{27}(3x-1)^{\frac{3}{2}}+c$;

12. $\frac{2}{7}(x+2)^{\frac{7}{2}} - \frac{8}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} + c$; **13.** $2\sqrt{x+1} - 4\ln\left|\sqrt{x+1}+2\right| + c$;
14. $-4x + 26\sqrt{x+3} - 122\ln\left|\sqrt{x+3}+4\right| + c$; **15.** $\frac{2}{(x+3)^3} - \frac{1}{(x+3)^2} + c$;
16. $\frac{1}{25}\left(\frac{1}{(5x+2)^2} - \frac{1}{5x+2}\right) + c$; **17.** $\frac{1}{27}\left(\frac{1}{8}(3x+7)^8 - 2(3x+7)^7 + \frac{49}{6}(3x+7)^6\right) + c$;
18. $\frac{12}{5}(1+x)^{10} + \frac{6}{7}(1+x)^7 - 8(1+x)^4 + c$; **19.** $\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x^2+4}+x\right| + c$;
20. $\frac{1}{2}x\sqrt{4+x^2} - 2\ln\left|\sqrt{x^2+4}+x\right| + c$.

EJERCICIOS 14.5

1. $\int_3^6 f(z)dz$; **2.** $2\int_0^2 tf(t^2)\,dt$; **3.** $\int_4^8 f(u)\,du$; **4.** $\int_0^h f(a+z)\,dz$; **5.** $-\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{f(t)}{t^2}dt$;
6. $\int_0^1 \frac{f(u)}{\sqrt{1-u^2}}du$; **7.** $2\int_{-3}^{-\frac{1}{2}} f(4+2u)\,du$; **8.** $\frac{3}{2}\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{7}{3}} f\left(\frac{1+3u}{2}\right)du$; **9.** $\frac{1}{2}\int_0^{81}\frac{f(t)}{\sqrt{t}}dt$;
10. $\frac{1}{3}\int_{-1}^{510}\frac{f(t+2)}{t^{\frac{4}{3}}}dt$; **11.** $6 + 24\ln\frac{4}{5}$; **12.** $2 + 2\ln\frac{2}{3}$; **13.** $-\frac{1}{112} + \frac{1}{9}\ln\frac{16}{7}$; **14.** $\frac{1}{12}e^4 - 1$;
15. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\ln(512e^4)}{4}\right|$; **16.** $\frac{1}{2}(e^8 - 1)$; **17.** $8 + 12\ln\frac{3}{5}$; **18.** $\frac{1}{294}$; **19.** $\frac{6}{7} + \frac{17}{49}\ln\frac{15}{29}$;
20. $\sqrt{148} - \sqrt{20} + 10\ln\frac{\sqrt{5}+5}{\sqrt{37}+5}$; **21.** a) 8, b) 0; **22.** a) 0, b) 0.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 14 (TIPO A)

2. $xf(x)$; **3.** $9 - \frac{5}{3}\sqrt{5}$; **4.** $\ln|\ln|\ln|x||| + c$; **5.** $x + \ln|1+x^2| + c$;
6. $x + 3\arctan x + 2\ln|1+x^2| + c$; **7.** $\frac{1}{8}x + \frac{1}{96}\operatorname{sen} 12x + c$;
8. $\frac{1}{9}(3\arctan x + 2)^3 + c$; **9.** $\frac{5}{72}(3x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 12x + 9)^{\frac{6}{5}} + c$;
10. $-\ln|4\cos^2 x + 3\operatorname{sen}^2 x| + c$.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 14 (TIPO B)

2. $\frac{x}{f(x)}$; **3.** $\frac{74}{63}$; **4.** $\frac{1}{3}\ln\left|\ln\left|\ln^3|\ln x|\right|\right| + c$; **5.** $\frac{1}{3}(1+\arctan x)^3 + c$;
6. $3\arctan x + \frac{1}{4}\ln^2(1+x^2) + c$; **7.** $\frac{1}{8}\left(\frac{5}{2}x - \frac{1}{3}\operatorname{sen} 12x + \frac{1}{16}\operatorname{sen} 24x + \frac{1}{36}\operatorname{sen}^3 12x\right) + c$;
8. $-\frac{1}{12(4+3x^4)} + c$; **9.** $\frac{\operatorname{sen} x\left(8\cos^4 x + 4\cos^2 x + 3\right)}{15\cos^5 x} + c$;
10. $\frac{1}{3}\sec^3 x + \ln|\csc x - \cot x| + c$.

RESPUESTAS AL CAPÍTULO 15

EJERCICIOS 15.1

11. $y = ce^{2x}$; **12.** $y = \frac{3}{2}x^2 + c$; **13.** $y = ce^{\frac{x^2}{2}}$; **14.** $y = -\frac{4}{\ln|1+4e^x|+c}$; **15.** $y = \sqrt{\frac{1}{2}e^{4x} + c}$;
16. $y = ce^{\cos x}$; **17.** $y = \frac{c}{\csc x - \cot x}$; **18.** $y = ce^{-\frac{2}{9}(4-3x)^{\frac{3}{2}}}$; **19.** $y = ce^{\left(-\frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 - 4x^3 - 4x\right)} - 1$;
20. $\frac{y^2}{2} + \ln y = -\frac{1}{2}x^2 + x - \ln|x+1| + c$; **21.** $y = e^{6x-6}$; **22.** $y = 3e^{\left(\frac{3}{2}x^2 - 6\right)}$;
23. $y = \sqrt{\frac{3}{5-2x^3}}$; **24.** $y = \sqrt{1 + 6\ln 2 - 6\ln|x|}$; **25.** $y = \sqrt{-2x + 4\ln|x+2| + 5}$;
26. $y = -\frac{1}{16}\left(\frac{2}{3}(4x-1)^{\frac{3}{2}} + 2(4x-1)^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4} + 1$; **27.** $y = \frac{6x+2}{3(x+1)^3} + \frac{148}{81}$;

28. $y=3e^{\left(\frac{2}{27}(9x+2)^{\frac{3}{2}}-\frac{4\sqrt{2}}{27}\right)}$; **29.** $y=2\left(e^{\left(\frac{x^2+2x}{2}\right)}-1\right)$; **30.** $y=-\sqrt[3]{\frac{4}{(2x+3)^6-11^6}}+1$;
32. $y=ce^{-3x}+\frac{4}{3}$; **33.** $y=ce^{-2x}+\frac{1}{3}e^{x}$; **34.** $y=ce^{5x}-\frac{4}{3}e^{2x}$; **35.** $y=ce^{-8x}-\frac{1}{7}e^{-x}$;
36. $y=ce^{\frac{5}{2}x}+\frac{3}{5}e^{5x}$; **37.** $y=ce^{-\frac{3}{4}x}+\frac{10}{17}e^{\frac{1}{10}x}$; **38.** $y=ce^{x}-\frac{4}{3}e^{-2x}$;
39. $y=ce^{-5x}+3e^{-3x}$; **40.** $y=ce^{-\frac{7}{10}x}+\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{10}x}$; **41.** $y=\frac{5}{6}e^{-5x}+\frac{1}{6}e^{x}$;
42. $y=-\frac{23}{14}e^{\frac{1}{2}x}-\frac{5}{14}e^{-3x}$.

EJERCICIOS 15.2

1. $v=-4t+3,\quad x=-2t^2+3t+8$; **2.** $v=\frac{3}{2}t^2,\quad x=\frac{1}{2}t^3+1$;
3. $v=\frac{1}{8}(2t+1)^4+\frac{7}{8},\quad x=\frac{1}{80}(2t+1)^5+\frac{7}{8}t+\frac{159}{80}$; **4.** $v=-\sqrt{4t+9}+3$,
$x=-\frac{1}{6}(4t+9)^{\frac{3}{2}}+3t+\frac{9}{2}$; **5.** $v=\frac{3}{2}t^2+7t,\quad x=\frac{1}{2}t^3+\frac{7}{2}t^2$;
6. $v=-e^{-t+4}+e^4,\quad x=e^{-t+4}+e^4t-e^4$; **7.** $v=-\frac{2}{3(3t+11)}+\frac{167}{33}$,
$x=-\frac{2}{9}\ln|3t+11|+\frac{167}{33}+\frac{2}{9}\ln 11$; **8.** $v=\frac{1}{4}\operatorname{sen}(4t+1)-\frac{1}{4}\operatorname{sen}1$,
$x=-\frac{1}{16}\cos(4t+1)-\frac{1}{4}\operatorname{sen}1+\frac{1}{16}\cos 1$; **9.** $v=\frac{3}{2}\cos 2t-\frac{3}{2},\quad x=\frac{3}{4}\operatorname{sen}2t-\frac{3}{2}t$;
10. $v=-\frac{1}{5}e^{-5t+1}+\frac{1}{5}e,\quad x=\frac{1}{25}e^{-5t+1}+\frac{1}{5}et-\frac{1}{25}e$; **11.** $v_0=\sqrt{200g}\frac{m}{s}\approx 44.294\frac{m}{s}$;
12. $h=\frac{1250}{g}$ m$\approx$ 127.421 m; **13.** $x=\frac{1000}{27}$ m$\approx$ 37.037 m;
14. $a=-\frac{15125}{648}\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\approx-23.341\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; **15.** $t=\sqrt{75}$ s$\approx$ 8.660 s.

EJERCICIOS 15.3

1. 57,526.52 g; **2.** $t=70\ln\frac{20911}{20000}$ min $\approx$ 3.118 min; **3.** $t=9\ln 2$ min $\approx$ 6.238 min; **4.** $t=350\ln 10$ min $\approx$ 805.905 min; **5.** $125\frac{g}{lt}$; **6.** 71,258.61g; **7.** $t=\frac{250}{9}\ln\frac{5}{2}$ min $\approx$ 25.452 min; **8.** 12,419.53 g; **10.** 0; **11.** $\left(\frac{3250}{9e^{\frac{3}{2}}}-\frac{1000}{9e^{15}}\right)$ g$\approx$ 80.575 g; **12.** $x(t)=\frac{200}{e^{\frac{1}{10}t}}-\frac{100}{e^{\frac{3}{10}t}}$;
14. a) 1026.833 g, b) 684.556 g, c) 10.397 min, f) 735.759 g, g) 146.525 g; **15.** a) 5029 g, b) 6240.6 g, c) 0.512874 min.

EJERCICIOS 15.4

1. 1502 días después, el 12 de Febrero de 1998; **3.** 40960 células; **4.** $t=\frac{2\ln 20000}{\ln 4}$ h$\approx$ 14.288 h; **5.** 1600 bacterias; **6.** $t=\frac{25\ln\left(\frac{3}{4}\right)}{\ln\left(\frac{49}{50}\right)}$ años$\approx$ 356 años; **7.** $x=\frac{5}{16}$ g $\approx$ 0.3125 g;
9. $x=\frac{1}{\sqrt[17]{2}}x_0\approx 0.960x_0$; **10.** $t=\frac{\ln(0.7)}{\ln(0.5)}(5550)$ años $\approx$ 2856 años; **13.** $\frac{1}{s}$; **15.** $t\to\infty$;
16. $T=110e^{\frac{t}{60}\ln\left(\frac{3}{11}\right)}+20$. Si $t\to\infty$, entonces $T\to 20°C$; **17.** $t=\frac{120}{\ln\left(\frac{3}{11}\right)}\ln\left(\frac{2}{11}\right)$ min $\approx$ 157.448 min.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 15 (TIPO A)

1. $y=\frac{c}{x^3}$; **2.** $y=x$; **3.** $t=\frac{25}{g}s\approx 2.548s$; $y_{\max}=\frac{625}{g}$ m $\approx$ 63.710 m;
4. $t_{1,2}=\frac{20\pm 2\sqrt{100-3g}}{g}$ s; $t_1\approx 3.751$ s; $t_2\approx 0.326$ s; **5.** $y_{\max}=-g\ln\left(\frac{25+g}{g}\right)+25$ m $\approx$ 12.576 m; **6.** $y_{\max}=\frac{50}{4}-\frac{g}{2}\ln\sqrt{\frac{g+50}{g}}$ m $\approx$ 8.066 m; **7.** $t=\frac{50}{3}\ln\left(\frac{1500}{1499}\right)$ min $\approx$ 0.011 min; **8.** $t=30\ln(25)$ min $\approx$ 96.566 min; **9.** $t=\frac{6\ln 5}{\ln 2}$ años$\approx$ 13.931 años;
10. $x=40000\left(\frac{16}{19}\right)^2$hab $\approx$ 28366 hab.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 15 (TIPO B)

1. $y = ce^{-3x} + \frac{1}{2}e^{x}$; **2.** $y = x^{-\frac{2}{3}}$; **3.** $t = \frac{30}{g}$ s≈ 3.058 s; $y_{\max} = \frac{450}{g}$ m ≈ 45.871 m; **4.** $t_{1,2} = \frac{30 \pm \sqrt{900-14g}}{g}$ s; $t_1 \approx 5.873$ s; $t_2 \approx 0.243$ s; **5.** $y_{\max} = \frac{175}{4} - \frac{25g}{16} \ln\left(\frac{28+g}{g}\right)$ m ≈ 23.070 m; **6.** $y_{\max} = \frac{175}{12} - \frac{25g}{144} \ln\left(\frac{g+84}{g}\right)$ m ≈ 10.738 m; **7.** $t = \frac{75}{4} \ln\left(\frac{7500}{7499}\right)$ min ≈ 0.002 min; **8.** $t = \frac{40}{3} \ln\left(\frac{5}{2}\right)$ min ≈ 12.217 min; **9.** $t = \frac{8 \ln 5}{\ln 2}$ años ≈ 18.575 años; **10.** $x = 60000\left(\frac{20}{27}\right)^2$hab ≈ 32922 hab.

RESPUESTAS AL CAPÍTULO 16

EJERCICIOS 16.1

1. $\int_1^4 \frac{3}{4x+5} dx = \frac{3}{4} \ln\left(\frac{7}{3}\right)$; **2.** $\int_2^3 (x^2 - 2x + 6)\, dx = \frac{22}{3}$; **3.** $\int_{-1}^1 (x^2+1)\, dx = \frac{8}{3}$; **4.** $\int_{-1}^1 \cosh x dx = 2 \operatorname{senh} 1$; **5.** $\int_{-2}^3 (e^{2x}+1)\, dx = 5 + \frac{e^{10}-1}{2e^4}$; **6.** $\int_2^4 \left(\sqrt{x-2}+2\right) dx = \frac{4\sqrt{2}+12}{3}$; **7.** $2\int_1^5 x dx = 24$; **8.** $\int_{-1}^0 \left(\sqrt{x+3}+2\right) dx + \int_0^3 \left(\sqrt{x+3}+2+\sqrt{x+1}\right) dx = 8 + \frac{2}{3}\left(7 - 2^{\frac{3}{2}} + 6^{\frac{3}{2}}\right)$; **9.** $\int_0^4 (e^x - e^{-x})\, dx = \frac{e^8+1}{e^4} - 2$; **10.** $\int_{-1}^2 (5x+7)\, dx = \frac{29}{2}$; **11.** $\int_1^3 \left(\frac{2}{(x+1)^2} + 2\right) dx = \frac{9}{2}$; **12.** $\int_2^4 \left(xe^{x^2} + x\right) dx = 2e^{16} - e^4 + 6$; **13.** $\int_0^1 \left(\frac{3}{x^2+1} + 2x + 1\right) dx = 2 + \frac{3\pi}{4}$; **14.** $\int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2 x + \cos x + 2)\, dx = 5\pi$; **15.** $2\int_0^2 (4 - x - x^2)\, dx = \frac{20}{3}$; **16.** $2\int_{-4}^2 dy = 12$; **17.** $\int_{-2}^0 \left(\frac{y-2}{3} - \frac{y+3}{2}\right) dy = -4$; **18.** $\int_{-1}^1 (5 + y - y^2)\, dy = \frac{896}{9}$; **19.** $\int_1^2 \left(7 - y - (y-1)^2 - 1\right) dy = \frac{25}{6}$; **20.** $\int_{-1}^1 \left(y - 4 - \frac{1}{y^2+1}\right) dy = -8 - \frac{\pi}{2}$; **21.** $\int_1^8 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{y}} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right) dy = \frac{13}{2} - 4\sqrt{2}$; **22.** $\int_0^1 \left(\frac{7-y^2}{5} - \frac{y^2-5}{3}\right) dy = \frac{26}{9}$; **23.** $\int_1^2 \left(e^y - e^{\sqrt{y}}\right) dy = e^2 + e\left(2\sqrt{2} - 5\right)$; **24.** $\int_0^1 2e^y dy = 2(e-1)$; **25.** $2\int_{-1}^1 (y-3)\, dy = -12$; **26.** 9; **27.** 9; **28.** 9; **29.** $\frac{15}{2}$; **30.** $\frac{7}{2}$; **31.** 10; **32.** 16; **33.** 16; **34.** 16; **35.** 30; **36.** 15; **37.** 20; **38.** 8; **39.** 15; **40.** 16; **41.** 4; **42.** 21; **43.** 15; **44.** 7; **45.** 2; **46.** $\frac{4}{3}$; **47.** $\frac{\pi}{2}$; **48.** $\frac{\sqrt{343}-8}{9}$; **49.** $\frac{2}{3}$; **50.** $\sqrt{11} - \sqrt{2}$; **51.** $\frac{1}{2}e - \frac{1}{2e^3}$; **52.** $\frac{\ln\frac{5}{3}}{\ln\frac{5}{2}\ln\frac{3}{2}}$; **53.** $\frac{1}{4}\ln^4 2 + \ln 2$; **54.** $\frac{\frac{15}{16}\ln\frac{4}{3} + \frac{175}{256}\ln 2}{\ln\frac{1}{2}\ln\frac{3}{4}}$; **55.** $\frac{1}{2}\operatorname{senh} 2 - 1$; **56.** $\frac{4}{3}$; **57.** $\frac{32}{3}$; **58.** $\frac{16}{3}$; **59.** $\frac{64}{3}$; **60.** 36; **61.** $\frac{4}{3}$; **62.** $\frac{32}{3}$; **63.** $\frac{4}{3}$; **64.** $\frac{125}{3}$; **65.** $\frac{125}{3}$; **66.** 32; **67.** $\frac{343}{2}$; **68.** $\frac{1715}{6}$; **69.** $\frac{9}{2}$; **70.** $\frac{343}{6}$; **71.** $\frac{9}{2}$; **72.** $\frac{32}{27}$; **73.** $\frac{1}{24}$; **74.** $\frac{4913}{216}$; **75.** $\frac{1}{24}$; **76.** $\frac{13}{6}, \frac{7}{3}, \frac{13}{6}$; **77.** $\frac{11}{3}, \frac{5}{3}, \frac{11}{3}$; **78.** $\frac{131}{3}, \frac{27}{2}, \frac{131}{3}$; **79.** $\frac{73}{48}, \frac{45}{8}, \frac{73}{48}$; **80.** $\frac{207}{2}, 18, \frac{207}{2}$; **81.** $\frac{541}{162}, 39, \frac{541}{162}$; **82.** $\frac{37}{6}, \frac{44}{3}, \frac{37}{6}$; **83.** $\frac{249}{16}, \frac{725}{24}, \frac{249}{16}$; **84.** $\frac{73}{6}, 45, \frac{73}{6}$; **85.** $\frac{47}{3}, 54, \frac{47}{3}$; **86.** $\frac{2053}{1296}, \frac{75}{2}, \frac{2053}{1296}$; **87.** $\frac{1625}{48}, \frac{875}{24}, \frac{1625}{48}$; **88.** $\frac{249}{250}, \frac{29}{15}, \frac{249}{250}$; **89.** $\frac{69}{2}, \frac{68}{3}, \frac{69}{2}$; **90.** $\frac{2191}{48}, \frac{74}{3}, \frac{2191}{48}$; **91.** $\frac{27}{128}$; **92.** $\frac{9}{25}$; **93.** $\frac{9}{8}$; **94.** $\frac{1}{6}$; **95.** $\frac{121}{36}$; **96.** $\frac{2}{9}$; **97.** $\frac{16}{3}$; **98.** $\frac{125}{12}$; **99.** $\frac{64}{9}$; **100.** $\frac{343}{12}$; **101.** $\ln 3$; **102.** $\ln 3$; **103.** $\ln 2$; **104.** $\ln 2$; **105.** $\frac{21}{16}$; **106.** $2\pi - \frac{4}{3}$; **107.** $160 \arctan 2 - \frac{8}{3}$; **108.** $\frac{2a^3}{3}$; **109.** $\frac{128}{3}$; **110.** $\frac{1}{12}$.

EJERCICIOS 16.2

1. abh; **2.** $\pi R^2 H$; **5.** $125\ \text{m}^3$; **6.** $\frac{2}{3}HR^2$; **7.** $\frac{2}{3}abH$; **8.** $\frac{16}{3}R^3$.

EJERCICIOS 16.3

1. $\frac{27}{2}\pi$; **2.** $\pi(e-2)$; **3.** $\frac{1}{2}\pi(e^2-4e+5)$; **4.** $\frac{28}{15}\pi$; **5.** $\frac{4}{3}\pi$; **6.** $\frac{1662}{35}\pi$; **7.** $\frac{3}{8}\pi^2$; **8.** $\frac{1}{4}\pi(4-\pi)$; **9.** $\frac{1}{2}\pi$; **10.** $\frac{16}{63}\pi$; **11.** $\frac{1}{4}\pi e^2(5e^2-1)$; **12.** $\frac{1}{128}\pi e^4(331e^4-15)$; **13.** $\pi(9e-24)$; **14.** $\frac{1}{16}\pi\left(e^2-\frac{5}{e^2}-\frac{8}{3}\right)$; **15.** $\frac{1}{16}\pi\left(e^2-\frac{5}{e^2}-\frac{8}{3}\right)$; **16.** $\frac{65}{3}\pi\ \text{m}^3$.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 16 (TIPO A)

1. $e^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{e^{\frac{3}{2}}}-2$; **2.** 36; **3.** $\frac{1}{48}$; **4.** $\frac{32}{3}$; **5.** 32; **6.** $\frac{1}{2}$; **7.** $\frac{4}{3}$; **8.** $\frac{16}{15}\pi$; **9.** $\frac{9}{70}\pi$; **10.** $\frac{\sqrt{e}-1}{4\sqrt{e}}$.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 16 (TIPO B)

1. 10; **2.** $\frac{32}{3}$; **3.** $\frac{27}{4}$; **4.** $\frac{1}{4}$; **5.** $\frac{1}{12}\pi$; **6.** $\frac{3}{5}$; **7.** $\frac{20}{3}$; **8.** $\frac{81}{10}\pi$; **9.** π; **10.** $\frac{27}{8}\pi^2$.

RESPUESTAS AL CAPÍTULO 17

EJERCICIOS 17.1

1. $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c$; **2.** $x-\arctan x+c$; **3.** $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c$; **4.** $\frac{1}{4}\arctan\frac{x}{2}-\frac{x}{2(x^2+4)}+c$; **5.** $27\ln\left|\frac{\sqrt{9+x^2}-3}{x}\right|-\frac{1}{3}(x^2+36)\sqrt{9+x^2}+c$; **6.** $\frac{(x^2-32)\sqrt{16+x^2}}{2x}+24\ln\left|x+\sqrt{16+x^2}\right|+c$; **7.** $-\frac{1}{3}x(2+x^2)\sqrt{1-x^2}+c$; **8.** $-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\ln|1-x^2|+c$; **9.** $\frac{5}{6}\ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right|+c$; **10.** $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}-\operatorname{arcsen}\frac{x}{2}+c$; **11.** $-\frac{(x^2+8)\sqrt{4-x^2}}{2x}-6\operatorname{arcsen}\frac{x}{2}+c$; **12.** $\frac{1}{3}(16-x^2)\sqrt{4-x^2}+8\ln\left|\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}\right|+c$; **13.** $6\operatorname{arcsen}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}x(10-x^2)\sqrt{4-x^2}+c$; **14.** $\frac{1}{4}x(x^2-10)\sqrt{x^2-4}+6\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|+c$; **15.** $\sqrt{x^2-9}-3\arccos\frac{3}{x}+c$; **16.** $\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{7}x}{7}\right)+c$; **17.** $\frac{1}{2}x\sqrt{25-x^2}-\frac{19}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{25}x}{25}\right)+c$; **18.** $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-25}+\frac{25}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-25}\right|+c$; **19.** $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+25}-\frac{25}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+25}\right|+c$; **20.** $\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+c$.

EJERCICIOS 17.2

1. $\frac{1}{2}x^2\ln|2x|-\frac{1}{4}x^2+c$; **2.** $x\ln^2|4x|-2x\ln|4x|+2x+c$; **3.** $-\frac{1}{x}\ln^2|x|-\frac{2}{x}\ln|x|-\frac{2}{x}+c$; **4.** $\frac{1}{5}x^5\ln|2x|-\frac{1}{25}x^5+c$; **5.** $\frac{1}{5}x(\operatorname{sen}(2\ln|x|)-2\cos(2\ln|x|))+c$; **6.** $\frac{1}{10}e^{-2x}(2\operatorname{sen}4x-\cos 4x)+c$; **7.** $\frac{1}{10}e^x(\operatorname{sen}3x-3\cos 3x)+c$; **8.** $\frac{1}{16}x\sqrt{1-16x^2}+\frac{1}{64}(32x^2-1)\operatorname{arcsen}4x+c$; **9.** $\frac{1}{2}x^2\arctan x+\frac{1}{2}\arctan x-\frac{1}{2}x+c$; **10.** $\left(\frac{3}{2}x^2+x+\frac{3}{8}\right)\arctan 2x-\frac{3}{4}x-\frac{1}{8}\ln(4x^2+1)+c$; **11.** $\left(x+\frac{3}{2}\right)\ln|2x+3|-x+c$; **12.** $\frac{1}{16}(4x-1)e^{4x}+c$; **13.** $-e^{-x}(3x+5)+c$; **14.** $e^x(x^2+3x-4)+c$;

15. $\frac{1}{9}\operatorname{sen}3x-\frac{1}{3}x\cos 3x+c$; **16.** $\frac{1}{32}\left(8x^2-1\right)\operatorname{sen}4x+\frac{1}{8}x\cos 4x+c$;
17. $(5x-2)\cosh x-5\operatorname{senh}x+c$; **18.** $\frac{1}{2}(3x+1)\operatorname{sen}2x+\frac{3}{4}\cos 2x+c$;
19. $\frac{1}{3}(x+3)\operatorname{senh}3x-\frac{1}{9}\cosh 3x+c$; **20.** $(2x+1)\operatorname{sen}x-\left(x^2+x-1\right)\cos x+c$;
21. $\frac{1}{3}x^2\operatorname{arcsen}x+\frac{1}{9}\left(x^2+2\right)\sqrt{1-x^2}+c$; **22.** $x\operatorname{arcsen}^2x+2\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen}x-2x+c$;
23. $\frac{1}{36}\operatorname{sen}^2 3x+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{12}x\operatorname{sen}6x+c$; **24.** $x\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|-\sqrt{1+x^2}+c$;
25. $\frac{1}{2}e^{\arctan x}\left(\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}\right)+c$; **26.** $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\operatorname{sen}bx-b\cos bx)+c$;
27. $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\operatorname{sen}bx)+c$; **28.** $\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\left(ax+b-\frac{a}{\alpha}\right)+c$;
29. $\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\left(ax^2+\left(b-\frac{2a}{\alpha}\right)x+\left(c-\frac{b}{\alpha}+\frac{2a}{\alpha^2}\right)\right)+c$;
30. $x\left(\frac{a}{2}x+b\right)\ln|\alpha x|-\alpha x\left(\frac{a}{4}x+b\right)+c$;
31. $x\left(\frac{a}{3}x^2+\frac{b}{2}x+c\right)\ln|\alpha x|-\alpha x\left(\frac{a}{9}x^2+\frac{b}{4}x+c\right)+k$;
32. $\frac{a}{\alpha^2}\operatorname{sen}\alpha x-\frac{1}{\alpha}(ax+b)\cos\alpha x+c$; **33.** $\frac{1}{\alpha}(ax+b)\operatorname{sen}\alpha x+\frac{a}{\alpha^2}\cos\alpha x+c$;
34. $\frac{1}{\alpha^2}(2ax+b)\operatorname{sen}\alpha x-\frac{1}{\alpha}\left(ax^2+bx+c-\frac{2a}{\alpha^2}\right)\cos\alpha x+k$;
35. $\frac{1}{\alpha^2}(2ax+b)\cos\alpha x+\frac{1}{\alpha}\left(ax^2+bx+c-\frac{2a}{\alpha^3}\right)\operatorname{sen}\alpha x+k$;
36. $\frac{1}{2}e^x\left((x-1)(\operatorname{sen}x-\cos x)+\operatorname{sen}x\right)+c$;
37. $\frac{1}{2}e^x\left((x-1)(\operatorname{sen}x+\cos x)+\cos x\right)+c$; **38.** $\tan x\sec^3x-\frac{3}{2}\tan^2x+c$;
39. $\int\sec x\,dx=\ln|\sec x+\tan x|+c,\quad \int\sec^2x\,dx=\tan x+c,$
$\int\sec^3x\,dx=\frac{1}{2}\sec x\tan x+\frac{1}{2}\ln|\sec x+\tan x|+c,$
$\int\sec^4x\,dx=\tan x\sec^2x-\frac{2}{3}\tan^3x+c,\ \int\sec^5x\,dx=\tan x\sec^3x-\frac{3}{2}\tan^2x+c$;
40. $\frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+c$;
41. $\frac{1}{8}x^2\left(2x^2+5\right)\sqrt{1+x^2}+\frac{3}{8}\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+c$;
42. $\frac{1}{8}x\left(2x^2+1\right)\sqrt{1+x^2}-\frac{1}{8}\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+c$; **43.** Baja constantemente de grado si se toma $u=\frac{1}{x}$ o se llega a una integral indefinida; **44.** $\frac{e^x}{x}+c$; **45.** $\left(\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}\right)e^x+c$;
46. $\sqrt{1+x^2}e^x\operatorname{sen}x+c$; **47.** $xe^x\ln(1+x^2)+c$; **48.** $x\sqrt{1+x+x^2}e^x\ln x+c$;
49. $(x^2+2)\sqrt{x^2+3}e^x\operatorname{sen}x+c$; **50.** $e^x\arctan x\ln(1+x^2)+c$.

EJERCICIOS 17.3

1. $xe^x(3x+1)+c$; **2.** $-e^{-x}\left(x^2-3x-2\right)+c$; **3.** $\frac{1}{8}e^{2x}\left(4x^3-6x^2+6x-3\right)+c$;
4. $-e^{-x}\left(x^2+5x+9\right)+c$; **5.** $-\frac{1}{4}e^{-2x}\left(2x^2+6x+5\right)+c$;
6. $-\frac{1}{4}e^{-2x}\left(2x^4+4x^3+6x^2+6x+3\right)+c$; **7.** $e^{x-1}\left(x^3-3x^2+6x-6\right)+c$;
8. $e^{x-1}\left(x^3-6x^2+15x-16\right)+c$; **9.** $\frac{1}{8}e^{2x}\left(4x^3+6x^2+6x+1\right)+c$;
10. $-\frac{1}{4}e^{-2x}\left(2x^2+2x+1\right)-2e^{-x}(x+1)+x+c$;
11. $\frac{1}{4}e^{2x}(2x-1)+2e^x\left(x^2-2x-2\right)+\frac{1}{4}x^4+c$; **12.** $e^x\left(x^2-2x+2\right)+2x^2-4e^{-x}+c$;
13. $\frac{1}{9}e^{3x}(3x-1)+\frac{1}{2}e^{2x}\left(2x^2-2x+1\right)+e^x\left(x^3-3x^2+6x-6\right)+c$;
14. $-e^{-x}\left(x^6-6x^5+30x^4-120x^3+360x^2-720x+720\right)+$
$+12e^x\left(x^2-2x+2\right)+4e^{2x}+\frac{6}{5}x^5+c$;
15. $\frac{1}{16}\operatorname{sen}4x-\frac{1}{4}x\cos 4x+c$; **16.** $\frac{1}{3}(4x+3)\operatorname{sen}3x+\frac{4}{9}\cos 3x+c$;
17. $\frac{1}{108}\left(18x^2-1\right)\operatorname{sen}6x+\frac{1}{18}\cos 6x+c$; **18.** $\left(x^2+2x-1\right)\operatorname{sen}x+2(x+1)\cos x+c$;
19. $3\left(x^2+4x+2\right)\operatorname{sen}x-\left(x^3+6x^2+6x-4\right)\cos x+c$;
20. $\left(x^2+2x-2\right)\operatorname{sen}x-\left(x^2-2x-2\right)\cos x+c$; **21.** $\left(x^2+2\right)\cosh x-2x\operatorname{senh}x+c$;
22. $\left(3x^2+10x+13\right)\operatorname{sen}x-2x(x-1)\cos x+c$;
23. $9\left(3x^2-12x-5\right)\operatorname{sen}x+\left(9x^2+48x-35\right)\cos x+c$;

24. $\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}(2x^2-1)\operatorname{sen}2x + \frac{1}{2}x\operatorname{sen}^2 x + c$;
25. $\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}(2x^2-1)\operatorname{sen}2x - \frac{1}{2}x\operatorname{sen}^2 x + c$;
26. $\frac{1}{8}x(x^3+4x+4) - \frac{1}{72}(6x^3+11x+6)\operatorname{sen}6x - \frac{1}{432}(18x^2+11)\cos 6x + c$;
27. $-\frac{1}{12}x(2x^2+9x+15) + \frac{3}{4}(2x+3)\operatorname{sen}^2 x - \frac{3}{8}(2x^2+6x+1)\operatorname{sen}2x + c$;
28. $\frac{1}{3}x(x^2+6x+12) - \frac{1}{4}(2x^2+8x+7)\cos 2x + \frac{1}{2}(x+2)\operatorname{sen}2x + c$;
29. $2(x^2-8)\cosh x + 4(x^2+3x-2)\operatorname{senh}x + c$;
30. $3(3x^2-5)\operatorname{sen}x - 3(x^3-5x+1)\cos x - 4(3x^2+7)\operatorname{senh}x +$
$+4(x^3+7x+1)\cosh x + c$;
31. $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+c$; **32.** $2(\operatorname{sen}\sqrt{x} - \sqrt{x}\cos\sqrt{x}) + c$;
33. $2(\cos\sqrt{x+3} + \sqrt{x+3}\operatorname{sen}\sqrt{x+3}) + c$;
34. $\operatorname{senh}\sqrt{x+2} - (6\sqrt{x+2}-4)\cosh\sqrt{x+2} + c$;
35. $3e^{\sqrt[3]{x}}\left(x^{\frac{2}{3}} - 2\sqrt[3]{x} + 2\right) + c$; **36.** $2e^{\sqrt{x+1}}\left(3(x+1)^{\frac{3}{2}} + 17\sqrt{x+1} - 9x - 26\right) + c$;
37. $\frac{e^x}{x+1}$; **38.** $3\left(x^{\frac{2}{3}}+2\right)\cosh\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[3]{x}\operatorname{senh}\sqrt[3]{x} + c$;
39. $\frac{1}{2}(x^2+6x+5)\arctan\sqrt{x} - \frac{1}{6}\sqrt{x}(x+15) + c$;
40. $2(x+3)\cosh\sqrt{x+1} - 4\sqrt{x+1}\operatorname{senh}\sqrt{x+1} + c$.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 17 (TIPO A)

1. $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \operatorname{arcsen}x + c$; **2.** $-\frac{\sqrt{16+x^2}}{16x} + c$; **3.** $-\frac{3x}{16\sqrt{25x^2-16}} + c$;
4. $\frac{x}{8(4-25x^2)} + \frac{1}{160}\ln\left|\frac{5x+2}{5x-2}\right| + c$; **5.** $\frac{1}{5}x^5\ln|x| - \frac{1}{25}x^5 + c$;
6. $x\ln(x^2+4) + 4\arctan\left(\frac{1}{2}x\right) - 2x + c$; **7.** $\frac{x}{2}(\cos(\ln|x|) + \operatorname{sen}(\ln|x|)) + c$;
8. $\frac{1}{13}e^{2x}(2\cos 3x + 3\operatorname{sen}3x) + c$;
9. $\frac{1}{24}x(3x^3+24x^2+71x+92) + \frac{1}{216}(18x^2+72x+71)\operatorname{sen}^2 3x -$
$-\frac{1}{72}(6x^3+36x^2+71x+46)\operatorname{sen}6x + c$;
10. $(x^3+6x)\cosh x - 3(x^2+2)\operatorname{senh}x + c$.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 17 (TIPO B)

1. $\ln\left|\sqrt{9+x^2}+x\right| - \frac{\sqrt{9+x^2}}{x} + c$; **2.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{16+x^2}-4}{x}\right| - \frac{\sqrt{16+x^2}}{8x} + c$;
3. $\frac{1}{125}\ln\left|\sqrt{25x^2-16}+5x\right| - \frac{x}{25\sqrt{25x^2-16}} + c$; **4.** $\frac{1}{160}\ln\left|\frac{5x+2}{5x-2}\right| + \frac{25x+4}{200(4-25x^2)} + c$;
5. $\frac{1}{6}x^3\ln|x| - \frac{1}{18}x^3 + c$; **6.** $\frac{1}{3}x^3\ln(4+x^2) - \frac{16}{3}\arctan\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{2}{9}x^3 + \frac{8}{3}x + c$;
7. $\frac{1}{5}(2x + x\cos^2(\ln|x|+3) + x\operatorname{sen}(2\ln|x|+6)) + c$;
8. $e^x(\cos x + \operatorname{sen}x) + \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}2x + \frac{1}{2}x + c$;
9. $\frac{1}{36}x(9x^4+66x+180x+217) + \frac{1}{18}(6x^3+36x^2+71x+46)\operatorname{sen}^2 3x +$
$+\frac{1}{216}(18x^2+72x+71)\operatorname{sen}6x + c$;
10. $\frac{1}{2}e^x(x^4-x^3+x^2+17x-15) + \frac{1}{2}e^{-x}(x^4+7x^3+19x^2+57x+59) + c$.

RESPUESTAS AL CAPÍTULO 18

EJERCICIOS 18.1

2. No; **3.** Sí; **4.** Propia, simple, $f_I(x) = \frac{A}{x-a}$, $A = 2, a = 0$; **5.** Impropia, $\frac{1}{2}x$; **6.** Propia, no es simple, $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$; **7.** Propia, simple, $f_{III}(x) = \frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $A = 1, B = 0, p = -3, q = 5, p^2 - 4q = -11 < 0$; **8.** Impropia, $x^2 + x + 2 + \frac{3}{x-1}$; **9.** Propia, no es simple, $x^5 + x^3 + x = x(x^4 + x^2 + 1)$; **10.** Impropia, $1 + \frac{4x+3}{x^2-x-1}$; **11.** Propia, simple, $f_{III}(x) = \frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $A = 3, B = 1, p = 1, q = 2, p^2 - 4q = -7 < 0$; **12.** Propia, no es simple, $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$; **13.** Propia, simple, $f_{II}(x) = \frac{A}{(x-a)^k}$, $A = 5, a = 9, k = 2$;

14. Propia, no es simple, $(x^2-1)^3 = (x+1)^3(x-1)^3$; **15.** Propia, simple, $f_{IV}(x) = \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, $A = 3, B = 2, p = 3, q = 8, k = 4, p^2 - 4q = -23 < 0$; **16.** Propia, simple, $f_{IV}(x) = \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, $A = 2, B = 5, p = 0, q = 1, k = 3, p^2 - 4q = -4 < 0$;

17. Propia, no es simple; **18.** Propia, no es simple; **19.** Impropia, $1 + \frac{2x^2+x+1}{x^3+1}$;

20. Impropia, $x^2 - x + 1 + \frac{2x-1}{x^2+x+2}$.

EJERCICIOS 18.2

1. $5\ln|x+4| + c$; **2.** $\frac{3}{4}\ln|4x-1| + c$; **3.** $\frac{1}{4}\ln|20x-3| + c$; **4.** $-\frac{1}{2(x-1)^2} + c$;

5. $-\frac{4}{9(3x+2)^3} + c$; **6.** $-\frac{3}{8(8x-1)} + c$; **7.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$;

8. $\frac{1}{2}\ln(x^2+4) + \arctan\left(\frac{1}{2}x\right) + c$; **9.** $\frac{1}{2}\ln(5x^2+4) + \frac{3\sqrt{35}}{35}\arctan\left(\frac{\sqrt{35}}{7}x\right) + c$;

10. $\frac{2\sqrt{15}}{15}\arctan\left(\frac{\sqrt{15}}{15}(2x+1)\right) + c$; **11.** $\ln|x^2+2x+2| + 5\arctan(x+1) + c$;

12. $\frac{5}{16}\ln|4x^2+x+2| + \frac{67\sqrt{31}}{248}\arctan\left(\frac{\sqrt{31}}{31}(8x+1)\right) + c$;

13. $\frac{3}{4}\ln|2x^2+4x+9| - \frac{2\sqrt{14}}{7}\arctan\left(\frac{\sqrt{14}}{7}(x+1)\right) + c$; **14.** $\ln|3x^2+7x+10| + c$;

15. $3\arctan(x+2) + c$; **16.** $2\ln|x^2+3x+8| - \frac{12\sqrt{23}}{23}\arctan\left(\frac{\sqrt{23}}{23}(2x+3)\right) + c$;

17. $\frac{1}{2}\ln|x^2+x+4| + \frac{\sqrt{15}}{15}\arctan\left(\frac{\sqrt{15}}{15}(2x+1)\right) + c$; **18.** $\frac{1}{16}\arctan\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{x-8}{8(4+x^2)} + c$;

19. $\frac{3}{2}\arctan(x+1) + \frac{3x+2}{2(x^2+2x+2)} + c$; **20.** $\frac{3}{8}\arctan x + \frac{3x^3+5x-2}{8(x^2+1)^2} + c$;

22. $\frac{1}{648}\arctan\left(\frac{1}{3}x\right) + \frac{x(x^2+15)}{216(x^2+9)^2} + c$.

EJERCICIOS 18.3

1. $f(x) = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$; **2.** $f(x) = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$; **3.** $f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$;

4. $f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-2} + \frac{E}{(x-2)^2} + \frac{F}{(x-2)^3}$;

5. $f(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}$; **6.** $f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+x+1)^2}$;

7. $f(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+1} + \frac{Gx+H}{(x^2+1)^2}$;

8. $f(x) = \frac{Ax+B}{x^2+x+2} + \frac{Cx+D}{(x^2+x+2)^2}$; **9.** $f(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{D}{(x+1)^4} + \frac{E}{(x+1)^5} + \frac{F}{(x+1)^6}$;

10. $f(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+x+1} + \frac{Gx+H}{(x^2+x+1)^2} + \frac{Ix+J}{x^2-x+1} + \frac{Kx+L}{(x^2-x+1)^2}$;

11. $\ln|x-2| + 3\ln|x-4| + c$; **12.** $2\ln|x+2| + \frac{3}{2}\ln|2x+1| + c$;

13. $6\ln|x| + 3\ln|x-2| + 2\ln|x-3| + c$; **14.** $3\ln|x| - \frac{1}{x-1} + c$;
15. $5\ln|x| + 2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + c$; **16.** $\frac{3-5x}{x^2-1} + c$; **17.** $\arctan x + \ln|x+5| + c$;
18. $\ln|x-1| + \frac{1-4x}{2(x-1)^2} + c$; **19.** $\frac{2}{3}\ln|3x+1| - \frac{18x+11}{6(3x+1)^2} + c$;
20. $3\arctan x + 2\ln|x-1| + c$; **21.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\arctan x + c$; **22.** $\arctan x - \frac{1}{2(x^2+1)} + c$;
23. $3\ln|x^2-4| + \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + \frac{3(2-3x)}{x^2-4} + c$;
24. $\ln(x^2+4)\ln|x-2| + 3\ln|x-3| + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}x\right) + c$;
25. $\frac{3}{2}\ln|x^2+2x+2| + 2\ln|x-1| + 4\arctan(x+1) - \frac{3}{x-1} + c$;
26. $\ln(x^2+3) + \frac{3}{2}\ln(x^2+5) + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right) + \frac{4\sqrt{5}}{5}\arctan\left(\frac{\sqrt{5}}{5}x\right) + c$;
27. $\ln|x^4 + 9x^3 + 31x^2 + 44x + 30| + c$;
28. $\ln|x+3| + \frac{3}{2}\ln(x^2+3) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right) - \frac{2}{x+3} + c$;
29. $\frac{1}{2}\ln(x^2+4) + \arctan x + c$;
30. $\ln|x-1| + \ln|x^2+x+1| + \frac{4\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1)\right) + c$;
31. $\ln|x-1| + \frac{1}{3}\ln(x^2+3) + \frac{\sqrt{3}}{9}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right) - \frac{2}{x-1} + c$;
32. $\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+3| + \ln|x+2| - \frac{4x+11}{2(x+2)^2} + c$;
33. $\ln|x^2+2x+2| + \frac{3}{2}\arctan(x+1) + \frac{x-3}{2(x^2+2x+2)} + c$;
34. $\frac{3}{2}\ln(x^2+1) + 3\arctan x + \frac{2x}{(x^2+1)} + c$; **35.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{2(x^2+4)} + c$;
36. $\ln|x| - \frac{1}{4}\ln|x^4+x^2+1| + \frac{5\sqrt{3}}{18}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x^2+1)\right) + \frac{1-x^2}{6(x^4+x^2+1)} + c$;
37. $\ln|x| - \frac{1}{16}\ln(x^4+1) - \frac{3}{8}\ln(x^2+1) - \frac{3}{8}\arctan(x^2) + \frac{1-x^2}{8(x^4+1)(x^2+1)} + c$;
38. $\frac{3}{4}\ln|x| - \frac{3}{32}\ln(x^8+2x^4+2) - \frac{3}{8}\arctan(x^4+1) - \frac{3x^4}{16(x^8+2x^4+2)} + c$;
39. $\frac{1}{4}\ln|x^4-1| - \ln|x| + c$;
40. $\frac{1}{12}\ln(x^6+1) - \ln|x| + \frac{1}{6}\ln|x^3-1| - \frac{1}{6}\arctan(x^3) + c$.

EJERCICIOS 18.4

1. $x - \ln|x| + c$; **2.** $x + \ln|x-1| + c$; **3.** $x - 2\ln|x| - \frac{1}{x} + c$; **4.** $2\ln|x-1| + \frac{x(x-2)}{x-1} + c$;
5. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{12}{11}x^{\frac{11}{6}} + \frac{6}{13}x^{\frac{13}{6}} + c$; **6.** $\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + 2\arctan x + \frac{3}{4}\arctan^4 x + c$;
7. $\ln|x| + \frac{3}{2}\ln^2|x| + c$; **8.** $\frac{1}{12}e^{3x} + \frac{3}{4}e^x - \frac{1}{8}e^{-2x} + c$; **9.** $\frac{1}{6}\ln^2|2x| + \frac{1}{9}\ln^3|x| + \frac{1}{3}\ln 2\ln|x| + c$;
10. $\frac{1}{3}\cosh(3x+8) + c$; **11.** $\frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{2}x + c$; **12.** $\frac{1}{8}\operatorname{sen}(4e^{2x}+5) + c$; **13.** $\ln|\sec(\ln|x|)| + c$;
14. $\frac{x^4-6x^2-3}{12x} + c$; **15.** $x + \frac{1}{3}\operatorname{sen}^2 3x + c$; **16.** $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{3\ln\left(\frac{3}{2}\right)} + \frac{2}{15}x^{\frac{5}{2}} + c$; **17.** $\ln|\csc e^x - \cot e^x| + c$;
18. $\frac{1}{16}\tan(8x^2+1) + c$; **19.** $\frac{1}{18}(1+4x^3)^{\frac{3}{2}} + c$; **20.** $-\cos^2\sqrt{x} + c$;
21. $\frac{2^x}{\ln 2}\left(x^2 - \frac{2x}{\ln 2} + \frac{2}{\ln^2 2}\right) + c$; **22.** $-\ln|\cos x + \operatorname{sen} x + 8| + c$;
23. $\frac{1}{9}\tan(3x+2)\sec^2(3x+2) + \frac{2}{9}\tan(3x+2) + c$;
24. $2\tan x - \frac{5}{4}\sec^4 x + \frac{5}{2}\tan^2 x\sec^2 x + c$;
25. $\frac{1}{2}\ln^2|\ln|x|| + c$; **26.** $\ln|x|\ln|\ln|x|| - \ln|x| + c$;
27. $\ln|\sec(\ln|x|) + \tan(\ln|x|)| + c$; **28.** $\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arcsen}\left(\frac{2\sqrt{34}}{17}x\right) + c$; **29.** $-\frac{1}{2(x^2+100)} + c$;
30. $\frac{1}{20}\arctan\left(\frac{1}{10}x\right) - \frac{x}{2(x^2+100)} + c$; **31.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+100) + \frac{50}{x^2+100} + c$;
32. $\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}\operatorname{sen}(2x^3) + c$; **33.** $\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{8}x^2\operatorname{sen}(2x^2) - \frac{1}{16}\cos(2x^2) + c$;

34. $\frac{8(x-3)}{(4-x)^2} - \ln|4-x| + c$; **35.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1)\right) + c$;
36. $\frac{7}{6}\ln|3x^2+2x+5| + \frac{10\sqrt{14}}{21}\arctan\left(\frac{\sqrt{14}}{14}(3x+1)\right) + c$; **37.** $\frac{1}{2}\ln|x(x+2)| + c$;
38. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right| - \frac{1}{2x} + c$; **39.** $-e^{\frac{1}{x}} + c$; **40.** $\frac{1}{72}(\operatorname{sen}6x - 6x\cos 6x) + c$;
41. $\frac{1}{6}x^3 + x - \frac{1}{4}x\cos 2x - 2x\cos x - \frac{1}{8}(2x^2-1) + 2\operatorname{sen}x + c$; **42.** $x^2e^{2x-1} + c$;
43. $x^2\ln|x| + c$; **44.** $3\ln|3x-2| + \ln|2x-1| + c$; **45.** $\ln|x+2| + 3\arctan x + c$;
46. $e^x\ln|x| + c$; **47.** $x\arctan\sqrt{x-1} - \sqrt{x-1} + c$;
48. $(x-3)\sqrt{\frac{x-2}{x-3}} - \frac{1}{2}\ln\left|x-3\left(\sqrt{\frac{x-2}{x-3}}-1\right)\right| + c$;
49. $\frac{(3e)^x}{1+\ln^2(3e)}(\ln(3e)\operatorname{sen}x - \cos x) + c$; **50.** $\frac{e^{2x}}{x^3} + c$; **51.** $\frac{x^2}{\ln|x|} + c$; **52.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| + c$;
53. $\frac{e^x}{\ln|x|} + c$; **54.** $\frac{1}{4}\ln|x^4-1| - \ln|x| + c$; **55.** $x\ln\left|x+\sqrt{4+x^2}\right| - \sqrt{4+x^2} + c$;
56. $\frac{1}{32}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| - \frac{1}{16}\arctan\left(\frac{1}{2}x\right) + c$;
57. $\frac{1}{2}(x^2+8)\ln\left|1+\sqrt{9+x^2}\right| + \frac{1}{4}\sqrt{9+x^2}\left(2-\sqrt{9+x^2}\right) + c$; **58.** $\frac{x^2}{x^6+1} + c$;
59. $x^2 + 2\arctan x + c$; **60.** $-\frac{x+2}{x^2+x+1} + c$; **61.** $-\frac{2x+3}{x^2+2x+2} + c$; **62.** $\ln(x^4+3x^2+2) + c$;
63. $\frac{2\sqrt{7}}{7}\left(\arctan\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x-1}\right) - \arctan\left(\frac{\sqrt{7}\cos x}{\operatorname{sen}x-1}\right) + \frac{1}{2}x\right) + c$;
64. $\operatorname{sen}^3x - \cos^3x + \frac{1}{3}(2+\cos^2x)\operatorname{sen}x - \frac{1}{3}(2+\operatorname{sen}^2x)\cos x + c$;
65. $\frac{\sqrt{7}}{14}\arctan\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\tan x\right) + c$; **66.** $\frac{1}{4}x - \frac{5}{6}\arctan\left(\frac{1}{6}\left(5\tan\left(\frac{1}{2}x\right)+4\right)\right) + c$;
67. $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{12}\right)x - \frac{1}{24}\arctan\left(\frac{1}{3}\tan x\right) + c$; **68.** $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{3-2\cos x}{3+2\cos x}\right| + c$;
69. $x - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\tan x\right) + c$; **70.** $\frac{3}{73}x - \frac{8}{73}\ln|3\operatorname{sen}x + 8\cos x| + c$;
71. $x - 1 - 10\sqrt{x-1} + 50\ln\left|\sqrt{x-1}+5\right| + c$; **72.** $\frac{2}{3}\ln\left|(x-1)^{\frac{3}{2}}+5\right| + c$;
73. $-\frac{1}{3}\ln(e^{3x}+1) + c$;
74. $\frac{1}{7}\ln|e^x-1| - \frac{1}{14}\ln(e^{2x}+e^x+5) + \frac{11\sqrt{19}}{133}\arctan\left(\frac{\sqrt{19}}{19}(2e^x+1)\right) + c$;
75. $\frac{1}{2}\sec x\tan x - \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + c$; **76.** $-\operatorname{sen}x - \csc x + c$;
77. $\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3x - \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5x + c$; **78.** $\frac{1}{24}\operatorname{sen}^4x(3\operatorname{sen}^4x - 8\operatorname{sen}^2x + 6) + c$;
79. $\frac{1}{4}\sec^2x(2\tan^2x - \sec^2x) + c$; **80.** $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2x - \frac{1}{2}\csc^2x - 2\ln|\operatorname{sen}x| + c$;
81. $\frac{1}{4}\sec^2x(3\sec^2x + 2\sec^2x\csc^2x + 6) + 3\ln|\tan x| + c$;
82. $\frac{1}{2}\cot x(\cos^2x - 3) - \frac{3}{2}x + c$; **83.** $\frac{1}{3}\tan^3x + c$;
84. $\frac{4}{3}\tan x(\sec^2x + 2) - \sec^3x\csc x + c$; **85.** $-\frac{1}{4}\operatorname{sen}2x - \cot x - \frac{3}{2}x + c$;
86. $\frac{1}{125}e^{2x}(2(25x^2-15x+2)\operatorname{sen}x - (25x^2-40x+22)\cos x) + c$;
87. $\frac{1}{250}e^{5x}(25x^2-10x+2) - \frac{1}{2}e^x(x^2-2x+2) + c$; **88.** $\ln\left|\frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)(x-5)}\right| + c$;
89. $x^2e^x\ln|x| + c$; **90.** $\frac{e^x}{\sqrt{x^2+1}} + c$; **91.** $\frac{3\sqrt{5}}{10}\ln\left|\frac{\operatorname{sen}x-\sqrt{5}\cos x-\sqrt{5}}{\operatorname{sen}x+\sqrt{5}\cos x+\sqrt{5}}\right| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\operatorname{sen}x+1}{\cos x}\right| + c$;
92. $\frac{\sqrt{33}}{33}\ln\left|\frac{8\tan\left(\frac{1}{2}x\right)+\sqrt{33}-1}{8\tan\left(\frac{1}{2}x\right)-\sqrt{33}-1}\right| + c$;
93. $\frac{3}{13}\ln\left|\frac{5\tan^2\left(\frac{1}{2}x\right)+6\tan\left(\frac{1}{2}x\right)+9}{\tan^2\left(\frac{1}{2}x\right)+1}\right| - \frac{1}{39}\arctan\left(\frac{1}{6}\left(5\tan\left(\frac{1}{2}x\right)+3\right)\right) + \frac{11}{78}x + c$;
94. $x\arcsen x + c$; **95.** $\ln|x-1| + 3\ln|x-2| + 4\arctan(x+1) + c$;
96. $\arctan(x+1) - \frac{3}{2}\ln|x^2-1| - \frac{7}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c$;

97. $4\ln(x^2+2)-2\ln(x^2+1)-\arctan(x^2+1)+c$;
98. $\frac{1}{6}\ln\left|\tan\left(\frac{1}{2}x\right)\right|+\frac{1}{12}\ln\left|\tan^4\left(\frac{1}{2}x\right)-2\tan^2\left(\frac{1}{2}x\right)+3\right|+$
$+\frac{5\sqrt{2}}{12}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\tan^2\left(\frac{1}{2}x\right)-1\right)\right)+c$;
99. $-\frac{x^3+3x^2+4x+3}{(x^2+4)(x^2+1)}+c$; **100.** $\frac{xe^{\operatorname{sen} x}}{\cos x}$; **101.** $y=0$; **102.** $y=x$; **103.** $y=\frac{1}{2}x^2$;
104. $y=\frac{1}{24}x^5$; **105.** $y=\frac{1}{24}x^4$; **106.** $y=\frac{1}{40}x^5+\frac{1}{12}x^4$; **107.** $y=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2$;
108. $y=e^x$; **109.** $y=xe^x-3e^x$; **110.** $y=\frac{1}{2}e^x\operatorname{sen} x$; **111.** $y=-x\operatorname{sen} x-2\cos x$;
112. $y=e^{-x}(x^2+2x+3)$; **113.** $y=(12-x^2)\operatorname{sen} x-6x\cos x$;
114. $y=\frac{1}{4}x^2(2\ln|x|-3)$; **115.** $y=\frac{1}{144}x^4(12\ln|x|-7)$;
116. $y=\frac{1}{2}(x-x\ln(x^2+1)+(x^2-1)\arctan x)$;
117. $y=\frac{1}{24}x(2x^2+5)\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{8}\ln\left|\sqrt{x^2+1}+x\right|$;
118. $y=\frac{1}{2}e^x((1-x)\cos x+\operatorname{sen} x)$; **119.** $y=-\frac{1}{648(3x+2)^2}$;
120. $y=\frac{1}{4}\left(2\ln|1-x|-(x+1)\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)$; **136.** $\frac{16}{35}$; **137.** $\frac{1097987}{5160960}$;
138. $\frac{50249167}{473088}$; **139.** $9e-24$; **140.** $e(6\ln 3-2)-3\ln 3+6$; **141.** $e(184\ln 2+9)$;
142. $\frac{e^2+3}{8}$; **143.** $\frac{6984e^{10}-24}{3125}$; **144.** $\frac{1}{54}(e-30\ln 2+4)$;
145. $\frac{1}{108}(16e^3-27e^2-216e+573)$;
146. $\frac{1}{128}e^4(68\ln(2e+3)+3)+\frac{25}{576}e^3(12\ln(2e+3)-7)-$
$-\frac{1}{256}e^2(372\ln(2e+3)-865)+\frac{1}{256}e(6732\ln(2e+3)-17535)+$
$+\frac{1}{256}(15606\ln 3-4401\ln(2e+3))-\frac{52605}{512}\ln\left|\frac{3}{2e+3}\right|$;
147. $6-2e$; **148.** $\frac{4e^3+2}{27}$; **149.** $\frac{3(3e-8)}{1024}$; **150.** $\frac{2(e^\pi-1)}{5}$; **151.** $\frac{12\left(e^{2\pi}-1\right)}{85}$; **152.** $\frac{192e^{-2\pi}\left(e^{2\pi}-1\right)}{1105}$;
153. $\frac{2}{3}$; **154.** $\frac{3\pi}{32}$; **155.** $\frac{16}{15}$; **156.** $\frac{5\pi}{16}$; **157.** $\frac{1-\ln 2}{2}$; **158.** $\frac{2\ln 2-1}{8}$; **159.** $\frac{\sqrt{2}-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}{2}$;
160. $\frac{\sqrt{6}\left(\sqrt{3}\ln 2+2\left(1-\sqrt{3}\ln\left(\sqrt{3}+1\right)\right)\right)}{8}$; **166.** $y=\sqrt{\frac{ce^{\frac{1}{2}x^2(x^2-2)}}{1-ce^{\frac{1}{2}x^2(x^2-2)}}}$; **167.** $y=ce^{-e^{-x}\left(x^2-2x+2\right)}$;
168. $\csc y-\cot y=ce^{\frac{1}{2}e^x(\cos x+\operatorname{sen} x)}$; **169.** $y=\ln\left|-e^{-x}(x^2+2x+2)+c\right|$;
170. $e^{-y}(y+1)=-\ln|\ln|x||+c$; **171.** $y^2+4\arctan\left(\frac{1}{2}y\right)=\ln(x^2+1)+c$;
172. $2y+7\sqrt{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}y\right)=2x-3\arctan\left(\frac{1}{2}x\right)+c$;
173. $y^2+26\ln|y+2|-4y=\ln(x^2+4)+\arctan\left(\frac{1}{2}x\right)+c$;
174. $\ln(y^2+2)+9\sqrt{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}y\right)=x^2-8x+34\ln|x+4|+c$;
175. $e^{-y^2}(y^2+1)=-4e^{\sqrt{x}}+c$; **176.** $y=ce^{-2x}+\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}$; **177.** $y=ce^{\frac{-4}{3}x}+\frac{1}{7}e^x$;
178. $y=\frac{c}{x^2}+\frac{1}{2x^2}\ln(1+x^2)$; **179.** $y=\frac{c}{x^3}+\frac{1}{4x^3}e^{2x}(2x^2-2x+1)$;
180. $y=ce^{-\frac{3}{2}x^2}+\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{9}$; **181.** $y=ce^{-x^2}+\frac{1}{4}(\cos(x^2)+\operatorname{sen}(x^2))$;
182. $y=ce^x+\frac{1}{15}e^x(3x^2-2)(1+x^2)^{\frac{3}{2}}$;
183. $y=ce^{-8x}+$
$+\frac{1}{274625}(2(16900x^2-4095x+488)\cos x+(4225x^2-2080x+382)\operatorname{sen} x)$;
184. $y=\frac{c-x+\left(x^2+1\right)\arctan x}{2(x^2+1)}$; **185.** $y=\frac{c}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{3x+\left(9+x^2\right)\arctan\left(\frac{1}{3}x\right)}{54(9+x^2)\sqrt{x^2+1}}$; **187.** $-\frac{1}{7}e^{-6x}$;
188. $-\cos x$; **189.** $x\ln|x|$; **190.** xe^{-x}; **191.** $-e^{3x}$; **192.** $\frac{1}{2}e^{4x}$; **193.** $\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x$;
194. $-\frac{1}{7}e^{-7x}$; **195.** $-\frac{1}{2x}$; **196.** $-e^{-4x}$; **197.** x^3; **198.** e^x; **199.** $-\frac{1}{2}e^x$; **200.** x;
201. $-\frac{1}{2}e^{-x}$; **202.** xe^{x^2}; **203.** $\frac{1}{3}x^3e^x$; **204.** $\operatorname{sen} x$; **205.** $x^2\ln|x|$; **207.** x;
208. $-\frac{4x+11}{16}$; **209.** $\frac{1}{4}e^{3x}$; **210.** $\frac{1}{2}x\operatorname{sen} x$; **211.** $\frac{3}{4}e^x(2x-1)$; **212.** $\frac{1}{5}x^2+\frac{12}{25}x+\frac{62}{125}$;

213. $\frac{1}{6}x^3e^{-3x}$; **214.** $\frac{1}{2}x - \frac{2}{5} - \frac{1}{20}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{5}\operatorname{sen}^2 x$; **215.** $\frac{1}{64}x \operatorname{sen} 4x - \frac{1}{16}x^2 \cos 4x$;
216. $\frac{1}{864}\left(72x^2 - 12x + 67\right)$; **217.** $\frac{1}{648}e^{-2x}\left(72x^3 + 126x^2 + 66x - 11\right)$; **218.** $\frac{1}{12}x^4e^{-5x}$;
219. $\frac{1}{8}e^x\left(\cos x + \operatorname{sen} x\right)$; **220.** $\frac{1}{2197}\left(169x^2 + 156x + 46\right)$;
221. $\frac{1}{1105}\left(5\cos 7x - 14\operatorname{sen} 7x\right)$; **222.** $-\frac{\cos 2x}{\cos x}$; **223.** $\frac{1}{x}$;
224. $3\tan x - 2\tan x \operatorname{sen}^2 x - \frac{3}{2}\operatorname{sen} 2x$; **225.** x^6e^{6x}.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 18 (TIPO A)

1. $\frac{1}{2}\ln|x^2 + x + 1| - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1)\right) + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + c$;
2. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right| + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1)\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)\right) + c$;
3. $\frac{x+4}{1-x^2} + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c$; **4.** $x - 4\arctan\left(\frac{1}{4}x\right) + c$; **5.** $-e^{-x} - \arctan e^x + c$;
6. $2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln|\sqrt[4]{x} + 1| + c$;
7. $\ln|x-2| - \frac{1}{6}\ln|x-1| - \frac{3}{2}\ln|x-3| + \frac{2}{3}\ln|x-4| + c$; **8.** $\frac{3x-1}{6(1-x)^3} + c$;
9. $\frac{3x-1}{6(1-x)^3} + c$; **10.** $\ln\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right) - \frac{2x^2+3}{2(x^2+2)(x^2+1)} + c$.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 18 (TIPO B)

1. $-\frac{4x+3}{2(x-2)^2} + c$; **2.** $\frac{1}{2}\ln\left(\cos^2 x + 1\right) - \ln|\cos x| + c$; **3.** $e^x - 2\arctan\left(\frac{1}{2}e^x\right) + c$;
4. $\frac{1}{3}\ln|e^{3x} - 1| - x + c$; **5.** $c\frac{2\left(2\sqrt{x}+1\right)}{3\left(x+\sqrt{x}+1\right)} + \frac{8\sqrt{3}}{9}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\left(2\sqrt{x}+1\right)\right) + c$;
6. $\frac{1}{32}\ln\left|\frac{\ln|x|-2}{\ln|x|+2}\right| - \frac{1}{16}\arctan\left(\frac{1}{2}\ln|x|\right) + c$;
7. $\frac{1}{6}\ln|x| - \frac{1}{12}\ln\left(x^2+3\right) + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right) + c$;
8. $2\sqrt{x+2} - 9\sqrt[3]{x+2} + 54\sqrt[6]{x+2} - 162\ln\left|\sqrt[6]{x+2} + 3\right| + c$;
9. $-\frac{2\cos x+2}{3\cos x+\operatorname{sen} x+3} + c$; **10.** $\frac{\sqrt{2}}{12}\arctan\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\tan x\right) + c$.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Parte del material sobre las notas históricas de los capítulos 1 al 10, así como algunas de las explicaciones teóricas en los temas que en estos capítulos se tratan, aparecen, con algunos cambios de estilo, en el libro *Cálculo Diferencial*, editado por la Universidad Tecnológica de México (Colección Matemáticas UNITEC, 1997). Este libro forma parte de un ambicioso programa educativo de la UNITEC, el cual tiene como uno de sus objetivos principales elaborar material didáctico para sus alumnos. En lo que respecta al contenido matemático de la obra, participé como autor de la mayor parte de ella.

Es muy grande la cantidad de libros de Cálculo que existen en el mercado. En esta sección señalo algunos de los que me parece que pueden complementar el material que este libro ofrece, ya sea porque contienen algunos puntos de vista y ejemplos interesantes y distintos a los aquí presentados, o porque desarrollan más ampliamente algunos temas de los aquí tratados. En todas estas referencias el lector encontará varios capítulos con temas que no son tratados en este libro (por ejemplo, temas de geometría analítica, de series, de cálculo de funciones de varias variables, etcétera). Como ya se había mencionado en el prólogo, la razón de este hecho es que la presente obra contiene solamente el material que se debería cubrir en un *primer* curso de Cálculo.

Los libros se presentan en orden de complejidad matemática, siendo el libro de Leithold de un nivel equivalente al de este libro, y el de Courant & John un libro para aquellos que quieran profundizar en las delicias de la abstracción y de las presentaciones impecables de los conceptos matemáticos.

El Cálculo, con Geometría Analítica, 6a. ed.
Louis Leithold
HARLA, México, 1991.

Cálculo
Serge Lang
Addison Wesley Iberoamericana, 1990.

Calculus
Tom M. Apostol
Editorial Reverté, España, 1982.

Calculus, 2nd. ed.
Michael Spivak
Publish or Perish, Inc.

Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático
Richard Courant y Fritz John
Editorial Limusa, México, 1979.

En lo que respecta a las notas históricas, la referencia más importante es:

Mathematical Though from Ancient to Modern Times
Morris Kline
Oxford University Press, 1980.

Con otro estilo, con contenido menos ambicioso, pero con historias muy divertidas, mencionamos también el libro:

Men of Mathematics
E. T. Bell
Simon & Schuster, 1965.

ÍNDICE ANALÍTICO

V

W







A Simon & Schuster Company